УДК 62-50, 519.7

©2013. **В.Ф. Щербак**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассматривается задача нахождения асимптотических оценок моментов инерции твердого тела по информации о его угловой скорости. Предлагается схема построения асимптотического идентификатора для оценки неизвестных параметров. Используется метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет находить конечные соотношения между переменными, которые на траекториях системы определяют искомые неизвестные как функции от известных величин.

Ключевые слова: *инвариантные соотношения, параметрическая идентификация, моменты инерции, твердое тело с неподвижной точкой.*

1. Параметрическая идентификация. Для многих практических приложений задач управления динамическими системами характерна ситуация, когда часть параметров математической модели исследуемого объекта неизвестна. В таких случаях возникает задача идентификации, которая состоит в определении неизвестных параметров по значениям выхода – известной информации о движении. В данной статье для решения задачи определения (оценивания) постоянных параметров используется метод синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения [1, 2]. Применение метода синтеза дополнительных инвариантных соотношений в задачах параметрической идентификации является естественным, поскольку метод позволяет получать конечные соотношения, связывающие на траекториях расширенной системы неизвестные параметры и известные величины. Задача идентификации фактически рассматривается как задача наблюдения части компонент фазового вектора. При этом вспомогательные дифференциальные уравнения, которые участвуют в процессе синтеза дополнительной информации, формируют идентификатор для неизвестных параметров.

Запишем уравнения Эйлера для свободного твердого тела, вращающегося вокруг своего центра масс, не накладывая при этом каких-либо ограничений на распределение масс в теле. Задача идентификации состоит в определении (оценке) его главных центральных моментов инерции A_1, A_2, A_3 по результатам измерения вектора угловой скорости $\omega(t) = \big(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)\big)$ тела. Введем вместо моментов инерции безразмерные параметры

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \qquad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \qquad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}.$$

Тогда уравнения Эйлера запишутся в виде

$$\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3, \quad \dot\omega_2 = a_2\omega_3\omega_1, \quad \dot\omega_3 = a_3\omega_1\omega_2. \tag{1}$$

В работе [3] с использованием метода синтеза инвариантных соотношений решена задача идентификации параметра, характеризующего распределение масс в осесимметричном твердом теле. Далее будем считать, что твердое тело не является осесимметричным, т. е. никакие два момента инерции A_1, A_2, A_3 не равны между собой. Следовательно, параметры a_1, a_2, a_3 отличны от нуля.

Задача. *Найти асимптотически точные оценки постоянных параметров a_1, a_2, a_3 системы дифференциальных уравнений (1) по результатам измерения вектора угловой скорости $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$.*

Достаточные условия локальной идентифицируемости [4] системы (1) в момент времени $t \in T$ определяются невырожденностью матрицы

$$A = \frac{\partial(\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)}.$$

Поскольку $\det A = {\omega_1}^2{\omega_2}^2{\omega_3}^2$, то достаточным условием идентифицируемости является неравенство нулю всех компонент вектора угловой скорости. Предлагаемый метод предназначен для получения асимптотических оценок неизвестных параметров и для его реализации необходимо выполнение этих условий для всех моментов времени из некоторого полуинтервала $T = [0, t_{\text{fin}})$. Далее будем предполагать выполненным более сильное условие идентифицируемости на полуинтервале оценивания. А именно, потребуем чтобы в процессе движения тела произведение наблюдаемых значений угловой скорости было отделимо от нуля: т. е. пусть существует достаточно малая постоянная $w_{\min} > 0$ такая, что

$$\forall\, t \in T: \ |\omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t)| \geq \ w_{\min}. \tag{2}$$

В общем случае, при движении твердого тела естественным является нарушение условия (2). Тогда, если это произведение не равно тождественно нулю, величина $w_{\min}$ всегда может быть подобрана так, что в процессе движения условие (2) выполнено для всех моментов времени t из некоторого интервала $T' = [t_0, t_1] \subset T$. Применяя описанный ниже способ получения асимптотических оценок параметров на последовательности таких интервалов T', получим схему итерационного решения задачи идентификации.

