КИНЕМАТИКА
И ФИЗИКА
НЕБЕСНЫХ
ТЕЛ том 25 № 1 2009

УДК 530.12; 523.11

П. И. Фомин[1, 2], Ю. В. Штанов[1], О. В. Барабаш[3]

[1]Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины
03143 Киев, ул. Метрологическая 14 б
[2]Институт прикладной физики НАН Украины
40030 Сумы, ул. Петропавловская 58
[3]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка
03022 Киев, пр. Глушкова 6
pfomin@bitp.kiev.ua, shtanov@bitp.kiev.ua, obar@univ.kiev.ua

О механизме квантового рождения замкнутой вселенной

Рассматривается конфигурация псевдоримановой геометрии, представляющая собой квазизамкнутый мир — пространственно замкнутый мир, соединенный с большой вселенной вдоль некоторой мировой линии. Мы строим классическую и квантовую теорию такого квазизамкнутого мира в приближении минисуперпространства и вычисляем вероятность его туннелирования в область больших размеров. В отличие от общепринятого подхода к квантовой гравитации, связанного с независящей от времени волновой функцией вселенной, в нашем подходе нет трудностей с интерпретацией волновой функции так как, во-первых, в рассматриваемой теории имеется время — космологическое время большой вселенной, — в котором происходит эволюция квазизамкнутых миров, и во-вторых, квазизамкнутые миры образуют квантовые ансамбли, к волновым функциям которых применима стандартная статистическая интерпретация.

ПРО МЕХАНІЗМ КВАНТОВОГО НАРОДЖЕННЯ ЗАМКНУТОГО ВСЕСВІТУ, Фомін П. І., Штанов Ю. В., Барабаш О. В. — Розглядається конфігурація псевдоріманової геометрії, що являє собою квазізамкнутий світ — просторово замкнутий світ, з'єднаний з великим всесвітом уздовж деякої світової лінії. Ми будуємо класичну і квантову теорію такого квазізамкнутого світу в наближенні мінісуперпростору і обчислюєм імовірність його тунелювання в область великих розмірів. На відміну від загальноприйнятого підходу до квантової гравітації, пов'язаного з незалежною від часу хвильовою функцією всесвіту, в нашому підході відсутні труднощі з інтерпретацією хвильової функції оскільки, по-перше, в даній теорії є час — космологічний час великого всесвіту, — в якому відбувається еволюція квазізамкнутих світів, і по-друге, квазізамкнуті світи утворюють квантові ансамблі, до хвилевих функцій яких застосовна стандартна статистична інтерпретація.

ON THE MECHANISM OF QUANTUM BIRTH OF A CLOSED UNIVERSE, by Fomin P. I., Shtanov Yu. V., Barabash O. V. — We consider a configuration of pseudo-Riemannian geometry representing a quasi-closed world — a spatially closed world connected with the mother universe along some world line. We develop classical and quantum theory of such a quasi-closed world in the minisuperspace approximation and calculate the probability of its tunneling to the region of large sizes. Unlike the conventional approach to quantum gravity connected with the time-independent wave function of the universe, our approach is free from the difficulties with interpretation of the wave function, since, firstly, the theory under consideration contains time — the cosmological time of the big universe, — in which evolution of the quasi-closed worlds proceeds and, secondly, the quasi-closed worlds form quantum ensembles so that standard statistical interpretation is applicable to their wave functions.

ВВЕДЕНИЕ

Квантовое описание гравитационного взаимодействия или, как принято выражаться, квантование гравитации, до сих пор не осуществлено вполне удовлетворительным образом. Вместе с тем квантовая природа всех прочих взаимодействий, по-видимому, этого требует. Квантовая теория гравитации, помимо устранения концептуальной неполноты и незамкнутости известных в настоящее время законов природы, возможно, решила бы и важнейшие физические проблемы, такие как проблема космологической сингулярности и проблема микроструктуры пространства-времени. Первая из этих проблем не так давно была предметом довольно подробного обсуждения в литературе. Для ее решения привлекался подход Уилера—Де Витта [10, 17, 18], представляющий собой каноническое квантование гравитации в переменных метрического тензора. Согласно этому подходу, вселенная в целом описывается волновой функцией, подчиняющейся ряду уравнений, главным из которых является уравнение Уилера—Де Витта. Однако, даже оставляя в стороне технические трудности, связанные с приданием строгого математического смысла этому уравнению и с поиском его решений или хотя бы доказательством их существования, мы должны отметить, что указанный подход порождает новые вопросы и проблемы, не менее серьезные, чем классическая проблема космологической сингулярности, которую таким образом пытались решить.

Так, волновая функция вселенной подразумевает вероятностное описание ее свойств. Но наша Вселенная существует в единственном экземпляре, и неясно, как такое описание может в принципе возникнуть. Другая проблема связана с тем фактом, что волновая функция вселенной не зависит от времени как такового, и возникает вопрос, каким образом такая волновая функция в принципе может описывать Вселенную, которая эволюционирует во времени. Решение проблем такого рода, предложенное Эвереттом [11, 12], и именуемое теорией «многих миров» или «многих сознаний», нельзя признать естественным, так как оно требует веры в существование бесконечного множества невидимых параллельных миров и основано на гипотетической физической теории сознания. Теория волны-пилота [9, 15, 16] в этой связи является, на наш взгляд, несколько более удовлетворительной, но она не разработана в достаточно полной мере и имеет свои собственные серьезные трудности.

Вопрос о микроструктуре пространства-времени гораздо реже обсужда-

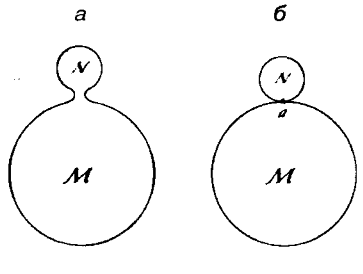

Рис. 1. Полузамкнутый (*а*) и квазизамкнутый (*б*) мир

ется в литературе. Настоящая статья будет посвящена этому вопросу, а также связанному с ним вопросу о спонтанном квантовом рождении новой вселенной и оценке вероятности такого процесса. При описании микроструктуры пространства-времени часто употребляют введенный Уилером термин «пространственно-временная пена», подчеркивающий ее квантовую природу. Действительно, если придерживаться обычных представлений квантовой теории поля, то нужно согласиться, что на достаточно малых пространственно-временных масштабах становится существенной квантовая природа метрики пространства-времени, и что нельзя говорить о ее определенном классическом значении. Достаточно полное описание этой «пены» представляет очень сложную задачу. В этой работе мы ограничимся рассмотрением некоторого нового класса конфигураций геометрии, которые естественно назвать квазизамкнутыми мирами [7, 13, 14].

