УДК 531.38

 О.С. Волкова

О ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЯХ ГИРОСТАТА В СЛУЧАЕ, КОГДА ГИРОСТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ПРИНАДЛЕЖИТ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучается вращение вокруг неподвижной точки тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом. В предположении, что направление гиростатического момента фиксировано во вращающемся базисе, исследованы условия существования одного типа прецессионных движений гиростата вокруг вертикали. Отдельно рассмотрены случаи, когда собственное вращение происходит вокруг главной и неглавной оси инерции. В первом случае интегрирование уравнений движения сведено к интегрированию уравнения Абеля; во втором проведено исследование возможных полурегулярных прецессий гиростата.

Ключевые слова: *гиростат с неподвижной точкой, переменный гиростатический момент, прецессионное движение.*

Введение. Пусть механическая система, состоящая из тела-носителя S, закрепленного в одной точке, и присоединенных тел S^i $i = \overline{1, n}$, представляет собой гиростат с переменным гиростатическим моментом. Различные конструкции таких систем указаны в [1, 2]: все они удовлетворяют приведенному в [3] формальному определению гиростата. Предположим, что, как и в задаче о движении твердого тела, обобщенный тензор инерции системы симметричен и положительно определен.

Вращение тяжелого гиростата в связанном с телом S базисе описывается уравнениями

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J}$ – обобщенный тензор инерции гиростата, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость носителя, $\boldsymbol{\nu}$ – орт нисходящей вертикали, $\boldsymbol{e}$ – радиус-вектор центра масс, $|\boldsymbol{e}| \neq 0$, $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент. Предположим, что направление переменного вектора $\boldsymbol{\lambda}$ фиксировано, но изменением его абсолютной величины можно управлять: $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, $\lambda(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция времени. При $\lambda(t) \neq \mathrm{const}$ уравнения движения допускают только два первых интеграла:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) + \lambda(t)(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) = g, \quad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Интеграла энергии в общем случае нет. Но если, к примеру, $\lambda(t) = \Lambda((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}))$, то система (1) допускает его аналог – интеграл

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})\lambda(t) - \int_0^{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})} \Lambda(x)\, dx = (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}) + h.$$

Для гиростата, вращающегося вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести, изучены основные классы движений: вращения вокруг перманентной оси [4–7], регулярные прецессии вокруг вертикальной и наклонных осей [7,8]. Существование различных нерегулярных прецессий в задаче о движении гиростата под действием общих потенциальных и гироскопических сил показано в [9, 10]. Исследования, проведенные в [9, 10] и ряде других работ, основываются на исключении $\lambda(t)$ из системы (1) с помощью интеграла площадей (2). Поскольку этот интеграл имеет место с произвольной функцией $\lambda(t)$, в общем случае подстановка полученной зависимости λ от $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ в динамическое уравнение не замыкает систему (1). Но для класса прецессионных движений редуцированная таким образом система дифференциальных уравнений позволяет определить компоненты $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Цель настоящей работы состоит в изучении условий существования *нерегулярных прецессий* тяжелого гиростата в случае, когда интегралы (2) не содержат $\lambda(t)$, т. е. в случае, когда гиростатический момент принадлежит горизонтальной плоскости.

1. Постановка задачи. Движение гиростата называют *прецессией* [11, 12] (либо, следуя Г.Г. Аппельроту, *безнутационным* движением) относительно вертикали, если угол между $\boldsymbol{\nu}$ и некоторым фиксированным во вращающемся базисе единичным вектором $\boldsymbol{\beta}$ остается неизменным: $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}) = \cos\theta = \mathrm{const}$. При этом угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет разложению

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\boldsymbol{\beta}, \tag{3}$$

где $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ – скорости прецессии и собственного вращения соответственно. Уравнение Пуассона теперь можно переписать в виде $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})$. Вращения вокруг неподвижной оси далее не рассматриваем, поэтому $\dot{\psi}\dot{\varphi} \neq 0$.

Интеграл площадей (2) не зависит от $\lambda(t)$, если в любой момент времени $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}) = 0$. При $\dot{\boldsymbol{\nu}} \neq 0$ равенства $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}) = 0$ и $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}) = \cos\theta$ могут выполняться одновременно лишь в случае их совпадения, поэтому положим $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}$, $\cos\theta = 0$.

