

УДК 621.38

О. В. Федоренко

Національний технічний університет України «КПІ»
проспект Перемоги, 37, 03056 Київ, Україна

Цифрові фільтри з низькою параметричною чутливістю

Розглянуто розрахунок параметричної чутливості цифрових фільтрів з дійсними та гіперкомплексними коефіцієнтами. Проведено розрахунок параметричної чутливості цифрових фільтрів з дійсними та триплексними коефіцієнтами. Виконано порівняльний аналіз отриманих значень чутливості даних фільтрів. Наведено метод зниження параметричної чутливості цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами та результати зниження чутливості цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами.

Ключові слова: цифрові фільтри, параметрична чутливість, сумарна параметрична чутливість, гіперкомплексні числові системи, зниження параметричної чутливості.

Цифрова фільтрація є одним з найбільш могутніх інструментальних засобів цифрової обробки інформації. Цифрові фільтри активно досліджуються на протязі багатьох років у рамках комплексних робіт по створенню САПР кафедрою системного проектування НТУУ «КПІ», завідувачем якої є професор А.І. Петренко [1–3]. Більше 25 років тому за ініціативою завідувача відділу НАН України професора М.В. Синькова були розпочаті дослідження в області гіперкомплексних числових систем, які активно розвиваються і по цей день [4–6]. Дана робота поєднує дослідження цих учених у гіперкомплексних числових системах і області фільтрації. Окрім очевидних переваг усунення помилок у фільтрі, пов'язаних з флуктуаціями параметрів пасивних компонентів у часі і за температурою, дрейфом операційних підсилювачів (у активних фільтрах) і т.п., цифрові фільтри здатні задовольняти таким технічним вимогам за своїми параметрами, яких, у кращому разі, було б надзвичайно важко досягти в аналоговому виконанні. Крім того, характеристики цифрового фільтра можуть бути легко змінені програмно. Тому вони широко використовуються в телекомунікаціях, у додатках адаптивної фільтрації.

Проте, цифрові фільтри не можуть бути розв'язанням усіх можливих задач фільтрації, сигналів, що виникають при обробці даних. Для роботи в реальному масштабі часу, процесор цифрової обробки сигналів повинен бути розрахований

на виконання всіх кроків у програмі фільтрації в межах проміжку часу, що відповідає одному такту дискретизації.

Зважаючи на поширеність цифрових фільтрів у сучасній техніці, сьогодні ведеться значна кількість досліджень, метою яких є покращення характеристик цифрових фільтрів. Іноді такі покращення можуть досягатися в результаті застосування нетипових, нетрадиційних для області цифрової обробки сигналів підходів. Так, досить перспективним напрямком є використання гіперкомплексної числової системи (ГЧС) для представлення коефіцієнтів передавальної функції цифрового фільтра [4–6]. Як показують дослідження, при такому підході є можливість покращення ряду характеристик фільтра, таких як максимальна тактова частота апаратної реалізації та параметрична чутливість цифрового фільтра [7–9].

Габарити, вага та вартість спеціалізованого процесора, призначеного для обробки сигналів, тим менші, чим коротші кодові слова i , зокрема, кодові слова, що відповідають коефіцієнтам цифрового кола. Довжина кодового слова залежить і від чутливості передавальної функції цифрового фільтра. Чутливість деякої величини M до зміни параметра q (скорочено — чутливість M по q) в загальному випадку може визначатися так:

$$S_q^M = \frac{q}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial q}.$$

По чутливості S_q^M можна судити, на скільки відсотків зміниться величина M , якщо параметр q зміниться на 1 % [10]. Якщо параметром q будуть коефіцієнти передавальної функції цифрового фільтра, а величиною M модуль передавальної функції цифрового фільтра, то отримаємо параметричну чутливість цифрового фільтра. Функція параметричної чутливості дозволяє провести аналіз впливу похибок коефіцієнтів передавальної функції на вихідний сигнал.