Рассмотрим сначала пространственную конфигурацию, подобную изображенной на рис. 1, *а*. Большое по своим размерам трехмерное риманово пространство M соединено небольшой горловиной с малым пространством N, которое, ввиду малости метрического размера горловины, мы можем назвать полузамкнутым миром. При классической эволюции такой трехмерной конфигурации во времени, полузамкнутый мир с точки зрения большого мира приближенно выглядит как некая «частица» с массой, вообще говоря, тем меньшей, чем меньше размер горловины.

Мы можем предположить, что подобные конфигурации возникают в результате вакуумных квантовых флуктуаций метрики и существуют тем дольше, чем меньше их масса (внутренняя энергия). Тем самым такие долгоживущие конфигурации с малой массой естественно выделяются на фоне всевозможных флуктуаций геометрии [7]. Их спонтанное образование можно интерпретировать как квантово-гравитационную неустойчивость однородного вакуума.

В предельном случае нулевого размера горловины, изображенной на рис. 1, *а*, малый полузамкнутый мир как бы замыкается полностью, но мы не исключаем возможности того, что он остается прикрепленным к материнскому миру. Соответствующая конфигурация изображена на рис. 1, *б*. Здесь два замкнутых мира, большой и малый, соединяются в точке *а*. Практически это означает, что мы отождествляем соответствующие точки в этих пространствах.

Один из таких элементарных миров может протуннелировать в область больших собственных размеров и образовать дочернюю вселенную.

Несколько отвлекаясь, мы отметим, что наличие квантовых флуктуаций геометрии, вообще говоря, не исключает возможности упорядоченной структуры основного состояния (вакуума). Если предположить, как это сделано в работах одного из авторов [7, 13], что эта структура имеет форму «кристалла», роль «атомов» которого играют долгоживущие флуктуации

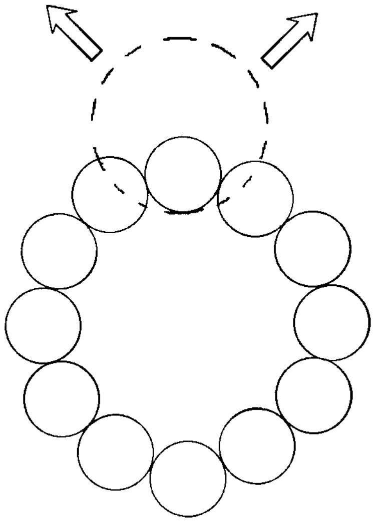

Рис. 2. Квазизамкнутые миры, образующие кристаллическую структуру

указанного типа (рис. 2), то это позволило бы решить ряд важных проблем квантовой теории поля, таких как проблема расходимостей и проблема космологической постоянной, и объяснить множественность фермионных поколений элементарных частиц. Однако в настоящей работе эти вопросы затрагиваться не будут; здесь мы строим описание лишь одного из возможных таких «атомов», представляющего собой конфигурацию типа изображенной на рис. 1, *б* или рис. 2.

Ниже, ограничиваясь рамками минисуперпространства, мы построим квантовую теорию такой конфигурации, которую мы будем называть квазизамкнутым миром, или минивселенной. Далее мы вычислим вероятность туннелирования минивселенной в область больших ее размеров и, тем самым, рождения из нее новой вселенной [5, 6].

ТЕОРИЯ КВАЗИЗАМКНУТОГО МИРА

В этой главе мы сформулируем квантовую теорию квазизамкнутого мира. Большой материнский мир мы описываем в классических терминах, т. е. с помощью классической четырехмерной геометрии, в то время как сам малый квазизамкнутый мир будет описываться квантовыми законами. Такая принципиальная разница в описании геометрии больших и малых пространственно-временных масштабов, по-видимому, неизбежна в непротиворечивой квантовой теории гравитации. Заметим, что в определенном смысле это соответствует методу среднего поля. При этом мы отмечаем, что в нашем подходе отсутствуют вышеупомянутые принципиальные проблемы, возникающие при применении квантового формализма ко всей Вселенной. Так, вероятностное описание квазизамкнутых миров возможно, поскольку их может быть сколь угодно много, и они, таким образом, образуют квантовые ансамбли. Проблема временной эволюции решается с помощью того обстоятельства, что квазизамкнутые миры взаимодействуют с большим миром, и параметры большого мира, связанные с этим взаимодействием, играют роль внешних параметров для квазизамкнутых миров. Основным таким параметром является относительное местоположение соединяющей точки, т. е. координаты точки приклейки квазизамкнутого мира к большому миру. Другим таким параметром может быть, например, значение некоторого скалярного поля.

Приступим к построению подробной теории описываемой ситуации. Материнский мир представляет собой четырехмерное гладкое псевдориманово многообразие M. В модели минисуперпространства классический (неквантовый) квазизамкнутый мир представляет собой замкнутую вселенную Фридмана N, т. е. пространство с топологией $S^3 \times R$, где S^3 обозначает трехмерную сферу. Квазизамкнутый мир N «приклеен» к материнскому миру M вдоль некоторой времениподобной мировой линии, заданной в обоих пространствах. Мы принимаем, что в пространстве N эта линия есть линия временной координаты. Пусть $X = \{X^\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2, 3\}$ суть некоторые координаты в M, а t, $x = \{x^i,\ i = 1, 2, 3\}$ — естественные координаты в N. Тогда мировая линия приклейки задается параметрически как

$$\begin{aligned} X^\alpha(\tau) &= X^\alpha_*(\tau), \\ t(\tau) &= t_*(\tau), \\ x^i(\tau) &= x^i_* = \text{const}, \end{aligned} \tag{1}$$

причем точки с координатами $X_*(\tau)$ и $(t_*(\tau),\ x_*)$, соответствующие одному и тому же значению параметра τ, отождествляются.

