УДК 531.38

©2013. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

В задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром, получены аксоиды для двух вариантов движения системы тел. В этом движении ось неголономности и угловая скорость одного из тел сохраняют направление в неподвижном пространстве.

Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, неголономный шарнир, подвижный и неподвижный аксоиды.*

Конструкция неголономного шарнира предложена в [1]. Постановка задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром, дана в [2]. В этой задаче получено шесть решений в работах [2–7]. Алгоритм построения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы указан в [8].

Здесь для решения [4] получены аксоиды для двух возможных вариантов движения рассматриваемой системы тел.

1. Исходные соотношения. Приведем решение из работы [4]:

$$\omega_1(\theta) = 2\varkappa(\theta), \tag{1}$$

$$\omega_2(\theta) = \frac{(1+b_*)n(\theta)\cos\theta}{A\sin\theta}, \tag{2}$$

$$\omega_3(\theta) = -\frac{(1+b_*)n(\theta)\cos^2\theta}{A\sin^2\theta}, \tag{3}$$

$$n(\theta) = \frac{CI}{\sqrt{1+b_*\cos^2\theta}}, \tag{4}$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \tag{5}$$

$$\Omega_3(\theta) = -\frac{(1+b_*)n(\theta)\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \tag{6}$$

$$n_0(\theta) = b_* n(\theta)\cos\theta, \tag{7}$$

$$2A\varkappa(\theta)\sin\theta = \sqrt{g^2\sin^2\theta - C^2I^2(1+b_*\cos^2\theta)}. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \dfrac{n}{I}\mathbf{e}_3$ – угловая скорость тела S в полуподвижном базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$; $\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + \dfrac{n_0}{I_0}\mathbf{e}_3^0$ – угловая скорость тела S_0 в полуподвижном базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$. Неизменно связанные с телами базисы $O\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$

и $O\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$ вращаются вокруг $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_3^0$ с угловыми скоростями $\dot\varphi$ и $\dot\Phi$; O – точка пересечения $O\mathbf{e}_3$ и $O\mathbf{e}_3^0$ – осей динамической симметрии тел. Решение получено при условии $N = \dfrac{mm_0}{m+m_0} ll_0 = 0$, т. е. центр масс одного из тел совпадает с точкой O.

Запишем N в виде $(m+m_0)aa_0$, где $a = \dfrac{ml}{m+m_0}$, $a_0 = \dfrac{m_0 l_0}{m+m_0}$. Тогда при $N = 0$ необходимо рассматривать два варианта:

$$a_0 = 0 \tag{9}$$

либо

$$a = 0. \tag{10}$$

2. Первый вариант. Пусть выполнено ограничение (9). В дальнейшем понадобятся векторы $\mathbf{r} = \mathbf{C_*O}$ (C_* – центр масс системы тел) и скорость $\mathbf{v}$ точки O, которые запишем при $a_0 = 0$:

$$\mathbf{r} = -a\mathbf{e}_3, \tag{11}$$

$$\mathbf{v} = a(-\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2). \tag{12}$$

Отметим, что

$$\dot{\mathbf{e}}_3^0 = -\Omega_2\mathbf{e}_1 + \Omega_1\mathbf{e}_2^0 \tag{13}$$

при условиях (5) равна нулю, поэтому вектор $\mathbf{e}_3^0$ сохраняет направление и в теле, и в пространстве. Следовательно, вектор угловой скорости тела S_0

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \frac{n_0}{I_0}\mathbf{e}_3^0 \tag{14}$$

сохраняет направление в пространстве.

В этой задаче и момент количества движения системы [2]

$$\mathbf{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$$

сохраняет направление в пространстве. Запишем компоненты этого вектора при условиях (5) и ограничении (9):

$$\begin{gathered} G_1(\theta) = A\omega_1(\theta), \qquad G_2(\theta) = A\omega_2(\theta) - n_0(\theta)\sin\theta, \\ G_3(\theta) = n(\theta) + n_0(\theta)\cos\theta. \end{gathered} \tag{15}$$

Скалярное произведение вектора $\mathbf{g}$ и $\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2\sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta$

$$\mathbf{g}\cdot\mathbf{e}_3^0 = 0, \tag{16}$$

т. е. векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{e}_3^0$ перпендикулярны.