Пусть $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$ – постоянные векторы единичной длины, такие, что $\boldsymbol{r_1} \perp \boldsymbol{r_2}$, $\boldsymbol{r_1}\times\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{\alpha}$. Тогда кинематическому уравнению $\boldsymbol{\nu}'_{\varphi} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяет вектор $\boldsymbol{\nu}$ вида

$$\boldsymbol{\nu} = \sin(\varphi - \varphi_0)\boldsymbol{r_1} + \cos(\varphi - \varphi_0)\boldsymbol{r_2}. \tag{4}$$

При исследовании различных типов прецессионных движений вектор $\boldsymbol{r_1}$ можно выбирать по-разному. Соответствие между двумя разложениями вида (4) обеспечивается за счет разности начальных фаз. Зафиксировав далее $\boldsymbol{r_1}$, для краткости записи примем $\varphi_0 = 0$.

Введем обозначение $K = (\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{\alpha}) + \lambda$ и запишем с учетом разложения (3) интеграл $(\boldsymbol{J\omega},\boldsymbol{\nu}) = g$ и проекции динамического уравнения на векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\nu}$:

$$\dot{\psi}\,(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}\,(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu}) = g, \tag{5}$$

$$\dot{\varphi}\,K'_{\varphi} = \dot{\psi}^2\,(\boldsymbol{J\nu},\,\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) + \dot{\psi}\dot{\varphi}\,(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu}), \tag{6}$$

$$\dot{\psi}K + (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e}) = \dot{\varphi}\Big[g - \dot{\psi}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})\Big] - \ddot{\psi}\,(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) - \ddot{\varphi}\,(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})\,. \tag{7}$$

Поскольку квадратичная форма $(\boldsymbol{J\nu},\, \boldsymbol{\nu})$ положительно определена, из (5) всегда можно выразить $\dot{\psi}$:

$$\dot{\psi} = \frac{g - \dot{\varphi}(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}. \tag{8}$$

Дифференцирование (8) по времени в силу системы $\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha})$ дает

$$\ddot{\psi} = -\frac{(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})\ddot{\varphi}}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})} - \frac{2g(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})\dot{\varphi}}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})^2} + \frac{[\,(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})\,]\dot{\varphi}^2}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})^2}, \tag{9}$$

где вектор $\boldsymbol{\eta} = |\boldsymbol{J}|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. Подстановка (8), (9) в уравнения (6), (7) приводит к системе, содержащей только $K'_\varphi, K, \ddot{\varphi}, \dot{\varphi}$ и тригонометрические функции φ. Если найдены удовлетворяющие этой системе $K(\varphi)$ и $\varphi(t)$, то определены зависимости от времени основных переменных задачи: λ, ω_i, ν_i $(i = \overline{1,3})$.

Иногда (например, при изучении полурегулярных прецессий с $\dot{\psi} = \mathrm{const}$) из (5) удобно выразить $\dot{\varphi}$ через $\dot{\psi}$. Это возможно, только если $\boldsymbol{J\alpha} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$: иначе верно $(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}) = 0$, а левая часть (5) не содержит $\dot{\varphi}$.

Случай $\boldsymbol{J\alpha} \parallel \boldsymbol{\alpha}$ будет исследован отдельно.

2. Ось собственного вращения – главная ось инерции. В качестве базиса выберем систему главных осей эллипсоида инерции, в которых тензор

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, J_3\}, \quad J_i > 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Рассмотрим случай $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)^T$. Равенство (8) при этом определяет $\dot{\psi}$ как функцию φ: $\dot{\psi} = \dfrac{g}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}$, причем $g \neq 0$. Производная от $\dot{\psi}$ в силу кинематической подсистемы равна $\ddot{\psi} = \dfrac{-2g(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})\dot{\varphi}}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})^2}$. Внесем полученные выражения в уравнения (6), (7). После некоторых преобразований будем иметь

$$\dot{\varphi}\, K'_\varphi = \frac{(J_1 - J_2)g^2\nu_1\nu_2}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})^2} + e_1\nu_2 - e_2\nu_1, \tag{10}$$

$$g\, K + e_3(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}) = \frac{g\dot{\varphi}}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}\big[\,|\boldsymbol{J\nu}|^2 - J_1J_2\big]. \tag{11}$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha}$ коллинеарен главной оси, векторы $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$ в разложении (4) также можно считать направленными вдоль главных осей инерции; тогда

$$\nu_1 = \sin\varphi, \quad \nu_2 = \cos\varphi, \quad \nu_3 = 0.$$

Отметим, что при $J_1 = J_2$ равенства (10), (11) выполнимы только с $K = -\dfrac{J_1e_3}{g}$, $e_1 = e_2 = 0$. Функция $\dot{\varphi}(t)$ в этом случае остается *произвольной*, а $\dot{\psi} = \dfrac{g}{J_1}$.