2. Синтез инвариантных соотношений. Согласно схеме синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения и идентификации [1, 3], дополним систему (1) уравнениями ее идентификатора – системой дифференциальных уравнений для компонент вектор-функции $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, используемой далее для получения оценок искомых параметров:

$$\dot{\alpha}_i = u_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Правые части системы (3) – управления $u_i(\alpha, \omega)$ – пока неопределены и будут использованы далее для синтеза инвариантных соотношений расширенной системы дифференциальных уравнений (1), (3). При этом функции

$u_i(\alpha,\omega)$, $i=1,2,3$, должны быть допустимыми, т. е. такими, при которых решения системы (3) продолжимы вправо на весь интервал оценивания.

Если аналитический вид правых частей системы дифференциальных уравнений (3) будет задан допустимыми функциями, то, выбрав некоторое начальное состояние $\alpha_1(0),\alpha_2(0),\alpha_3(0)$, в результате решения задачи Коши найдем значения функций $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t)$. Далее это решение будем относить к классу известных величин.

Основная идея метода состоит в построении с помощью управлений $u_i(\alpha,\omega)$, $i=1,2,3$, инвариантных соотношений для расширенной системы уравнений (1), (3), которые связывают искомые параметры a_1,a_2,a_3 и известные векторы $\omega(t),\alpha(t)$. Будем искать эти соотношения в виде

$$\alpha_i - a_i - \Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = 0, \quad i=1,2,3, \tag{4}$$

где функции $\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ также пока не определены.

Формулы (4) являются тремя конечными соотношениями, которые зависят от шести переменных $\alpha(t),\omega(t)$. Поэтому они не могут быть выполнены для всех решений расширенной системы (1), (3). Меру несоответствия будем характеризовать переменными η_1,η_2,η_3, которые определим формулами

$$\eta_i = \alpha_i - a_i - \Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad i=1,2,3. \tag{5}$$

Утверждение. *Правые части системы (3) – управления $u_i(\alpha,\omega)$ – всегда могут быть выбраны таким образом, что для любых дифференцируемых функций $\Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $i=1,2,3$, соотношения (4) становятся инвариантными соотношениями для расширенной системы дифференциальных уравнений (1),(3).*

Действительно, перейдем в системе (3) по формулам (5) от переменных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ к переменным η_1,η_2,η_3. Подставляя (5) в (3), получаем с учетом (1) систему дифференциальных уравнений для отклонений η_1,η_2,η_3 :

$$\begin{aligned}
\dot\eta_1 &= u_1 - \Phi_{11}(\Delta_1-\eta_1)\omega_2\omega_3 - \Phi_{12}(\Delta_2-\eta_2)\omega_3\omega_1 - \Phi_{13}(\Delta_3-\eta_3)\omega_1\omega_2,\\
\dot\eta_2 &= u_2 - \Phi_{21}(\Delta_1-\eta_1)\omega_2\omega_3 - \Phi_{22}(\Delta_2-\eta_2)\omega_3\omega_1 - \Phi_{23}(\Delta_3-\eta_3)\omega_1\omega_2,\\
\dot\eta_3 &= u_3 - \Phi_{31}(\Delta_1-\eta_1)\omega_2\omega_3 - \Phi_{32}(\Delta_2-\eta_2)\omega_3\omega_1 - \Phi_{33}(\Delta_3-\eta_3)\omega_1\omega_2,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\Delta_i = \alpha_i - \Phi_i$, $\Phi_{ij} = \dfrac{\partial \Phi_i(\omega_1,\omega_2,\omega_3)}{\partial \omega_j}$, $i,j=1,2,3.$