Метрика на материнском мире предполагается заданной; в координатах X ее коэффициенты обозначим $G_{\alpha\beta}(X)$. На мировой линии $X_*(\tau)$ метрика $G_{\alpha\beta}(X)$ индуцирует риманову метрику с интервалом $ds^2 = G_{\alpha\beta}(X_*)\dot X^\alpha_* \dot X^\beta_* d\tau^2$, где точка обозначает производную по параметру τ. Задавая теперь метрику Фридмана $g_{\mu\nu}$ (t, x) на пространстве N, мы должны учитывать отождествление соответствующих точек и вытекающее отсюда условие согласования индуцированных метрик на рассматриваемой мировой линии:

$$G_{\alpha\beta}(X_*)\dot X^\alpha_* \dot X^\beta_* \equiv g_{00}(t_*,\ x_*)\dot t^2_*. \tag{2}$$

Вариационная задача для квазизамкнутого мира ставится следующим образом: в материнском мире задается мировая линия $X_*(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$. В квазизамкнутом мире $N = S^3 \times [0, 1]$ рассматриваются метрики Фридмана

$$ds^2 = c^2N^2(t)dt^2 - a^{2(t)}d\Omega, \tag{3}$$

где c — скорость света; $d\Omega$ — метрика единичной три-сферы, с заданными граничными условиями $a(0) = a_0$, $a(1) = a_1$ и такие, что существует функция $t_*(\tau)$, определяющая мировую линию в N, для которой выполнено условие (2):

$$G_{\alpha\beta}(X_*)\dot X^\alpha_* \dot X^\beta_* \equiv c^2N^2(t_*)\dot t^2_*. \tag{4}$$

Функция $N(t)$ называется функцией хода. Решением вариационной задачи (если оно существует) является метрика Фридмана вида (3), которая является экстремалью действия Гильберта—Эйнштейна в описанном классе метрик. Соответствующая кривая $t = t_*(\tau)$, $x \equiv x_*$ естественным образом поточечно отождествляется с кривой $X_*(\tau)$.

Очевидно, что определенная выше функция $t_*(\tau)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 N(t)dt = T\,, \tag{5}$$

где T — длительность (собственное время) мировой линии $X_*(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$. Тем самым вариационная задача для класса метрик (3) снабжается условием (5).

Если кроме метрики мы рассматриваем также некоторые поля, то необходимо также согласовывать их значения в большом и малом мирах вдоль мировой линии их приклейки. Так, если φ — такого рода скалярное поле, то возникает дополнительное условие

$$\varphi(X_*) \equiv \varphi(t_*,\, x_*). \tag{6}$$

Ниже мы в основном будем рассматривать лишь метрику. Однако в конце следующей главы мы обратимся к теории со скалярным полем, потенциал которого индуцирует переменный (в пространстве и времени) космологический член.

Описанную выше формулировку теории можно далее уточнять. Например, можно потребовать дополнительно, чтобы кривая $X_*(\tau)$ была геодезической. Далее, мы считали метрику в M заданной изначально, но могли бы сформулировать для нее некоторый вариационный принцип, который учитывал бы влияние квазизамкнутого мира N. Наконец, интересно было бы развить теорию квазизамкнутого мира для полного суперпространства (т. е. не ограничиваясь рамками минисуперпространства). Теории подобного рода мы надеемся изучить в последующих работах. В этой работе нам будет достаточно ограничиться условиями, сформулированными выше. Как следует из этих условий, мы не учитываем возможное влияние квазизамкнутого мира на метрику большого материнского мира.

Переходим к квантовой теории квазизамкнутого мира. Пусть задана времениподобная траектория точки приклейки $X_*(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, длительности T, соединяющая точки p и q в пространстве-времени M, т. е. $X_*(0) = X(p)$, $X_*(1) = X(q)$. Пользуясь методом интеграла по траекториям, мы вводим в рассмотрение следующий объект. Для заданных граничных условий a_0 и a_1 рассматриваем указанный выше класс метрик вида (3) на N, удовлетворяющих условию (5). Определяем амплитуду перехода как формальный функциональный интеграл

$$U(T,\, a_1,\, a_0) := C\int_{\omega(T)} [DN]_T Da \exp\left(\frac{iS[N,\, a]}{\hbar}\right), \tag{7}$$

по рассматриваемому классу $\omega(T)$ метрик на N с действием Гильберта—Эйнштейна $S[N,\, a]$. Здесь C — нормировочная постоянная. Так определенная амплитуда перехода есть функция от граничных условий a_0, a_1 и от длительности T времениподобной кривой $X_*(\tau)$, соединяющей точки p и q.

Амплитуду (7) удобно переписать в виде функционального интеграла по всему классу метрик вида (3) без ограничений на $N(T)$:

$$U(T,\, a_1,\, a_0) = C\int DNDa \exp\left(\frac{iS[N,\, a]}{\hbar}\right)\delta\left(\int_0^1 N(t)dt - T\right), \tag{8}$$

при этом дельта-функция в (8) эффективно ограничивает класс траекторий $N(T)$, по которому происходит интегрирование. Подынтегральное выражение в (8) инвариантно относительно произвольных монотонных замен параметра t (репараметризаций). Мера интегрирования $DNDa$ также предполагается инвариантной относительно репараметризаций. Интеграл по соответствующей калибровочной группе может быть выделен и включен в нормировочную постоянную методом Фаддеева — Попова [2]. Для этого сначала заметим, что произвольная положительная функция $N(t)$, $0 \leq t \leq 1$, единственным образом представляется в виде

$$N(t) = N_0 f(t), \tag{9}$$

где $N_0 = \int\limits_0^1 N(t)dt$ — репараметризационно-инвариантная постоянная, а $f(t)$ — положительная функция, такая что

$$\int\limits_0^1 f(t)dt = 1. \tag{10}$$

От функциональной переменной $N(t)$ мы переходим к переменным N_0, $f(t)$, определяя меру DN посредством равенства $DN = dN_0 Df$, где Df обозначает репараметризационно-инвариантную меру функционального интегрирования в пространстве функций $f(t)$, удовлетворяющих условию (10). Чтобы выделить интеграл по репараметризационной группе, мы, следуя методу Фаддева—Попова, вставляем в подынтегральное выражение «единицу» в виде функционального интеграла по этой группе