Указанное решение соответствует прецессии вокруг вертикали гиростата Лагранжа с $\lambda(t) = -J_3\dot\varphi(t) - \dfrac{J_1 e_3}{g}$ (см. частный случай решения [13, с. 82]).

Пусть далее $J_1 \neq J_2$. Сразу отметим, что полурегулярные прецессии второго типа, с постоянной скоростью $\dot\varphi = n$, при $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)^T$ невозможны. Уравнения (10), (11) не могут задавать одну и ту же функцию $K(\varphi)$, так как необходимое для этого условие

$$(J_1 - J_2)\nu_1\nu_2\big[2n e_3(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})^2 + g(g^2 - 4n^2 J_1 J_2)\big] + g(e_1\nu_2 - e_2\nu_1)(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})^2 = 0 \quad (12)$$

не является тождеством по φ: члены 5-го и 6-го порядков тригонометрического полинома (12) не исчезают одновременно при допустимых $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{e}$, g, n.

Продолжаем исследование при $J_1 \neq J_2$. Исключая $\dot\varphi$ из (10) и (11), получим для функции $K(\varphi)$ уравнение Абеля второго рода:

$$K'\,[\,gK + e_3(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})] = \frac{g\,(J_1 - J_2)\,[J_1 - J_2 - (J_1 + J_2)\cos 2\varphi]\,P_5(\varphi)}{4(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})^3}, \qquad (13)$$

$$P_5(\varphi) := g^2(J_1 - J_2)\sin 2\varphi + 2\,(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})^2\,(e_1\cos\varphi - e_2\sin\varphi),$$

$$(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{2}\,(J_1 + J_2 + (J_2 - J_1)\cos 2\varphi).$$

Если найдено решение уравнения (13), то зависимость $\dot\varphi(\varphi)$ определяется равенством (11); значит, с точностью до постоянной будет известно и $t(\varphi)$.

Укажем случаи, когда (13) упрощается.

- $e_3 = 0$ ($\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{\alpha}$) – решение уравнения (13) записывается в квадратурах:

$$K^2 = 4\,(J_2 - J_1)\int \frac{J_2 - J_1 + (J_1 + J_2)\cos 2\varphi}{(J_1 + J_2 + (J_2 - J_1)\cos 2\varphi)^3}\,P_5(\varphi)\,d\varphi.$$

Интеграл в правой части вычисляется в элементарных функциях угла φ:

$$K^2 = g^2\left[\frac{J_1J_2}{(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})^2} - \frac{J_1 + J_2}{(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})}\right] + 2\,(J_1 + J_2)(e_1\sin\varphi + e_2\cos\varphi) -$$

$$- 4\sqrt{J_1J_2}\left[e_1\,a\,A\left(\frac{\sin\varphi}{b}\right) + e_2\,b\,B\left(\frac{\cos\varphi}{a}\right)\right] + K_0,$$

где $a^2 = J_1|J_1 - J_2|^{-1}$, $b^2 = J_2|J_1 - J_2|^{-1}$, K_0 – произвольная постоянная; $A(x) = \operatorname{arctg} x$, $B(x) = \operatorname{arcth} x$ при $J_1 > J_2$ и $A(x) = \operatorname{arcth} x$, $B(x) = \operatorname{arctg} x$ при $J_2 > J_1$.

- $e_1 = e_2 = 0$ ($\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\alpha}$) – после замены $\tau = |\boldsymbol{e}|(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})$, $F(\tau) = gK(\tau) + \tau$ уравнение (13) принимает каноническую форму

$$(F' - 1)F = \frac{g^4|\boldsymbol{e}|}{2}\left(\frac{J_1 + J_2}{\tau^2} - \frac{2|\boldsymbol{e}|J_1J_2}{\tau^3}\right).$$

Интегрированию уравнения Абеля посвящена обширная литература. Множество частных случаев разобрано в [14] и других источниках; в [15] обсуждается метод получения общего решения.

Замечание. Исключенная из рассмотрения в п. 2 возможность $g = 0$ приводит к маятниковому вращению неавтономного гиростата вокруг горизонтальной главной оси, ортогональной радиус-вектору центра масс [6].

3. Ось собственного вращения произвольна. Будем считать, что $\boldsymbol{J\alpha} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$. Тогда в качестве $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$ в разложении (4) можно выбрать векторы

$$\boldsymbol{r_1} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{J\alpha}), \quad \boldsymbol{r_2} = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{\alpha} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{J\alpha})), \quad \mu := |\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{J\alpha}|; \tag{14}$$

при этом простую форму записи примут выражения

$$(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}) = -\mu(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{r_2}) = -\mu\cos\varphi, \quad (\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha}) = \mu(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{r_1}) = \mu\sin\varphi.$$

Выясним, возможны ли в рамках исследуемой задачи полурегулярные прецессии, отличные от прецессии гиростата Лагранжа. В каждом из случаев $\dot\varphi = \mathrm{const}$ и $\dot\psi = \mathrm{const}$ система уравнений (5)–(7) будет исследована на совместность.

