

УДК 519.68; 620.179.15; 681.3

А. И. Закидальский

Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Минимизация вычислений в алгоритме объемной реконструкции

При реализации обратного проецирования в алгоритме объемной реконструкции предложено использовать предварительную интерполяцию свернутых проекционных данных. Приведены результаты анализа сложности реализации различных способов интерполяции, дана оценка погрешности из-за наличия в спектре сигнала составляющих выше частоты Найквиста. Предложено использовать усеченную sinc-интерполяцию с окном Ланцоша, обеспечить точность, сравнимую с интерполяцией на основе быстрого преобразования Фурье, но на порядок меньшей вычислительной сложности.

Ключевые слова: *объемная реконструкция, обратное проецирование, свертка, интерполяция, алгоритм восстановления.*

Оценка полных вычислительных затрат приводится к количеству операций с плавающей точкой, необходимых для вычисления одного вклада. Приведем отдельные оценки количества операций на всех этапах реконструкции.

Угол, соответствующий половине углового размера зоны реконструкции, примем равным $2\gamma_{\max}$. Процесс реконструкции состоит из ряда этапов: преобразования конусных проекционных данных, свертки, интерполяции свернутых проекций и обратного проецирования.

Приведенное значение количества операций на преобразование конусных проекций зависит от угла охвата объекта сканирующей системой. Для реальных значений угла они не превышают нескольких сотых долей операции с плавающей точкой.

Выполнение быстрой свертки с использованием ортогональных преобразований при реконструкции матриц требует порядка 0,1–0,2 операции с плавающей точкой. Основные вычислительные затраты связаны с обратным проецированием и интерполяцией при определении вклада.

При организации вычислений с простейшей интерполяцией во внутреннем цикле на обратное проецирование потребуется не менее 4-х операций на вклад (при линейной интерполяции — 2 умножения и 2 сложения).

Использование подробной предварительной интерполяции свернутых проекционных данных позволяет примерно вдвое сократить количество операций во

внутреннем цикле. Кроме того, учитывая небольшие затраты на предварительную интерполяцию, вместо линейной можно применить более совершенную интерполяцию по многим точкам. В (1) дается количество операций (на 1 вклад) при использовании различных методов интерполяции:

$$\begin{aligned}
 c_{lin.int} &\approx \frac{2^q + 1}{2^p}, \\
 c_{FFT.int} &\approx \frac{(2^q - 1)}{2^p} \cdot 5 \cdot \left[1 + p + \frac{q}{1 - 2^{-q}} \right], \\
 c_{2n.int} &\approx \frac{(2^q - 1)}{2^p} \cdot (3n - 1),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где 2^q — коэффициент интерполяции; 2^p — длина последовательности.

В табл. 1 приведены затраты операций на вклад при линейной интерполяции ($c_{lin.int}$), интерполяции по $2n$ точкам ($c_{2n.int}$), а также sinc-интерполяции с использованием быстрого преобразования Фурье ($c_{FFT.int}$).

Таблица 1

p	2^q	$c_{lin.int}$	$c_{2n.int}$			$c_{FFT.int}$
			$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	
10	4	0,005	0,006	0,015	0,023	0,200
	8	0,009	0,014	0,034	0,055	0,493
	16	0,017	0,029	0,073	0,117	1,118

Качество предварительной интерполяции свернутых проекций зависит от вида интерполирующего множителя, ширины требуемого спектра для его реализации.

Как известно, sinc-интерполяция требует наименьшей ширины спектра, однако она весьма трудоемка в реализации.

Интерполирующий множитель представляет собой четную функцию. Для действительных сигналов, симметричных относительно вертикальной оси, вычисление спектров можно свести к интегрированию действительных величин:

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \cdot e^{-i \cdot 2\pi f t} \cdot dt = 2 \int_0^{\infty} \varphi(t) \cdot \cos(2\pi f t) \cdot dt.
 \tag{2}$$

В случае кусочно-постоянного интерполирующего множителя ($\varphi(t) = 1$) на интервале времени $t = -Ti/2 \dots Ti/2$ частотный спектр, очевидно, равен

$$\Phi(f) = 2 \int_0^{Ti/2} \cos(2\pi f t) \cdot dt = \frac{\sin(\pi f Ti)}{\pi f}.
 \tag{3}$$

(Здесь и далее Ti — шаг дискретизации $Ti = 1$).