Для доказательства утверждения достаточно выбрать управления $u_i(\alpha,\omega)$, $i=1,2,3$, из условий, гарантирующих существование тривиального решения $\eta_1=\eta_2=\eta_3=0$ в преобразованной системе (6). Выберем эти управления таким образом, чтобы система (6) стала однородной. Пусть

$$\begin{aligned}
u_1 &= \Phi_{11}\Delta_1\omega_2\omega_3 + \Phi_{12}\Delta_2\omega_3\omega_1 + \Phi_{13}\Delta_3\omega_1\omega_2,\\
u_2 &= \Phi_{21}\Delta_1\omega_2\omega_3 + \Phi_{22}\Delta_2\omega_3\omega_1 + \Phi_{23}\Delta_3\omega_1\omega_2,\\
u_3 &= \Phi_{31}\Delta_1\omega_2\omega_3 + \Phi_{32}\Delta_2\omega_3\omega_1 + \Phi_{33}\Delta_3\omega_1\omega_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Тогда уравнения (6) для переменных η_1, η_2, η_3 принимают вид

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= \Phi_{11}\omega_2\omega_3\eta_1 + \Phi_{12}\omega_3\omega_1\eta_2 + \Phi_{13}\omega_1\omega_2\eta_3,\\
\dot{\eta}_2 &= \Phi_{21}\omega_2\omega_3\eta_1 + \Phi_{22}\omega_3\omega_1\eta_2 + \Phi_{23}\omega_1\omega_2\eta_3,\\
\dot{\eta}_3 &= \Phi_{31}\omega_2\omega_3\eta_1 + \Phi_{32}\omega_3\omega_1\eta_2 + \Phi_{33}\omega_1\omega_2\eta_3.
\end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) является линейной однородной системой дифференциальных уравнений, а значит, допускает тривиальное решение $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$. Утверждение доказано.

3. Асимптотическое оценивание. Перейдем к оценке неизвестных параметров a_1, a_2, a_3. Пусть выбраны некоторые дифференцируемые функции $\Phi_i(\omega_1,\, \omega_2,\, \omega_3)$, $\;i = 1, 2, 3$. Тогда по формулам (7) определяем правые части системы дифференциальных уравнений (3). Решая для полученной системы задачу Коши с некоторыми начальными условиями $\alpha_i(0)$, находим функции времени $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

В результате получаем, что две групы слагаемых в соотношениях (5), а именно: переменные $\alpha_i(t)$ и функции $\Phi_i(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$, $i = 1, 2, 3$, становятся известными. Неопределенными в формулах (5), кроме искомых параметров a_1, a_2, a_3, остаются только лишь слагаемые $\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)$. И хотя коэффициенты правых частей линейной системы (8) полностью определены, значения этих функций неизвестны, так как начальные условия $\eta_1(0), \eta_2(0), \eta_3(0)$ в общем случае не обязаны удовлетворять равенствам (5).

Чтобы соотношения (5) можно было использовать для оценки параметров a_1, a_2, a_3, достаточно обеспечить выполнение следующего условия: тривиальное решение системы (8) должно обладать свойством глобальной асимптотической устойчивости, т. е. для любых начальных условий $\eta_1(0), \eta_2(0), \eta_3(0)$

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для выполнения этого требования в нашем распоряжении остается выбор функций $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $i = 1, 2, 3$. Выберем эти функции в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{11}\omega_1^2 + c_{12}\omega_2^2 + c_{13}\omega_3^2),\\
\Phi_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{21}\omega_1^2 + c_{22}\omega_2^2 + c_{23}\omega_3^2),\\
\Phi_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{31}\omega_1^2 + c_{32}\omega_2^2 + c_{33}\omega_3^2),
\end{aligned} \tag{9}$$

где постоянные c_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, являются элементами квадратной матрицы C, все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения которой имеют отрицательные действительные части. Для таких функций система дифференциальных уравнений (8) принимает вид