3.1. Полурегулярные прецессии с $\boldsymbol{\dot\varphi = n}$. Предположим, что скорость собственного вращения постоянна и равна n. Учтя это условие в формулах (8), (9), преобразуем с их помощью уравнения (7):

$$\begin{aligned}&[g - n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})]\, K + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}) = \\ &\qquad = \frac{n}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}\big\{g\,|\boldsymbol{J\nu} \times \boldsymbol{\alpha}|^2 + [2n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}) - g]\,(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\big\} + n^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}).\end{aligned} \tag{15}$$

Функция $K(\boldsymbol{\nu}(\varphi))$ должна также удовлетворить уравнению (6) с $\dot\psi$ вида (8):

$$K'_\varphi = \frac{1}{n}\,(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}) + \frac{(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha})}{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}\,[g - n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})] + \frac{(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha})}{n(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})^2}\,[g - n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})]^2.$$

Полученное уравнение легко интегрируется:

$$K = -\frac{[g - n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})]^2}{2n(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})} + \frac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu})}{n} + K_0, \quad K_0 = \mathrm{const}. \tag{16}$$

Подстановка (16) в (15) приводит к условию $\sum_{i=0}^{4} P_i = 0$, где

$$\begin{aligned}P_4 &= 2n(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{J\nu} \times \boldsymbol{e},\ \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha}),\\ P_3 &= 2(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})\big[g(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}) - n^2K_0(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}) - n^3(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})\big] + n^3(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})^3,\\ P_2 &= 2ngK_0(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}) - n^2g\big(2|\boldsymbol{J\nu}|^2 + (\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})^2\big),\\ P_1 &= n(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})\big[3g^2 - 4n^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha})\big],\\ P_0 &= g\big[2n^2(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\alpha}) - g^2\big].\end{aligned}$$

Все входящие в P_i скалярные произведения – тригонометрические полиномы по φ с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{r_1}$ и $\boldsymbol{r_2}$: к примеру,

$$2(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})=[(\boldsymbol{Jr_2},\boldsymbol{r_2})-(\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_1})]\cos 2\varphi+2(\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_2})\sin 2\varphi+(\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_1})+(\boldsymbol{Jr_2},\boldsymbol{r_2}).$$

Аналогичным образом представив остальные выражения, заключаем, что

а) степень тригонометрического полинома $P_i(\varphi)$ равна его индексу;

б) полиномы $P_4(\varphi), P_2(\varphi)$ содержат члены только четных порядков, а $P_3(\varphi), P_1(\varphi)$ – наоборот, только нечетных.

Следовательно, $\sum_{i=0}^{4} P_i(\varphi)$ – тригонометрический полином четвертой степени, который должен исчезать тождественно. Приравняем нулю его коэффициенты. Для краткости записи введем обозначения

$$(\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_1}) =: \tilde{J}_{11}, \quad (\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_2}) =: \tilde{J}_{12}, \quad (\boldsymbol{Jr_2},\boldsymbol{r_2}) =: \tilde{J}_{22}.$$

Слагаемое $P_4(\varphi)$ не содержит членов четвертого порядка в двух случаях: когда $(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu}) \equiv \mathrm{const}$ либо $(\boldsymbol{J\nu}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) \equiv \mathrm{const}$. Первая возможность приводит к тому, что старший член полинома $P_3(\varphi)$ совпадает со старшим членом выражения $n^3(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})^3 = -n^3\mu^3\cos^3\varphi$ и, очевидно, в нуль не обращается. Значит, $(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})$ зависит от φ, и верно неравенство $\tilde{J}_{12}^2+(\tilde{J}_{11}-\tilde{J}_{22})^2 \neq 0$. Второе тождество $(\boldsymbol{J\nu}\times\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) \equiv \varkappa_0$ имеет место только при

$$\boldsymbol{e} = \frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})}{\mu}\Big\{-2\tilde{J}_{12}\,\boldsymbol{r_1}+(\tilde{J}_{11}-\tilde{J}_{22})\,\boldsymbol{r_2}+\mu\,\boldsymbol{\alpha}\Big\}, \quad \varkappa_0=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\tilde{J}_{11}\neq 0. \tag{17}$$