$$\Delta[f]\int \delta[f_\varepsilon - 1]D\varepsilon = 1, \tag{11}$$

где $\varepsilon(t)$ — функция, задающая репараметризацию времени, а $f_\varepsilon(t)$ есть функция $f(t)$, преобразованная в результате репараметризации $t' = \varepsilon(t)$. Выражение (11) определяет репараметризационно-инвариантный функционал $\Delta[f]$ и соответствует фиксации репараметризационной калибровки в виде $f(t) \equiv 1$. В результате стандартных выкладок получаем

$$\begin{aligned} U(T, a_1, a_0) &= C\int dN_0 Df Da D\varepsilon \exp\left(\frac{iS[N_0 f, a]}{\hbar}\right)\delta(N_0 - T)\Delta[f]\delta[f_\varepsilon - 1] = \\ &= C\int Df Da D\varepsilon \exp\left(\frac{iS[Tf, a]}{\hbar}\right)\Delta[f]\delta[f - 1] = \\ &= C\Delta[1]\int D\varepsilon \int Da \exp\left(\frac{iS[T, a]}{\hbar}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, функциональный интеграл по группе репараметризаций выделяется в виде нормировочного множителя.

После замены переменной времени $Tt \to t$ последнее выражение в (12) представляется в виде функционального интеграла по $a(t)$, $0 \leq t \leq T$, с граничными условиями $a(0) = a_0$, $a(T) = a_1$ и с действием Гильберта—Эйнштейна $S[T, a]$ в классе метрик

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)d\Omega\,, \tag{13}$$

$$0 \leq t \leq T\,.$$

Из теории интеграла по траекториям [4] хорошо известно, что соответствующая амплитуда удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial U(T, a_1, a_0)}{\partial T} = \hat{H} U(T, a_1, a_0), \tag{14}$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан, соответствующий действию $S[T, a]$ и действующий на аргумент a_1. Начальное условие для $U(T, a_1, a_0)$ таково, что для произвольной волновой функции $\psi(a)$

$$\int U(0, a_1, a_0)\psi(a_0)d\mu(a_0) = \psi(a_1), \tag{15}$$

где $d\mu(a)$ — мера интегрирования, при которой гамильтониан $\hat{H}$ самосопряжен. Таким образом, амплитуда $U(T, a_1, a_0)$ есть не что иное, как квантовый оператор эволюции в a-представлении. При этом волновая функция квазизамкнутого мира, движущегося вдоль некоторой мировой линии $X_*(\tau)$ большого материнского мира, удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(T, a)}{\partial T} = \hat{H}\psi(T, a) \tag{16}$$

по отношению к собственному времени T вдоль заданной мировой линии.

В операторном виде мы имеем для оператора эволюции

$$\hat{U}(T) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T\right), \tag{17}$$

и решение уравнения Шредингера (16) запишется в виде

$$\psi(T) = \hat{U}(T)\psi(0).$$

Далее, мы можем учесть квантование положения точки приклейки малого мира в большом мире, т. е. перейти к квантованию по координатам X. Это сводится к интегрированию выражения (17) по времениподобным траекториям, соединяющим точки p и q в большом мире. Напомним, что параметр T есть функционал (собственное время) от такой траектории. В результате мы получим запаздывающий пропагатор

$$\hat{G}(q, p) = \int_{(p)}^{(q)} DX \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}T[X]\right), \tag{18}$$

который отличается от пропагатора скалярной частицы лишь тем, что вместо параметра массы этой частицы стоит оператор H. Следовательно, в нулевом приближении по кривизне большого мира пропагатор G удовлетворяет уравнению

$$\hbar^2\nabla^\alpha\nabla_\alpha\hat{G}(X) - \hat{H}^2\hat{G}(X) = -i\delta(X, X_0), \tag{19}$$

где $X = X(q)$ — координаты конечной точки, $X_0 = X(p)$ — координаты начальной точки, а ∇_α обозначает ковариантную производную по координатам X^α. Соответствующая волновая функция $\Psi(X, a)$ удовлетворяет уравнению типа уравнения Клейна—Гордона, в котором вместо массы стоит оператор внутренней эволюции H:

$$\hbar^2\nabla^\alpha\nabla_\alpha\Psi(X, a) - \hat{H}^2\Psi(X, a) = 0. \tag{20}$$

Теперь мы получим оператор внутренней эволюции $\hat{H}$. Действие Гильберта—Эйнштейна с учетом возможного Λ-члена есть

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G_N}\int (R + 2\Lambda)\sqrt{-g}\,d^4x, \tag{21}$$

где G_N — ньютоновская гравитационная постоянная. Для метрик вида (13) это действие принимает вид

$$S = -\frac{3\pi c^4}{4G_N}\int\left(\frac{\dot{a}^2 a}{c^2} - a + \frac{\Lambda}{3}a^3\right)dt. \tag{22}$$

В действии (22) удобно произвести замену переменной $q = (\sqrt{\pi}\,a/l_P)^{3/2}$, времени $\tau = 3\sqrt{\pi}\,t/4t_P$ и космологической постоянной $\lambda = l_P^2\Lambda/3\pi$, где $l_P = \sqrt{\hbar G_N/c^3} \approx 1.6\cdot 10^{-33}$ — планковская длина, а $t_P = l_P/c \approx 5.4\cdot 10^{-44}$ с — планковское время. Тогда действие (22) примет вид

$$S = -\hbar\int\left(\frac{1}{4}\dot{g}^2 - q^{2/3} + \lambda q^2\right)d\tau. \tag{23}$$

Гамильтониан, соответствующий действию (23), имеет вид

$$\hat{H} = \hbar\left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^{2/3} + \lambda q^2\right]. \tag{24}$$

Мера интегрирования в q-пространстве тогда равна просто dq, а граничные условия, при которых оператор (24) самосопряжен, суть $\psi(0) = 0$ или $\psi'(0) = 0$. При этом уравнение (16) переходит в уравнение

$$i\,\frac{\partial\psi(\tau, q)}{\partial\tau} = \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} - q^{2/3} + \lambda q^2\right]\psi(\tau, q), \tag{25}$$

где $\tau = 3\sqrt{\pi}\,T/(4l_P)$ — безразмерное время.