Дослідимо, як змінюється параметрична чутливість цифрового фільтра при використанні гіперкомплексних числових систем для представлення коефіцієнтів передавальної функції такого фільтра. Логічним буде дослідження сумарної параметричної чутливості. Тобто такої, що враховує можливу сумарну похибку по кожному з коефіцієнтів передавальної функції, а не деякого окремо взятого коефіцієнта. Для цифрового фільтра з дійсними коефіцієнтами a_i параметрична чут-

ливість по одному коефіцієнту a_1 розраховується як $RCS_{a_1} = \left| \frac{a_1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial a_1} \right|$, а сумарна

параметрична чутливість буде мати вигляд $RCS = \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial a_i} \right|$, де n — кількість

коефіцієнтів передавальної функції. Вигляд кінцевої формули для розрахунку параметричної чутливості цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами залежить від обраної ГЧС. Але в загальному випадку вигляд функцій чутливості по одному коефіцієнту для фільтра з дійсними й гіперкомплексними коефіцієнтами не відрізняється. Сумарна ж параметрична чутливість фільтра з гіперкомплекс-

сними коефіцієнтами буде мати вигляд: $RCS = \sum_{i=1}^n \left| \frac{a_i}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial a_i} \right|$, при цьому $n = l \cdot m$, де

l — розмірність ГЧС, а m — число гіперкомплексних коефіцієнтів у передавальній функції цифрового фільтра H . При порівнянні сумарних параметричних чутливостей фільтрів із дійсними та гіперкомплексними коефіцієнтами, для останніх в якості передавальної функції фільтра слід розглядати не загальний вигляд передавальної функції з гіперкомплексними коефіцієнтами, а передавальну функцію певним каналом, що реалізує фільтр-прототип з дійсними коефіцієнтами [11].

Розглянемо цифровий фільтр 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами з передавальною функцією:

$$H = \frac{0,287589 + 0,6888683 \cdot z^{-1} + 0,6888683 \cdot z^{-2} + 0,287589 \cdot z^{-3}}{1 + 0,418204 \cdot z^{-1} + 0,473048 \cdot z^{-2} + 0,061292 \cdot z^{-3}}. \quad (1)$$

Модуль передавальної функції наведено на рис. 1. Сумарна параметрична чутливість для такого фільтра буде розраховуватися за формулою $RCS = \sum_{i=1}^7 \left| \frac{a_i}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial a_i} \right|$, де $a_1 = 0,287589$, $a_2 = 0,6888683$, $a_3 = 0,6888683$, $a_4 = 0,287589$, $a_5 = 0,418204$, $a_6 = 0,473048$, $a_7 = 0,061292$. Графік залежності сумарної параметричної чутливості від частоти для даного фільтра показано на рис. 2.

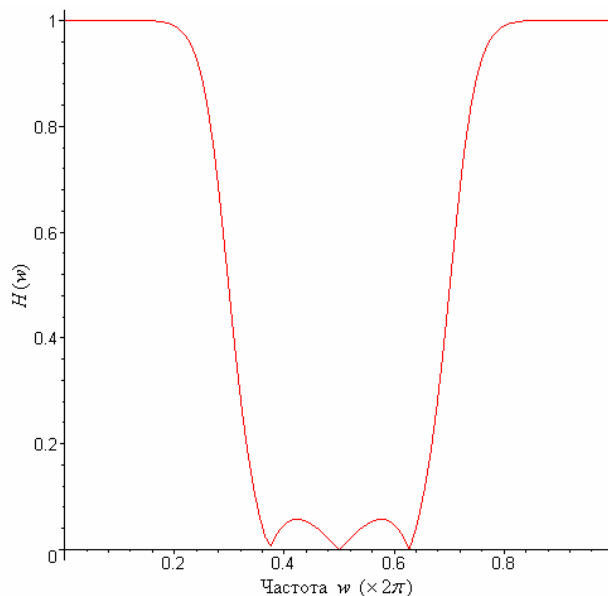


Рис. 1. Модуль передавальної функції фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами

Для наведеної передавальної функції цифрового фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами, використовуючи метод, наведений в [11], можна побудувати відповідну передавальну функцію цифрового фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами:

$$H = \frac{A + \frac{B}{z}}{1 + \frac{C}{z}}, \quad \text{де} \quad \begin{aligned} A &= 0,287589 \cdot e_1 + 1,8596139 \cdot e_2 - 7,2252725 \cdot e_3, \\ B &= 6,3229840 \cdot e_2, \\ C &= 0,1398633 \cdot e_1 + 0,6440127 \cdot e_2 + 0,0013858 \cdot e_3. \end{aligned}$$

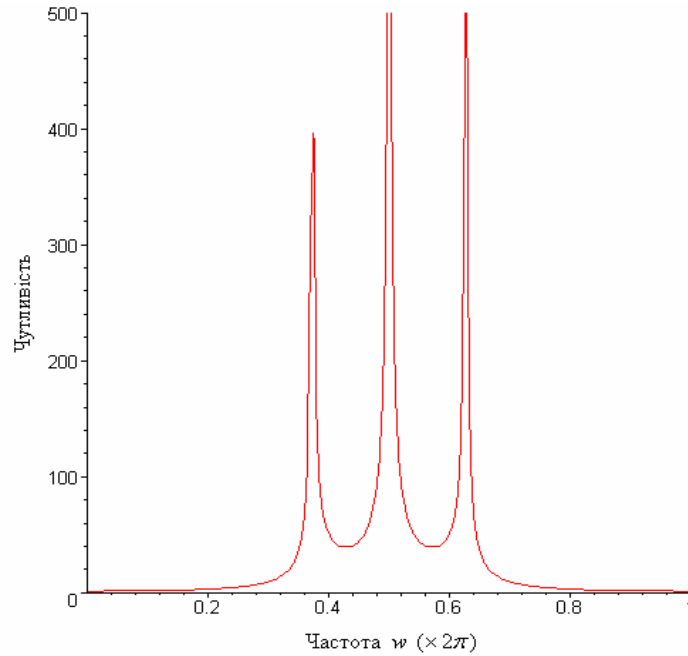


Рис. 2. Графік залежності сумарної параметричної чутливості від частоти для фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами

При цьому передавальну функцію фільтра-прототипу з дійсними коефіцієнтами, яка була наведена раніше, буде реалізовувати компонента наведеної передавальної функції з триплексними коефіцієнтами при базисному елементі e_1 . Вона має вигляд:

$$H_{e_1} = \frac{a_1 + D \cdot z^{-1} + E \cdot z^{-2} + F \cdot z^{-3}}{1 + K \cdot z^{-1} + L \cdot z^{-2} + M \cdot z^{-3}}, \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} K &= 3c_1 - c_3, \quad L = 3c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 - 2c_1c_3, \quad M = c_1^3 + c_3^3 + c_1c_2^2 + c_3c_2^2 - c_1^2c_3 - c_1c_3^2, \\ D &= -a_1c_3 + 2a_1c_1 + b_1 + \frac{a_2c_2}{2} - a_3c_3, \\ E &= a_1c_1^2 + 2b_1c_1 - b_1c_3 + \frac{a_1c_2^2}{2} + \frac{a_3c_2^2}{2} + \frac{a_2c_2c_1}{2} + \frac{a_2c_3c_2}{2} - a_1c_3c_1 + a_3c_3^2 - a_3c_3c_1 + \frac{b_2c_2}{2} - b_3c_3, \\ F &= b_3c_3^2 - b_1c_3c_1 - b_3c_3c_1 + \frac{b_3c_2^2}{2} + \frac{b_2c_3c_2}{2} + \frac{b_2c_2c_1}{2} + \frac{b_1c_2^2}{2} + b_1c_1^2. \end{aligned}$$

Параметрична чутливість цифрового фільтра з такою передавальною функцією розраховуватиметься за формулою $RCS = \sum_{i=1}^9 \left| \frac{a_{T_i}}{H_{e_1}} \cdot \frac{\partial H_{e_1}}{\partial a_{T_i}} \right|$, де $a_{T_1} = a_1$, $a_{T_2} = a_2$, $a_{T_3} = a_3$, $a_{T_4} = b_1$, $a_{T_5} = b_2$, $a_{T_6} = b_6$, $a_{T_7} = c_1$, $a_{T_8} = c_2$, $a_{T_9} = c_3$.