Так как имеем два вектора, сохраняющих направление в пространстве, можем ввести неподвижный базис $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{g}}{g}, \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{g}}{g}, \qquad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3^0. \tag{17}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \dfrac{n}{I}\mathbf{e}_3$ тела S в неподвижном базисе

$$\boldsymbol{\omega}_* = p_1\mathbf{E}_1 + p_2\mathbf{E}_2 + p_3\mathbf{E}_3 \tag{18}$$

имеет компоненты

$$p_1 = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{g})/g, \qquad p_2 = \boldsymbol{\omega}_* \cdot (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{g})/g, \qquad p_3 = \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}_3^0, \tag{19}$$

которые находим, подставив (1), (2), (4), (15), (16) в (19):

$$p_1 = \frac{g}{A}\big(\cos^2\varepsilon + \frac{A}{I}\sin^2\varepsilon\big),$$

$$p_2(\theta) = \big(\frac{A}{I} - 1\big)\frac{g\sin\varepsilon}{A}\sqrt{\frac{\sin^2\theta - \sin^2\varepsilon(1 + b_*\cos^2\theta)}{1 + b_*\cos^2\theta}}, \tag{20}$$

$$p_3(\theta) = \big(\frac{A}{I} - 1 - b_*\big)\frac{g}{A}\frac{\sin\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{1 + b_*\cos^2\theta}},$$

здесь вместо постоянной C введен параметр ε:

$$\sin\varepsilon = CI/g. \tag{21}$$

Для неголономного шарнира ось $\mathbf{E}_3$ является осью неголономности, поэтому $(\boldsymbol{\omega}_* - \boldsymbol{\Omega}_*) \cdot \mathbf{E}_3 = 0$; из этого равенства вследствие (2), (4), (7), (19), (21) и $\dfrac{A}{I_0}b_* = \dfrac{A}{I} - 1 - b_*$ получаем $p_3(\theta) = \dfrac{n_0(\theta)}{I_0}$.

Неподвижный аксоид тела S***.*** Уравнение неподвижного аксоида [8]

$$\boldsymbol{\zeta}(\theta,\mu) = \mathbf{r}(\theta) + \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta)}{\omega_*(\theta)} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta) \times \mathbf{v}(\theta)}{\omega_*^2(\theta)} \tag{22}$$

в базисе $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ имеет разложение

$$\boldsymbol{\zeta}(\theta,\mu) = \zeta_1(\theta,\mu)\mathbf{E}_1 + \zeta_2(\theta,\mu)\mathbf{E}_2 + \zeta_3(\theta,\mu)\mathbf{E}_3. \tag{23}$$

Представим векторы (11), (12) в неподвижном пространстве:

$$\mathbf{r}(\theta) = X(\theta)\mathbf{E}_1 + Y(\theta)\mathbf{E}_2 + Z(\theta)\mathbf{E}_3, \tag{24}$$

$$\mathbf{v}(\theta) = V_1(\theta)\mathbf{E}_1 + V_2(\theta)\mathbf{E}_2 + V_3(\theta)\mathbf{E}_3, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_1 = -a \sin\varepsilon \sqrt{1 + b_* \cos^2\theta}, \\ Y(\theta) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_2 = -a \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\varepsilon (1 + b_* \cos^2\theta)}, \\ Z(\theta) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_3 = -a \cos\theta, \end{aligned} \tag{26}$$

$$V_1(\theta) = \dot{X}(\theta), \qquad V_2(\theta) = \dot{Y}(\theta), \qquad V_3(\theta) = \dot{Z}(\theta). \tag{27}$$

Так как $X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2$, то точка O движется по сфере радиуса a. Подставив (26), (27), (20) в (22), получим компоненты неподвижного аксоида (23) тела S в неподвижном базисе:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\theta) &= F(\theta, \mu) p_1, \\ \zeta_2(\theta) &= F(\theta, \mu) p_2(\theta), \\ \zeta_3(\theta) &= F(\theta, \mu) p_3(\theta), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$F(\theta, \mu) = \frac{\mu}{\omega_*(\theta)} - \frac{a n(\theta)}{I \omega_*^2(\theta)}, \tag{29}$$

$$\omega_*^2(\theta) = \frac{g^2}{A^2}(1 + b_* \sin^2\varepsilon) + \big(\frac{A^2}{I^2} - 1 - b_*\big) \frac{n^2(\theta)}{A^2}. \tag{30}$$