$$\begin{aligned}
\dot{\eta}_1 &= |\omega_1\omega_2\omega_3|(c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2 + c_{13}\eta_3),\\
\dot{\eta}_2 &= |\omega_1\omega_2\omega_3|(c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2 + c_{23}\eta_3),\\
\dot{\eta}_3 &= |\omega_1\omega_2\omega_3|(c_{31}\eta_1 + c_{32}\eta_2 + c_{33}\eta_3).
\end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку величина $|\omega_1\omega_2\omega_3|$ является скалярным множителем при правых частях системы дифференциальных уравнений (10), то траектории этой системы при $|\omega_1\omega_2\omega_3| \neq 0$ совпадают с траекториями линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered}\dot{\xi_1} = c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + c_{13}\xi_3, \qquad \dot{\xi_2} = c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + c_{23}\xi_3, \\ \dot{\xi_3} = c_{31}\xi_1 + c_{32}\xi_2 + c_{33}\xi_3.\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $\lambda_{\min} \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ – корень характеристического уравнения для уравнения (11) с минимальной по модулю действительной частью. Тогда решения (11) экспоненциально стремятся к нулю с показателем затухания $\lambda_{\min}$, т. е. имеет место оценка $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = O(e^{\lambda_{\min} t})$.

С учетом предположения (2) такой же характер имеют и траектории системы (10). Учитывая множитель $|\omega_1\omega_2\omega_3|$ и его оценку снизу величиной $w_{\min}$, можем утверждать, что

$$\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2} = O(e^{w_{\min}\lambda_{\min} t}).$$

В итоге получили, что невязка η_1, η_2, η_3 в соотношениях (5) экспоненциально убывает к нулю, следовательно, эти равенства с точностью $O(e^{w_{\min}\lambda_{\min} t})$ определяют оценки параметров a_1, a_2, a_3 по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1(t) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{11}\omega_1^2 + c_{12}\omega_2^2 + c_{13}\omega_3^2), \\ a_2 &= \alpha_2(t) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{21}\omega_1^2 + c_{22}\omega_2^2 + c_{23}\omega_3^2), \\ a_3 &= \alpha_3(t) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)(c_{31}\omega_1^2 + c_{32}\omega_2^2 + c_{33}\omega_3^2). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\alpha_i(t),\ i = 1, 2, 3,$ – любое частное решение системы дифференциальных уравнений (3), правые части которых определены формулами (7).

4. Численное моделирование. Для получения известного сигнала (фазового вектора идентифицируемой системы) при моделировании предлагаемого способа идентификации решалась задача Коши для системы дифференциальных уравнений (1) при $A_1 = 0.6,\ A_2 = 1.54,\ A_3 = 1.0$. В качестве матрицы C выбрана матрица $C = -\lambda E$, где E – единичная матрица, λ – некоторая положительная постоянная. В этом случае система дифференциальных уравнений в отклонениях (10) декомпозируются на три однотипных уравнения

$$\dot{\eta_i} = -\lambda|\omega_1\omega_2\omega_3|\eta_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{13}$$

а оценка параметров проводится по формулам (12):

$$a_i = \alpha_i(t) + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)\,\omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Последние соотношения определяют асимптотические оценки неизвестных параметров, и условием успешного решения задачи идентификации с заданной точностью $\varepsilon > 0$ будет условие

$$\forall t \in T = [t^*, t^* + h], \quad |\eta_i(t)| \le \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Иными словами, задачу идентификации будем считать решенной, если правые части (14) не меняются более чем на 2ε в течение некоторого интервала времени T. В то же время эти правые части заданы функциями, которые являются разрывными в моменты времени, когда нарушаются условия идентифицируемости. В соответствии с предположением (2) процедура идентификации должна быть проведена на интервале, где функции (14) являются непрерывными.