Спектр ограниченного по времени сигнала не ограничен по частоте. В качестве примера на рис. 1 представлены спектр (а) и энергия спектра (б) для случая

одноточечной интерполяции.

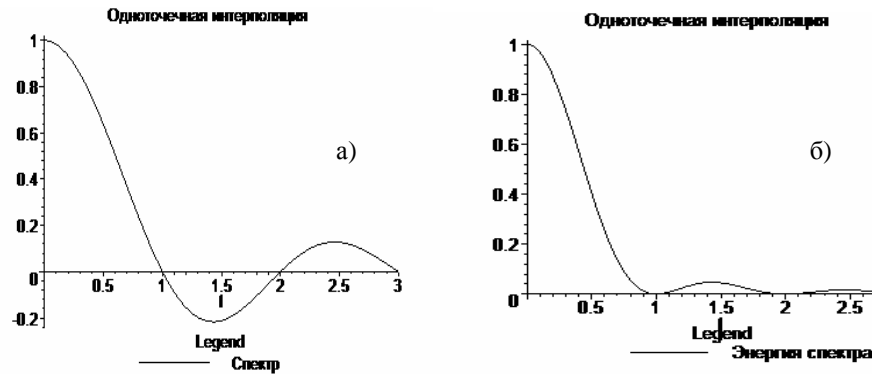


Рис. 1

С другой стороны, корректная дискретизация предполагает отсутствие в сигнале гармоник с частотой $f \geq 1/2Ti$. Наложение частот приведет к появлению ошибки интерполяции, величина которой связана с частью энергии спектра за пределами полосы пропускания ($f \geq 1/2Ti$). График энергии (квадрат спектра) приведен на рис. 2б. Мерой ошибки может служить относительное значение энергии спектра за пределами полосы пропускания:

$$\delta_E = \frac{\int_{0.5}^{\infty} E \cdot df}{\int_0^{\infty} E \cdot df} . \quad (4)$$

Для одноточечной интерполяции энергия пропорциональна величине

$$E = \left[\frac{\sin(\pi f Ti)}{\pi f} \right]^2 . \quad (5)$$

Выполнив необходимые преобразования, получим оценку относительной погрешности *одноточечной интерполяции*:

$$\delta_E \approx 0,226 \quad (6)$$

Линейная интерполяция. Линейная (двухточечная) интерполяция дает возможность существенно повысить точность представления промежуточных значений функции по ее дискретным отсчетам. В качестве интерполирующего множителя на интервале времени $t = -Ti \dots Ti$ используется четная функция вида:

$$\varphi(t) = 1 - \left| \frac{t}{Ti} \right| . \quad (7)$$

Тогда, с учетом (2), после интегрирования получим спектр линейного интерполирующего множителя:

$$\Phi(f) = \frac{\sin^2(\pi \cdot f \cdot Ti)}{\pi^2 f^2 Ti} \quad (8)$$

Ниже на рис. 2 представлен спектр (а) и распределение энергии по частоте (б) для линейного интерполирующего множителя (7).

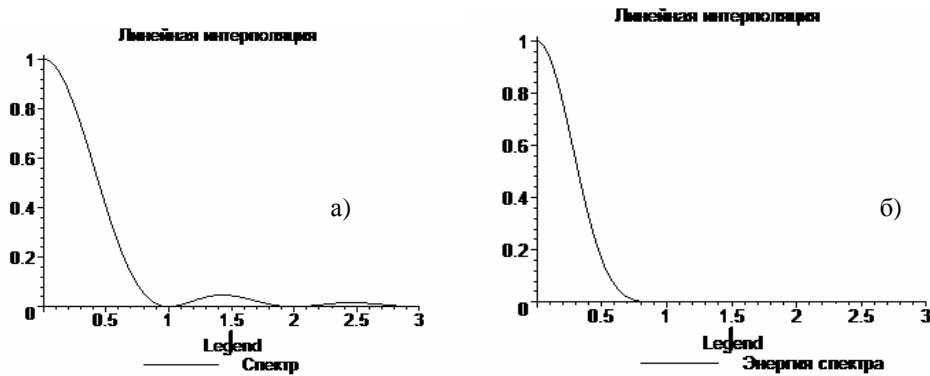


Рис. 2

Как видно из графика энергии спектра $E = \left[\frac{\sin(\pi f Ti)}{\pi f} \right]^4$, вне полосы пропускания ($f > 0,5$) сосредоточена сравнительно небольшая ее часть.