Графік залежності сумарної параметричної чутливості від частоти для даного фільтра з триплексними коефіцієнтами показано на рис. 3.

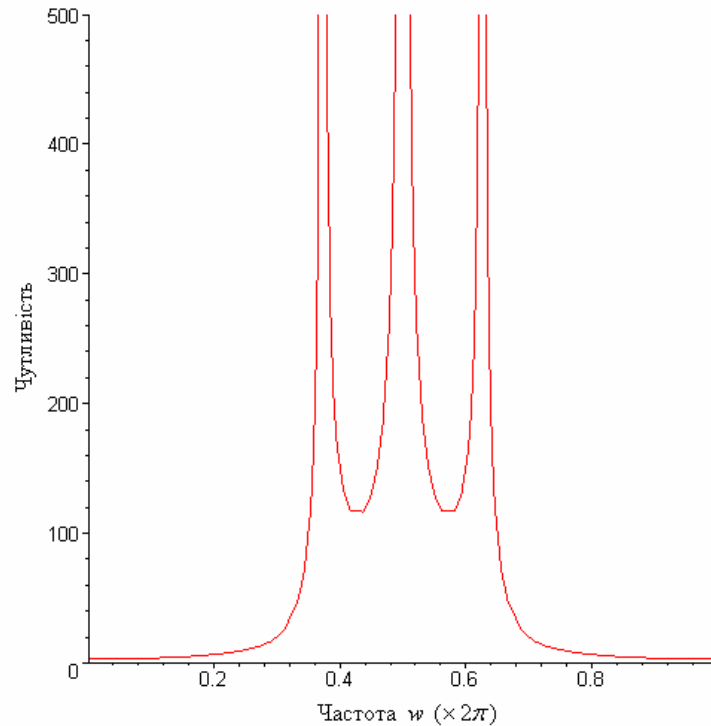


Рис. 3. Графік залежності сумарної параметричної чутливості від частоти для фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами

Для порівняння параметричних чутливостей цифрового фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами і його прототипу — цифрового фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами, зручно розглядати відношення параметричної чутливості фільтра з триплексними коефіцієнтами до параметричної чутливості фільтра з дійсними коефіцієнтами. На рис. 4 показано графік такого відношення для фільтрів, передавальні функції яких були наведені раніше.

З графіка, що представлено на рис. 4, видно, що на всіх частотах параметрична чутливість отриманої моделі цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами в двічі-тричі вища за параметричну чутливість цифрового фільтра з дійсними коефіцієнтами. Тобто похибки в представленні коефіцієнтів даного цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами більше спотворюють передавальну функцію (а значить і точність фільтрації) ніж похибки в представленні коефіцієнтів цифрового фільтра з дійсними коефіцієнтами, що є негативною характеристикою такого фільтра з триплексними коефіцієнтами.

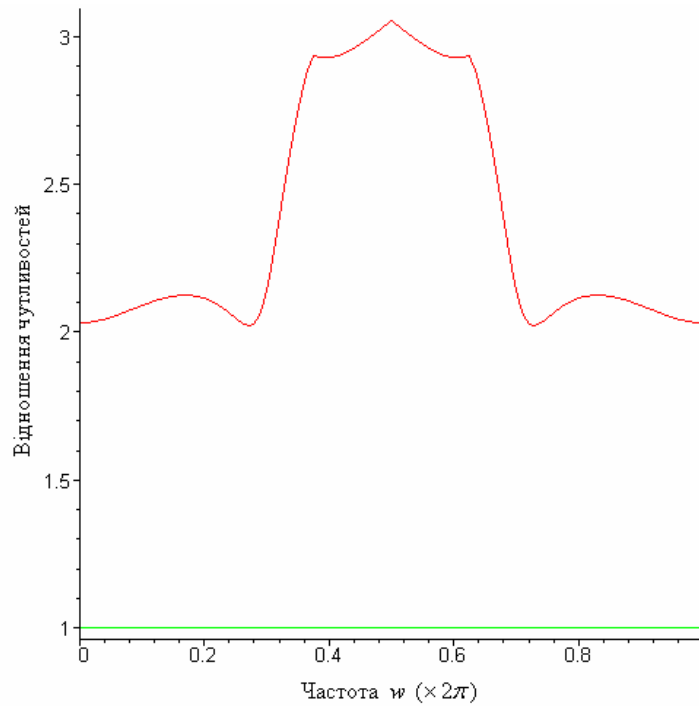


Рис. 4. Графік залежності відношення сумарної параметричної чутливості цифрового фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами до сумарної параметричної чутливості цифрового фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами від частоти