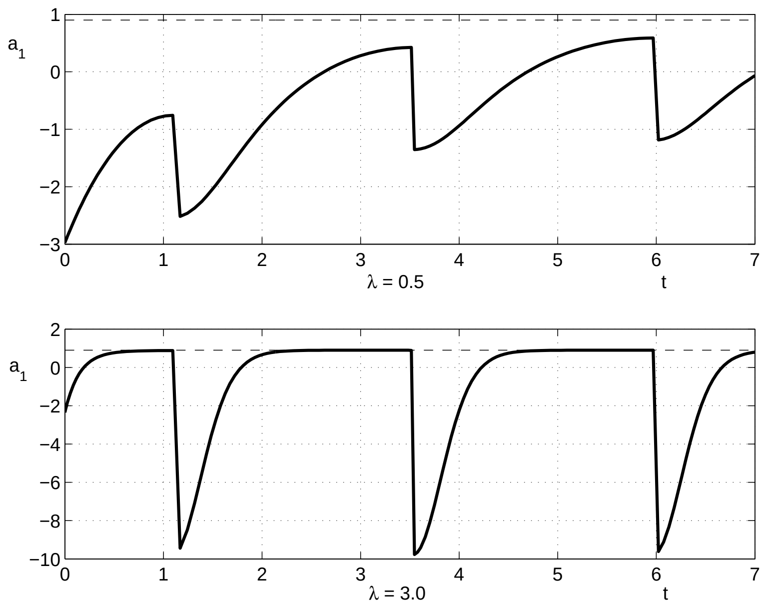

Рис. 1

В общем случае вопрос о том, возможно ли сделать отклонения $\eta_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, достаточно малыми на каком-либо интервале непрерывности правой части (14), требует отдельного рассмотрения, поскольку и величина этого интервала, и величина разрыва функции зависят от наблюдаемого решения системы дифференциальных уравнений (1).

В качестве дополнительного параметра, регулирующего скорость сходимости, может быть использован показатель λ. В частности, на рис. 1 приведены результаты оценки параметра $a_1 = 0.9$ при $\lambda = 0.5$ и $\lambda = 3.0$ соответственно. И если в первом случае величину a_1 определить не удается, то во втором случае критерий, указывающий на то, что правая часть формулы (14) является постоянной на некотором временном интервале, означает успешную идентификацию искомого параметра.

Чтобы избежать особенностей, связанных с разрывным характером функции оценивания, внесем изменение в алгоритм идентификации. Оценка параметров по формулам (14) задана в виде суммы двух слагаемых, первое из которых является решением системы дифференциальных уравнений (3) с произвольным начальным условием α_0, а второе задано разрывной функцией. Поскольку значения компонент вектора $\omega(t)$ являются известными, то величины разрывов $\dfrac{\lambda}{2}\,\mathrm{sgn}(\omega_1\omega_2\omega_3)\omega_i^2,\ i = 1,2,3,$ могут быть вычислены. Изменим в момент t^* смены знака величины $\omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t)$ начальные условия $\alpha(t^*)$ для вспомогательной системы дифференциальных уравнений (3) на величину разрыва, взятую с противоположным знаком. В результате получаем непрерывную функцию оценивания. Проведенное моделирование показало, что предлагаемая схема является работоспособной для достаточно широкого диапазона значений параметров и начальных условий исходной и вспомогательной систем.

1. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2003. – **8**. – С. 229–235.
2. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // PAMM. – 2004. – **4**. – P. 139–140.
3. *Щербак В.Ф.* Инвариантные соотношения в задаче идентификации механических систем // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 185–191.
4. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.

V.F. Shcherbak

An identification of the inertia moments of a rigid body

The problem of asymptotic estimation of inertia moments of a rigid body using angular velocity data is considered. A nonlinear identification scheme based on the method of invariant relation synthesis is proposed. The method allows to find the functional relations between the state variables and determine at the trajectories of the system the values of these variables as functions of known parameters.

Keywords: *invariant relation, parametric identification, moments of inertia, rigid body with fixed point.*

В.Ф. Щербак

Ідентифікація моментів інерції твердого тіла

Розглядається задача знаходження асимптотичних оцінок моментів інерції твердого тіла за інформацією про його кутову швидкість. Пропонується схема побудови асимптотичного ідентифікатора для оцінки невідомих параметрів. Використовується метод синтезу інваріантних співвідношень, розроблений для розв'язання обернених задач теорії керування. Метод дозволяє знаходити функціональні співвідношення між змінними, які на траєкторіях системи визначають невідомі як функції від відомих величин.

Ключові слова: *інваріантні співвідношення, параметрична ідентифікація, моменти інерції, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 15.05.13
shvf@iamm.ac.donetsk.ua