Подвижный аксоид тела S***.*** Уравнение подвижного аксоида тела S [8]

$$\boldsymbol{\xi}(\theta, \mu) = \mu \frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta)}{\omega_*(\theta)} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta) \times \mathbf{v}(\theta)}{\omega_*^2(\theta)} \tag{31}$$

в полуподвижном базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}(\theta, \mu) = \xi_1(\theta, \mu)\mathbf{e}_1 + \xi_2(\theta, \mu)\mathbf{e}_2 + \xi_3(\theta, \mu)\mathbf{e}_3.$$

Подставив (1), (2), (4), (12) в (31), находим

$$\begin{gathered} \xi_1(\theta, \mu) = F(\theta, \mu)\omega_1(\theta), \qquad \xi_2(\theta, \mu) = F(\theta, \mu)\omega_2(\theta), \\ \xi_3(\theta, \mu) = a + F(\theta, \mu)\frac{n(\theta)}{I}. \end{gathered} \tag{32}$$

Его компоненты в неизменно связанном с телом S базисе $O\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ получим с помощью соотношений

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1 \sin\varphi + \mathbf{e}_2 \cos\varphi,$$

из которых следует

$$\begin{aligned} \xi_1^*(\theta, \mu) &= \xi_1(\theta, \mu) \cos\varphi(\theta) + \xi_2(\theta, \mu) \sin\varphi(\theta), \\ \xi_2^*(\theta, \mu) &= -\xi_1(\theta, \mu) \sin\varphi(\theta) + \xi_2(\theta, \mu) \cos\varphi(\theta). \end{aligned} \tag{33}$$

Угол собственного вращения φ тела S определен квадратурой в [8]:

$$\varphi(\theta) - \varphi_0 = -\frac{g\sin\varepsilon}{A}\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{b_*\cos^2\theta + 1}}\Big[\frac{A}{I} - 1 - b_* + \frac{1 + b_*}{\sin^2\theta}\Big]\frac{d\theta}{\varkappa(\theta)}. \tag{34}$$

Скорость скольжения $v_c = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}_*/\omega_*$ подвижного аксоида по неподвижному равна нулю. При движении тела S подвижный аксоид (33), (32), (34) катится без скольжения по неподвижному (28).

Угловая скорость $\mathbf{\Omega}_* = \dfrac{n_0(\theta)}{I_0}\mathbf{e}_3^0$ тела S_0 описывает цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси $\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_3^0$, а точка O описывает сферическую кривую (26).

Для визуализации движения необходимо записать уравнение аксоидов как функции времени, воспользовавшись соотношением из [4]:

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon}{\nu}\sin\nu t_*, \tag{35}$$

где $t_* = \dfrac{g}{A}(t - t_0)$ – безразмерное время, параметр ν введен соотношением $\nu = \sqrt{1 + b_*\sin^2\varepsilon}$. При этом величины (29), (30) таковы :

$$F(\theta,\mu) = \frac{\mu}{\omega_*(t_*)} - \frac{ag\nu\sqrt{(\nu^2-1)/b_*}}{I\omega_*^2(t_*)\sqrt{\nu^2 + (b_* + 1 - \nu^2)\sin^2\nu t_*}},$$

$$\omega_*^2(t_*) = \frac{g^2\nu^2}{A^2I^2b_*}\frac{A^2(\nu^2-1) + I^2(b_* + 1 - \nu^2)(1 + b_*\sin^2\nu t_*)}{\nu^2 + (b_* + 1 - \nu^2)\sin^2\nu t_*}; \tag{36}$$

$$\varphi(t_*) - \varphi_0 =$$
$$= \sin\varepsilon\int\limits_{t_*^0}^{t_*}\Big[\frac{A}{I} - 1 - b_* + \frac{(1 + b_*)\nu^2}{\nu^2 - \cos^2\varepsilon\sin^2\nu t_*}\Big]\frac{dt_*}{\sqrt{1 + \frac{b_*\cos^2\varepsilon}{1 + b_*\sin^2\varepsilon}\sin^2\nu t_*}}. \tag{37}$$

3. Второй вариант. Рассмотрим ограничение (10) – центр масс тела S совпадает с точкой O. В этом случае при условиях (5)

$$\mathbf{r} = -a_0\mathbf{e}_3^0, \tag{38}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{39}$$

т. е. точка O неподвижна в пространстве. Тело S_0 вращается с угловой скоростью $p_3(t_*) = \dfrac{n_0(t_*)}{I_0}$ вокруг неподвижной оси $\mathbf{e}_3^0$.