Как мы увидим далее, при наличии ненулевой космологической постоянной квазизамкнутый мир может туннелировать сквозь классически запрещенную область своих размеров и образовать таким образом «дочернюю» вселенную больших размеров. Мы предполагаем, что такого рода событие будет каким-то образом сказываться в большом мире, не уточняя в этой работе его возможные последствия. В этой работе мы будем вычислять вероятность такого процесса туннелирования.

ВЕРОЯТНОСТЬ ТУННЕЛИРОВАНИЯ

Для получения конкретных решений уравнений (20) и/или (25) необходимо задать начальные условия на волновую функцию в координатном пространстве X или во времени τ, а также граничное условие в пространстве параметра q при $q = 0$. Граничное условие при $q = 0$ определяется условием сохранения полной вероятности, т. е. условием самосопряженности оператора H. В качестве начального условия мы положим, что волновая функция на некоторой начальной гиперповерхности в пространстве X, или при некотором начальном времени τ, локализована в области локального минимума $q = 0$ потенциала гамильтониана (24). Тогда задача, описываемая уравнением (20) или (25), формально совпадает с задачей о квазистационарных состояниях и туннелировании в область больших значений q в потенциале $V(q) = q^{2/3} - \lambda q^2$ (см. рис. 3). Теория решения такой задачи (теория Гамова) довольно хорошо разработана, и мы применим ее для рассматриваемого случая.

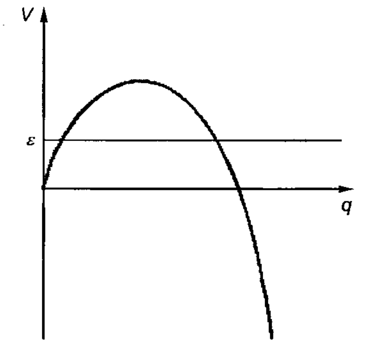

Рис. 3. Потенциал туннелирования

Как известно [1], чтобы получить вероятность туннелирования в задаче (25), необходимо найти формальные стационарные решения уравнения (25) и соответствующие им комплексные уровни энергии ε с граничным условием: при $q \to \infty$ волновая функция $\psi(\tau, q)$ имеет вид уходящей волны. Математическую формулировку этого условия см. в Приложении А.

С точки зрения уравнения (20) постановка задачи та же самая, только теперь собственное значение оператора H интерпретируется как комплексное значение массы, мнимая часть которого связана с собственным временем (движения «точки приклейки» во внешнем пространстве), в течение которого микровселенная туннелирует в область больших значений величины q.

Таким образом, необходимо решить уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} - q^{2/3} + \lambda q^2\right]\psi = \varepsilon\psi. \tag{26}$$

Его комплексные уровни имеют вид $\varepsilon = \varepsilon_0 - i\gamma/2$, где ε_0 и γ — вещественны и положительны. При этом среднее собственное время жизни соответствующего квазистационарного состояния равно $t_* \sim t_P/\gamma$.

Сделаем оценку для энергии нижайших уровней. Если параметр λ мал, то мы можем рассматривать слагаемое λq^2 как возмущение. Тогда в первом порядке по λ получаем, что нижайший уровень

$$\varepsilon_0 \sim 1. \tag{27}$$

Теперь оценим мнимую части энергии. С экспоненциальной точностью имеем [1]

$$\gamma \sim \exp\left(-2\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{q^{2/3} - \lambda q^2 - \varepsilon_0}\,dq\right), \tag{28}$$

где q_1 и q_2 — корни подынтегрального выражения.

В случае, когда параметр $\lambda \ll 1$, мы получаем следующее асимптотическое выражение (вывод см. в Приложении В)

$$\gamma \sim \exp\left(-\frac{1}{\lambda} + \frac{3\pi\varepsilon_0}{4\sqrt{\lambda}}\right) \tag{29}$$

и соответствующее собственное время жизни

$$t_* \sim t_P \exp\left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{3\pi\varepsilon_0}{4\sqrt{\lambda}}\right). \tag{30}$$

Полученными выше формулами можно пользоваться в первом приближении и в случае, когда космологическая «постоянная» достаточно медленно (адиабатически) изменяется со временем T. Адиабатичность означает, что вероятность возбуждения квазизамкнутого мира (т. е. вероятность его перехода на возбужденный квазидискретный уровень) мала. Подобная ситуация имеет место в сценарии космологического раздувания [3], когда эффективная космологическая постоянная зависит от значения потенциала некоторого скалярного поля φ и медленно убывает со временем. При этом условие вида (6) обеспечивает равенство космологических «постоянных», генерируемых скалярным полем, вдоль мировой линии приклейки в большом материнском мире и в квазизамкнутом мире. Если космологическая постоянная в микромире целиком генерируется за счет этого скалярного поля, то в этом случае формула (30) будет выражать текущее (на данный космологический момент) время жизни квазизамкнутого мира. Легко показать, что в рассматриваемых условиях время жизни квазизамкнутой микровселенной в одном из нижайших квазистационарных уровней больше времени расширения большой вселенной. Действительно, оценим значение космологической постоянной, при котором время жизни (30) совпадает с хаббловским временем T_{H} расширения вселенной в условиях, когда космологическая постоянная доминирует в плотности энергии. Мы имеем (H есть хаббловский параметр большой вселенной):

$$H^2 = c^2\Lambda/3 = \pi\lambda/t_{\text{P}}^2 , \tag{31}$$

$$T_{\text{H}} \equiv H^{-1} = t_{\text{P}}/\sqrt{\pi\lambda} ,$$

и условие $t_* \sim T_{\text{H}}$ дает

$$\lambda \sim e^{-2/\lambda}, \tag{32}$$

т. е. $\lambda \sim 1$, или $\Lambda \sim l_{\text{P}}^{-2}$. Это имеет место лишь в планковскую эпоху, когда вообще нельзя говорить о классической большой вселенной (состояние мира в эту эпоху существенно квантовое). С течением времени космологическая постоянная убывает, и время жизни (30) экспоненциально возрастает. В настоящую эпоху мы имеем $\lambda \sim 10^{-122}$, и время жизни (30) квазизамкнутых миров практически бесконечно.