Але метод розрахунку цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами [11] по відомому прототипу цифрового фільтра з дійсними коефіцієнтами допускає розрахунок безлічі наборів триплексних коефіцієнтів цифрових фільтрів, при яких розрахований фільтр буде відповідати своєму прототипу. Це можливо завдяки тому, що одна з систем переходу від фільтра з дійсними до фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами не визначена. І для простоти її розв'язання деякі невідомі коефіцієнти прирівнюються до нуля. В нашому випадку таку систему переходу можна отримати, прирівнявши відповідні вирази при z у чисельниках правих частин рівностей (1) та (2). Тоді отримаємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1c_3 + 2a_1c_1 + b_1 + \frac{a_2c_2}{2} - a_3c_3 = 0,6888683, \\ a_1c_1^2 + 2b_1c_1 - b_1c_3 + \frac{a_1c_2^2}{2} + \frac{a_3c_2^2}{2} + \frac{a_2c_2c_1}{2} + \frac{a_2c_3c_2}{2} - \\ - a_1c_3c_1 + a_3c_3^2 - a_3c_3c_1 + \frac{b_2c_2}{2} - b_3c_3 = 0,6888683, \\ b_3c_3^2 - b_1c_3c_1 - b_3c_3c_1 + \frac{b_3c_2^2}{2} + \frac{b_2c_3c_2}{2} + \frac{b_2c_2c_1}{2} + \frac{b_1c_2^2}{2} + b_1c_1^2 = 0,287589. \end{array} \right.$$

При цьому $a_1 = 0,287589$, $c_1 = 0,13986328$, $c_2 = 0,644012706$, $c_3 = 0,001385840053$. Звідки маємо:

$$\begin{cases} b_1 = 0,6088206 - 0,3220064 \cdot a_2 + 0,0013858 \cdot a_3, \\ b_2 = 1,4123021 - 0,6440127 \cdot a_3 + 0,1384774 \cdot a_2, \\ b_3 = 0,4117428 + 0,1398633 \cdot a_3 + 0,3220064 \cdot a_2. \end{cases} \quad (3)$$

Використовуючи ці вирази, отримаємо функцію сумарної параметричної чутливості цифрового фільтра з триплексними коефіцієнтами, який ми розглядаємо від коефіцієнтів a_2 , a_3 та частоти ω . За допомогою отриманої функції, сформувавши вимоги по частоті, можемо визначити коефіцієнти a_2 та a_3 , за яких параметрична чутливість буде найменшою. Для приклада, що розглядається такими коефіцієнтами, можуть бути $a_2 = 0,2999924$ та $a_3 = 0,1110080$. Тоді з (3) $b_1 = 0,5123750$, $b_2 = 1,3823537$, $b_3 = 0,5238682$. І нова передавальна функція цифрового фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами матиме вигляд:

$$H = \frac{A + \frac{B}{z}}{1 + \frac{C}{z}}, \quad \text{де} \quad \begin{aligned} A &= 0,2875890 \cdot e_1 + 1,2999924 \cdot e_2 - 0,1110080 \cdot e_3, \\ B &= 0,5123750 \cdot e_1 + 1,3823537 \cdot e_2 + 0,5238682 \cdot e_3, \\ C &= 0,1398633 \cdot e_1 + 0,6440127 \cdot e_2 + 0,0013858 \cdot e_3. \end{aligned}$$

Графік залежності відношення сумарної параметричної чутливості такого цифрового фільтра до сумарної параметричної чутливості цифрового фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами від частоти наведено на рис. 5.