Запишем годографы тела S. *Неподвижный годограф* (20) с учетом (35):

$$p_1 = \frac{g}{A}\Big[1 + \big(\frac{A}{I} - 1\big)\frac{\nu^2 - 1}{b_*}\Big],$$

$$\begin{gathered} p_2(t_*) = \\ = \frac{g}{Ab_*}\big(\frac{A}{I} - 1\big)\sqrt{(\nu^2 - 1)(b_* + 1 - \nu^2)}\frac{\nu \cos \nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + (1 + b_* - \nu^2)\sin^2 \nu t_*}}, \\ p_3(t_*) = \\ = \frac{g}{Ab_*}\big(\frac{A}{I} - 1 - b_*\big)\sqrt{(\nu^2 - 1)(b_* + 1 - \nu^2)}\frac{\sin \nu t_*}{\sqrt{\nu^2 + (1 + b_* - \nu^2)\sin^2 \nu t_*}}. \end{gathered} \tag{40}$$

Так как угол $\varphi(t_*)$ уже представлен соотношением (37), достаточно записать компоненты $\omega_1, \omega_2, \dfrac{n}{I}$ в полуподвижном базисе:

$$\begin{gathered} \omega_1(t_*) = \frac{g}{A}\frac{\nu \cos \varepsilon \cos \nu t_*}{\sqrt{\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}, \\ \omega_2(t_*) = \frac{g}{A}\frac{\nu(1 + b_*)\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \nu t_*}{\sqrt{(\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*)(\nu^2 - \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*)}}, \\ \frac{n(t_*)}{I} = \frac{g}{A}\frac{\nu \sin \varepsilon}{\sqrt{\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*}}. \end{gathered} \tag{41}$$

Подвижный годограф тела S имеет вид

$$\begin{gathered} \omega_1^*(t_*) = \omega_1(t_*)\cos \varphi(t_*) + \omega_2(t_*)\sin \varphi(t_*), \\ \omega_2^*(t_*) = -\omega_1(t_*)\sin \varphi(t_*) + \omega_2(t_*)\cos \varphi(t_*), \\ \omega_3^*(t_*) = \frac{n(t_*)}{I}\ . \end{gathered} \tag{42}$$

Момент реакции связи L в неголономном шарнире определен в [2] соотношением $\dot{L} = \dot{n}/\cos\theta$. Зависимость n и $\cos\theta$ от времени $t_* = \dfrac{g}{A}(t - t_0)$ дана соотношениями (41), (35), поэтому

$$L(t) = \frac{-gA^{-1}I\, b_* \nu^3 \sin \varepsilon \cos \varepsilon \cos \nu t_*}{(\nu^2 + b_* \cos^2 \varepsilon \sin^2 \nu t_*)^{3/2}}.$$

При движении тела S подвижный годограф (42), (41), (34) катится без скольжения по неподвижному годографу (40). Тело S_0 при этом вращается вокруг сохраняюшей направление в пространстве оси неголономности.

1. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.

2. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15–21.
3. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 80–86.
4. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Новое решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 51–57.
5. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Частное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 63–69.
6. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Условия существования линейного инвариантного соотношения специального вида // Зб. наук.-метод. робіт. – Донецьк, 2006. – Вип. 4. – С. 39–50.
7. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Частное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром // Междунар. конф. “Классические задачи динамики твердого тела” (Донецк, 9–13 июня 2007 г.): Сб. тез. – Донецк, 2007. – С. 50–51.
8. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 202–212.

M.E. Lesina, N.F. Gogoleva

The motion of a system of two bodies connected by a nonholonomic hinge

The equations of axoids for two kinds of motion are obtained in the problem of inertial motion of two Lagrange gyroscopes connected with a nonholonomic hinge. In these motions the nonholonomicity axis and the angular velocity of one of the bodies keep the constant direction in fixed space.

Keywords: *system of Lagrange gyroscopes, nonholonomic hinge, axoid.*

М.Ю. Лесіна, Н.Ф. Гоголєва

Рух системи двох тіл, з’єднаних неголономним шарніром

В задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з’єднаних неголономним шарніром, отримано аксоїди для двох варіантів руху системи тіл. У цьому русі вісь неголономності і кутова швидкість одного з тіл зберігають напрямок у нерухомому просторі.

Ключові слова: *система гіроскопів Лагранжа, неголономний шарнір, рухомий і нерухомий аксоїди.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
applmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 11.10.13