Однако микровселенная может обладать своей собственной внутренней космологической постоянной Λ, которая не обязана совпадать с (эффективной) космологической постоянной большого материнского мира и также не обязана быть малой. В этом случае время жизни (30) зависит от этой космологической постоянной микромира как от свободного (неизвестного) параметра.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В каноническом подходе к квантованию гравитации имеются серьезные и до сих пор не преодоленные трудности, связанные с интерпретацией волновой функции вселенной. Проблема состоит в том, что в этом подходе волновая функция вселенной не зависит от времени и призвана описывать единственный в своем роде объект — нашу Вселенную, из-за чего возникают трудности с ее статистической и эволюционной интерпретацией.

В настоящей работе мы применяем теорию квантовой гравитации с некоторой модификацией не ко всей вселенной, а к ее малым частям, которые мы назвали квазизамкнутыми мирами и которые были описаны выше. Квазизамкнутый мир может рассматриваться как один из «атомов», из которых построено пространство-время нашей Вселенной [7, 13]. Таких «атомов», разумеется, должно быть очень много; при этом статистическая интерпретация их волновой функции ничем не отличается от обычной. Это обстоятельство выгодно отличает наш подход от обычных теорий, в которых волновая функция вселенной относится к одному-единственному объекту — нашей Вселенной, не зависит от какого бы то ни было времени и не имеет удовлетворительной интерпретации.

На основе построенной нами квантовой теории квазизамкнутого мира мы вычислили вероятность его туннелирования в единицу времени. Эта вероятность получилась экспоненциально малой для значений космологической постоянной, характерных для реального мира. Мы, таким образом, можем сделать вывод об устойчивости минивселенной по отношению к туннелированию с образованием большой классической вселенной.

Нетрудно выразить полученную вероятность подбарьерного туннелирования квазизамкнутого микромира (микровселенной) и его превращения в быстро расширяющийся макромир через начальный классический размер этого макромира, который равен

$$a_* = l_P/\sqrt{\pi\lambda}. \tag{33}$$

При условии $\lambda \ll 1$ будем иметь из (29)

$$\gamma \sim \exp\left(-\frac{\pi a_*^2}{l_P^2}\right), \tag{34}$$

и выражение для времени жизни микромира по отношению к процессу туннелирования и превращения в «дочерний» микромир

$$t_* \sim t_P \exp\left(\frac{\pi a_*^2}{l_P^2}\right). \tag{35}$$

Выражения (34) и (35) согласуются с оценками, проведенными ранее в работе [7].

Оценим вероятность того, что наша Вселенная на современном этапе ее эволюции уже стала «материнской» по крайней мере для одной «дочерней» вселенной, успевшей «отпочковаться» от нее в результате подбарьерного туннелирования. Если оценивать современный размер Вселенной как $l_0 \sim 10^{28}$ см, а характерный размер долгоживущих квазизамкнутых микромиров, составляющих микроструктуру пространства Вселенной, как $l \sim l_P \sim 10^{-33}$ см, то получим, что весь ансамбль таких планковских микромиров содержит их число порядка

$$N \sim (l_0/l_P)^3 \sim 10^{183}. \tag{36}$$

Следовательно, за время порядка современного хаббловского времени $H_0^{-1} \sim 10^{17}$ с от нашей Вселенной в среднем отпочковалось

$$N_0 \sim N(1 - e^{-1/(t_* H_0)}) \sim \frac{N}{t_* H_0} \sim$$

$$\sim \frac{N e^{-\pi a_*^2/l_P^2}}{t_P H_0} \sim 10^{244} \cdot e^{-\pi a_*^2/l_P^2} \sim e^{562 - \pi a_*^2/l_P^2} \tag{37}$$

дочерних вселенных. При вычислении мы предположили, что $N_0 \ll N$. Отсюда вытекает сильное ограничение на параметр λ: $\pi a_*^2/l_P^2 = 1/\lambda \gg \ln(t_P H_0)^{-1} = \ln 10^{61} \approx 140$. Можно, в принципе, поставить вопрос о возможных наблюдательных проявлениях присутствия расширяющихся «дочерних» вселенных «в окрестности» нашей Вселенной, но этот вопрос выходит за рамки данной работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ

В рассматриваемом случае неограниченного потенциала, для которого $\lim\limits_{q\to\infty} V(q) \neq \text{const}$, понятие уходящей волны не является вполне определенным. Чтобы устранить эту неоднозначность, мы поступим следующим образом. Будем вместо потенциала $V(q) = q^{2/3} - \lambda q^2$ рассматривать модифицированный потенциал (рис. 4; пунктиром показан исходный потенциал $V(q)$)

$$\widetilde{V}(q) = \begin{cases} 0, & 0 \le q \le q_1, \\ V(q), & q_1 \le q \le q_2, \\ V(q_2), & q \ge q_2, \end{cases}$$

который поточечно стремится к исходному при $q_1 \to 0$, $q_2 \to \infty$.

Для этого потенциала решаем уравнение (26)

$$\left[-\frac{d^2}{dq^2} + \widetilde{V}(q) - \varepsilon\right]\psi = 0$$

с соответствующим граничным условием в нуле и уходящей волной на бесконечности, находим энергию $\varepsilon(q_1, q_2)$ как функцию от q_1 и q_2 и переходим к пределу $q_1 \to 0$, $q_2 \to \infty$. Покажем теперь, что этот предел существует, и что

$$\lim_{q_2\to\infty} \operatorname{Im}\varepsilon(q_1, q_2) \neq 0. \tag{A1}$$

Общее решение уравнения (A1) в области $q > 0$, удовлетворяющее рассматриваемому граничному условию на бесконечности, имеет вид

$$\psi(q) = \begin{cases} Ae^{ikq} + Be^{-ikq}, & 0 \le q \le q_1, \\ Cy_1(q) + Dy_2(q), & q_1 \le q \le q_2, \\ e^{i\mu q}, & q \ge q_2. \end{cases}$$