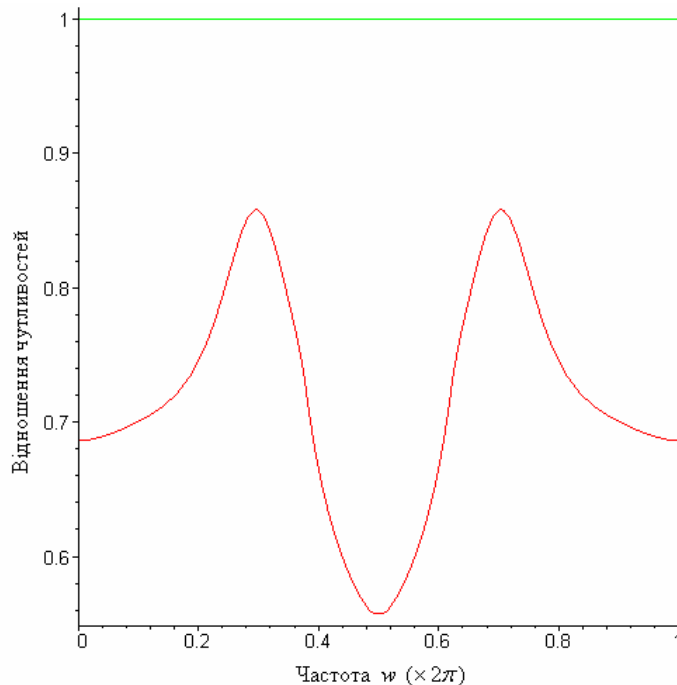


Рис. 5. Залежність відношення сумарної параметричної чутливості нового цифрового фільтра 1-го порядку з триплексними коефіцієнтами до сумарної параметричної чутливості цифрового фільтра 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами від частоти

Отже, після розрахунку нових коефіцієнтів передавальної функції фільтра з триплексними коефіцієнтами ми отримали сумарну параметричну чутливість, що нижча за чутливість цифрового фільтра-прототипу з дійсними коефіцієнтами на 15–80 % у залежності від частоти.

Таким чином, застосовуючи описаний метод, маємо можливість зменшення параметричної чутливості цифрових фільтрів із коефіцієнтами, що представлені гіперкомплексними числовими системами.

1. *Петренко А.И.* Основы автоматизации проектирования. — К.: Техника, 1982. — 295 с.
2. *Сигорский В.П., Петренко А.И.* Алгоритмы анализа электронных схем. Изд. 2-е. — М.: Сов. радио, 1978. — 608 с.
3. *Петренко А.И., Лошаков В.Н., Тетельбаум А.Я., Шрамченко Б.Л.* Автоматизированное проектирование СБИС на базовых кристаллах. — М.: Радио и связь, 1988. — 160 с.
4. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах. — К.: Наук. думка, 1979. — 140 с.
5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Ковалевская И.Л., Изык Л.Б.* Гиперкомплексные числовые системы, их структуры, особенности и возможности применения для моделирования. Теория и применение моделирующих систем. — К.: Наук. думка, 1986.
6. *Пухов Г.Е., Евдокимов В.Ф., Синьков М.В.* Разрядноаналоговые вычислительные системы — М.: Сов. радио, 1978. — 256 с.
7. *Toyoshima H.* Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters // IEICE Trans. Fundamentals. — 2002, Aug. — E85-A, 8. — P. 1870–1876.
8. *Schutte H.-D., Wenzel J.* Hypercomplex Numbers in Digital Signal Processing // Proc. IEEE Int. Conf. on Circuits and Systems. — New Orleans, 1990.
9. *Higuchi S., Toyoshima H.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // IEIC Technical Report. — 1999 — Vol. 98, N 516. — P.39–44.
10. *Бизин А. Т.* Введение в цифровую обработку сигналов. — Новосибирск, 1998. — 66 с.
11. *Калиновський Я.О.* Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: Дис. ... доктора техн. наук: 01.05.02; Захищена 17.09.2007; Затв. 17.01.2008. — К., 2007. — 417 с.: іл. — Бібліогр.

Надійшла до редакції 26.02.2008