Выполнив необходимые преобразования с учетом (4) и (8), получим оценку относительной погрешности *линейной интерполяции*:

$$\delta_E \approx 0,051 \quad (9)$$

Окно Дирихле. Sinc-интерполяция. Известно, что спектр интерполирующего множителя вида

$$\varphi(t) = \frac{\sin[\pi \cdot t / Ti]}{[\pi \cdot t / Ti]} \quad (10)$$

при неограниченном времени ($t \gg Ti$) ограничен частотой $f \leq 1/2Ti$.

При общей длине интерполирующего множителя $2n$ периодов ($|t| = nTi$) его спектр определяется выражением:

$$\Phi(f) = \frac{[Si(\pi \cdot n \cdot (2 \cdot f \cdot Ti + 1)) - Si(\pi \cdot n \cdot (2 \cdot f \cdot Ti - 1))] \cdot Ti}{\pi} \quad (11)$$

На рис. 3. показаны спектры (а) и энергия спектров (б) $\text{sinc}(\pi f Ti)$ при учете $2n$ периодов ($n = 1, 2, 3, 30, Ti = 1$).

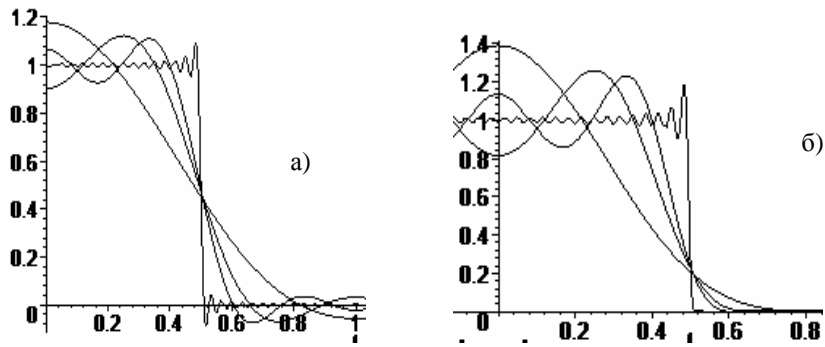


Рис. 3

В табл. 2 для интерполирующего множителя вида $\varphi(t) = \text{sinc}(\pi t/T_i)$ приведены значения «энергии ошибки», полной энергии спектра и величины относительной погрешности в зависимости от ширины окна Дирихле.

Таблица 2

n	en	En	$\delta = en/En$
1	0,0360	0,9028	0,040
2	0,0208	0,9500	0,022
3	0,0146	0,9664	0,015
30	0,0016	0,9966	0,0016

Примерно такие же результаты для sinc-интерполяции можно получить в случае применения окна Ланцоша. В отличие от простого усечения sinc-ряда окном Дирихле, в данном случае при той же вычислительной сложности получается более гладкая интерполяция.

В заключение отметим целесообразность применения подробной предварительной интерполяции проекционных данных с применением усеченного sinc-ряда по 4–6 отсчетам. При этом обеспечивается требуемая точность, и резко снижается приведенное к одному вкладу число операций (с 4 до 2,1) на обратное процирование.

1. Терновой К.С., Синьков М.В., Закидальский А.И., Яник А.Ф., Тарасенко-Зеленая Л.И. Введение в современную томографию. — К.: Наук. думка, 1983. — 232 с.

2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / Пер. с англ. / Под ред. А.М. Лопшица. — М.: Гос. изд-во. физ.-мат. лит., 1961 — 524 с.

3. Закидальский А.И. О вопросах развития алгоритмов объемной реконструкции в компьютерной томографии // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2002. — Т. 4, № 4. — С. 30–34.

4. Синьков М.В., Закидальский А.И. Объемная реконструкция «больших» объектов на томографах с ограниченной по размерам матрицей детекторов // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 18–25.

Поступила в редакцию 11.03.2008