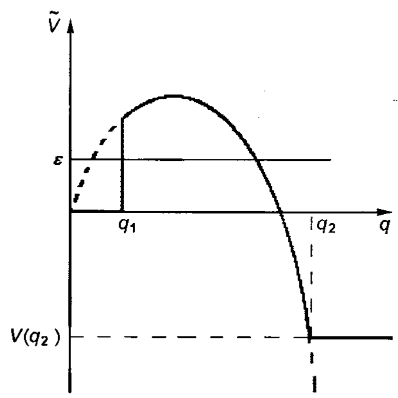

Рис. 4. Модифицированный потенциал туннелирования

Здесь $y_1(q)$ и $y_2(q)$ — два линейно независимых решения уравнения (А1) в области $q_1 \le q \le q_2$, $\mu^2 = \varepsilon - V(q_2)$, $k^2 = \varepsilon$. Из условий сшивки этих решений на границах области находим значения коэффициентов A и B:

$$A = \frac{e^{i\mu q_2}}{2ik\Delta(q_2)} (\mu_{22}\bar{k}_{11} - \mu_{12}\bar{k}_{21})e^{-ikq_1},$$

$$B = \frac{e^{i\mu q_2}}{2ik\Delta(q_2)} (\mu_{12}k_{21} - \mu_{22}k_{11})e^{ikq_1},$$

где мы ввели обозначения

$$\Delta(q) = y_2'(q)y_1(q) - y_1'(q)y_2(q) = \text{const} \neq 0;$$

$$k_{ij} = y_{ij}' - iky_{ij}, \qquad \bar{k}_{ij} = y_{ij}' + iky_{ij},$$

$$\mu_{ij} = y_{ij}' - i\mu y_{ij}, \qquad y_{ij} = y_i(q_j),$$

$$i, j = 1, 2.$$

В качестве граничного условия в нуле будем рассматривать условия

а) $\psi'(0) = 0$,

б) $\psi(0) = 0$.

Эти условия приводят к следующим уравнениям на ε:

$$k\,\mathrm{tg}(kq_1) = \frac{i\mu\Delta_1' - \Delta''}{i\mu\Delta - \Delta_2'} \quad \text{(в случае а)}, \tag{A2}$$

$$k\,\mathrm{ctg}(kq_1) = \frac{i\mu\Delta_1' - \Delta''}{i\mu\Delta - \Delta_2'} \quad \text{(в случае б)}, \tag{A3}$$

где

$$\Delta_1' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12} \\ y_{21}' & y_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2' = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}' \\ y_{21} & y_{22}' \end{vmatrix},$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}, \Delta'' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}. \tag{A4}$$

В качестве двух линейно независимых решений $y_1(q)$ и $y_2(q)$ выберем функции

$$y_1(q) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}} \cos\left[\int_0^q \sigma(q')dq'\right],$$

$$y_2(q) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}} \sin\left[\int_0^q \sigma(q')dq'\right],$$

где $\sigma(q)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sigma^2(q) = \varepsilon - V(q) + \sqrt{\sigma(q)}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}}\right)''. \tag{A5}$$

Возьмем решение уравнения (А5), которое при $q \to \infty$ стремится к $\varepsilon - V(q)$:

$$\sigma^2(q) = \varepsilon - V(q) + O(q^{-2}).$$

При больших значениях q_2 имеем

$$y_{12} = \sigma_2^{-1}\cos\xi_2, \qquad y_{22} = \sigma_2^{-1}\sin\xi_2,$$

$$y'_{12} = -\mu y_{22}[1 + O(q_2^{-1})/\mu], \qquad y'_{22} = \mu y_{12}[1 + O(q_2^{-1})/\mu],$$

где $\xi_2 = \int_0^{q_2} \sigma(q')dq'$, $\sigma_2^2 = \mu^2 + O(q_2^{-2})$. Подставляя эти выражения в (А2) и (А3) и переходя к пределу при $q_2 \to \infty$, получаем

$$k\mathrm{ctg}(kq_1) = \frac{y'_{11} + iy'_{21}}{y_{11} + iy_{21}} \quad \text{(в случае а)}, \tag{А6}$$

$$k\mathrm{tg}(kq_1) = \frac{y'_{11} + iy'_{21}}{y_{11} + iy_{21}} \quad \text{(в случае б)}. \tag{А7}$$

Как нетрудно видеть, уравнения (А6) и (А7) могут иметь решения лишь при комплексных значениях $k = \sqrt{\varepsilon}$. Эти уравнения представляют собой условия сшивки логарифмических производных двух функций ψ_1 и ψ_2 в точке q_1:

$$(\ln\psi_1)' = (\ln\psi_2)',$$

где

$$\psi_1 = \begin{cases} a\cos kq & \text{(в случае а)}, \\ a\sin kq & \text{(в случае б)}. \end{cases} \tag{А8}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}} \exp\left(i \int_0^q \sigma(q')dq' \right).$$

При больших значениях q функция $\psi_2(q)$ имеет асимптотику, совпадающую с уходящей волной в приближении ВКБ.

Несколько отвлекаясь от рассматриваемого потенциала, интересно отметить, что в случае потенциала вида ступеньки (рис. 5)

$$V(q) = \begin{cases} 0, & 0 \le q < q_1, \\ V_1, & q_1 \le q \le q_2, \\ -V_2, & q > q_2 \end{cases}$$

при $V_2 \to \infty$ находим, что $\mathrm{Im}\varepsilon \to 0$ (т. е. $\tau \to \infty$!). Действительно, в этом

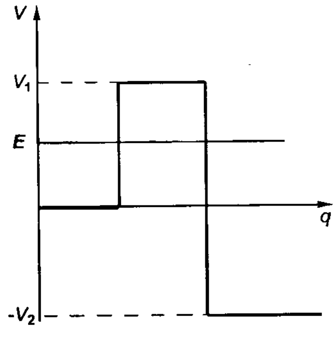

Рис. 5. Потенциал вида ступеньки

случае

$$y_1(q) = e^{\eta q}, \qquad y_2(q) = e^{-\eta q},$$
$$\eta = \sqrt{V_1 - \varepsilon}, \qquad \mu = \sqrt{V_2 + \varepsilon},$$
$$\Delta_1' = -\Delta_2' = 2\eta \operatorname{ch}[\eta(q_2 - q_1)],$$
$$\Delta'' = -\eta^2\Delta = 2\eta^2 \operatorname{sh}[\eta(q_2 - q_1)].$$

Таким образом, определители Δ не зависят от V_2, и следовательно, переходя к пределу $V_2 \to \infty$, получаем

$$\frac{i\mu\Delta_1' - \Delta''}{i\mu\Delta - \Delta_2'} \longrightarrow \frac{\Delta_1'}{\Delta} = -\eta \operatorname{cth}[\eta(q_2 - q_1)], \tag{A9}$$

откуда следует $\mathrm{Im}\varepsilon \to 0$. Подобное интересное поведение мнимой части энергии можно физически пояснить следующим образом. Справа от точки q_2, т. е. при $q > q_2$, длина волны волновой функции с любой фиксированной энергией стремится к нулю при $V_2 \to \infty$. Это значит, что в этой области частица становится классической в рассматриваемом пределе. Классическая же частица упруго отражается справа от барьера и не способна туннелировать под ним в область потенциальной ямы $0 < q < q_1$. Следовательно, полюса амплитуды рассеяния такой частицы в энергетическом (импульсном) пространстве не должны иметь мнимой части, что мы и обнаруживаем.

ПРИЛОЖЕНИЕ B. МНИМАЯ ЧАСТЬ ЭНЕРГИИ

Найдем ассимптотический вид выражения (28) при $\lambda \to 0$. Имеем

$$I = 2\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{q^{2/3} - \lambda q^2 - \varepsilon}\, dq = 3\int_{a_1}^{a_2} \sqrt{a(a - \lambda a^3 - \varepsilon)}\, da =$$
$$= 3\sqrt{\lambda}\, l^3 \int_0^1 \sqrt{t(1-t)(1+t+3\zeta)(t+\zeta)}\, dt,$$

где

$$a_1 = \varepsilon + O(\lambda),$$
$$a_2 = 1/\sqrt{\lambda} - \varepsilon/2 + O(\sqrt{\lambda}),\ l = a_2 - a_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(1 - 3\sqrt{\lambda}\varepsilon/2 + O(\lambda)),$$
$$\zeta = \frac{a_1}{l} = \sqrt{\lambda}\varepsilon + O(\lambda).$$

Разобьем этот интеграл на два слагаемых:

$$I = 3\sqrt{\lambda}\, l^3 \left[\int_0^{\zeta} + \int_{\zeta}^{1}\right] = I_1 + I_2\,.$$

Используя теорему о среднем, для первого интеграла получаем оценку

$$I_1 = 3\sqrt{\lambda}\, l^3 (1 + O(\zeta)) \int_0^{\zeta} \sqrt{t(t+\zeta)}\, dt = O(1).$$

Во втором слагаемом разложим подынтегральное выражение в ряд по ζ:

$$I_2 = 3\sqrt{\lambda}\, l^3 \int_\zeta^1 t\sqrt{1-t^2}\left[1 + \frac{1+4t}{2t(1+t)}\zeta + O(\zeta^2)\right]dt =$$
$$= \sqrt{\lambda}\, l^3 [1 + (9/2 - 3\pi/4)\zeta + O(\zeta^2)].$$

Поскольку $\sqrt{\lambda}\, l^3 = [1 - 9\sqrt{\lambda}\varepsilon / 2 + O(\lambda)]/\lambda$, то

$$I = \frac{1}{\lambda} - \frac{3\pi\varepsilon}{4\sqrt{\lambda}} + O(1),$$

и следовательно, $\gamma \sim e^{-1/\lambda + 3\pi\varepsilon/4\sqrt{\lambda}}$.

Данная работа поддержана Программой фундаментальных исследований и Программой «Космомикрофизика» Отделения физики и астрономии Национальной академии наук Украины.

1. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — М.: Наука, 1971.—544 с.
2. *Коноплева Н. П., Попов В. Н.* Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.—240 с.
3. *Линде А. Д.* Физика элементарных частиц и инфляционная космология. — М.: Наука, 1990.—280 с.
4. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по путям. — М.: Мир, 1968.
5. *Фомин П. И.* Гравитационная неустойчивость вакуума и космологическая проблема. — Киев, 1973.—(Препринт / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-73-137Р).
6. *Фомин П. И.* Гравитационная неустойчивость вакуума и космологическая проблема // ДАН УССР Сер. А.—1975.—№ 9.—С. 831—835.
7. *Фомин П. И.* О кристаллоподобной структуре физического вакуума на планковских расстояниях // Проблемы Физической Кинетики и Физики Твердого Тела. — Киев: Наук. думка, 1990.—С. 387—398.
8. *Фомин П. И., Штанов Ю. В., Барабаш О. В.* Квазизамкнутые миры и квантовое рождение вселенной // ДНАН України.—2000.—№ 10.—С. 80—86.
9. *Bohm D., Hiley B. J.* The undivided universe: An ontological interpretation of quantum theory. — London, New York: Routledge, 1993.
10. *De Witt B. S.* Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev.—1967.—160.—P. 1113.
11. *De Witt B. S., Graham N.* The many-worlds interpretation of quantum mechanics. — Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press, 1973.
12. *Everett H.* «Relative state» formulation of quantum mechanics // Rev. Mod. Phys.—1957.—29.—P. 454.
13. *Fomin P. I.* «Zero cosmological constant and Planck scales phenomenology // Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity, May 25—29, Moscow / Ed. by M. A. Markov. — World Scientific, Singapore, 1988.—P. 813.
14. *Fomin P. I., Kuzmichev V. V.* Gravitational fields of massive and massless axial-symmetric quadrupoles in general relativity // Phys. Rev. D.—1994.—49, N 4.—P. 1854—1860.
15. *Holland P.* The Quantum Theory of Motion. — Cambridge: Univ. Press, 1993.
16. *Shtanov Yu. V.* Pilot wave quantum cosmology // Phys. Rev. D.—1996.—54, N 2.—P. 2564—2570.
17. *Wheeler J. A.* Geometrodynamics and the issue of the final state // Relativity, Groups, and Topology / Eds C. De Witt, B. S. De Witt. — New York: Gordon and Breach, 1964.—P. 317—520.
18. *Wheeler J. A.* Superspace and the nature of quantum geometrodynamics // Batelle Rencontres / Eds C. De Witt, J. A. Wheeler. — New York: Benjamin, 1968.—P. 242—307.

Поступила в редакцию 30.09.08