Члены третьего порядка в $P_3(\varphi)$ отсутствуют также в двух случаях: при

$$K_0=\frac{n}{2}(\tilde{J}_{11}+\tilde{J}_{22})+\frac{n\mu^2}{\sigma^2}(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11}), \quad g=\frac{n^3\mu^2(\sigma^2+\mu^2)}{2\sigma^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})}, \tag{18}$$

где $\sigma^2=4\tilde{J}_{12}^2+(\tilde{J}_{11}-\tilde{J}_{22})^2\neq 0$, либо при

$$\tilde{J}_{12}=0, \quad \tilde{J}_{11}\neq\tilde{J}_{22}, \quad K_0=\frac{g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})}{n^2\mu^2}(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11})+\frac{n\mu^2}{2(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11})}+n\tilde{J}_{11}. \tag{19}$$

Подсчет членов второго порядка в выражении $P_4(\varphi)+P_2(\varphi)$ показывает, что при условиях (18) они могут обращаться в нуль только с $\mu n=0$, что невозможно. Следовательно, верно (19). При этом условии проще вычислить сначала члены первого порядка. Выражение $P_3(\varphi)+P_1(\varphi)$ не содержит $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, если

$$\mu^2=\frac{1}{n^2\tilde{J}_{11}}(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11})[3g^2-4n^2\tilde{J}_{11}\tilde{J}_{22}]>0. \tag{20}$$

С учетом (19), (20) можно утверждать, что $P_4(\varphi)+P_2(\varphi)$ не содержит членов второго порядка, если

$$[g^2-n^2\tilde{J}_{11}\tilde{J}_{22}]\left(4n(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})\tilde{J}_{11}^2+12n^2g\tilde{J}_{11}\tilde{J}_{22}-9g^3\right)=0. \tag{21}$$

Возможность $g^2 - n^2\tilde{J}_{11}\tilde{J}_{22} = 0$ приводит к тому, что константа в выражении $P_4(\varphi) + P_2(\varphi) + P_0$ отсутствует. Если же в (21) равен нулю второй сомножитель, то свободный член в $P_4(\varphi) + P_2(\varphi) + P_0$ исчезает при $g = 0, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}) = 0$. Последнее равенство, согласно (17), недопустимо. Значит, выполнено

$$g^2 = n^2\tilde{J}_{11}\tilde{J}_{22}, \qquad \mu^2 = (\tilde{J}_{11} - \tilde{J}_{22})\tilde{J}_{22}. \tag{22}$$

В итоге заключаем, что равенство $\sum_{i=0}^{4} P_i(\varphi) = 0$ выполняется тождественно лишь при условиях (17), (19), (22). *Только в этом случае существует решение системы* (5)–(7) *с* $\dot{\varphi} = n, \;\; \dot{\psi} \neq \mathrm{const}$.

Выпишем результат в главных осях эллипсоида инерции. Из $\tilde{J}_{12} = 0$ следует равенство $(\boldsymbol{J\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\alpha}) = 0$, которое выполнимо, только если $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит главной плоскости. Пусть $\alpha_1 = 0$, тогда векторы (14) имеют вид

$$\boldsymbol{r_1} = (1,\, 0,\, 0)^T, \quad \boldsymbol{r_2} = (0,\, \alpha_3, -\alpha_2)^T. \tag{23}$$

Условие $\mu^2 = (\tilde{J}_{11} - \tilde{J}_{22})\tilde{J}_{22}$ позволяет получить координаты $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2^2 = \frac{J_2(J_1 - J_2)}{(J_2 - J_3)(J_1 - J_2 - J_3)}, \quad \alpha_3^2 = \frac{J_3(J_3 - J_1)}{(J_2 - J_3)(J_1 - J_2 - J_3)}, \tag{24}$$

где J_1 лежит между J_2 и J_3. Ограничения на $\boldsymbol{\alpha}$ влекут за собой ограничения и на вектор $\boldsymbol{e}$, заданный разложением (17): $\boldsymbol{Je} \parallel \boldsymbol{\alpha}$, а косинус угла γ между $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ вычисляется по формуле $\cos^2\gamma = \dfrac{J_2 J_3}{J_1(J_2 + J_3 - J_1)}$. Другими словами,

$$e_1 = 0, \quad \frac{e_2^2}{|\boldsymbol{e}|^2} = \frac{J_3(J_2 - J_1)}{J_1(J_2 - J_3)}, \quad \frac{e_3^2}{|\boldsymbol{e}|^2} = \frac{J_2(J_1 - J_3)}{J_1(J_2 - J_3)}, \tag{25}$$

где $e_2\alpha_2 e_3\alpha_3 > 0$. Постоянная g определена равенством $g^2 = \dfrac{J_1 J_2 J_3\, n^2}{J_2 + J_3 - J_1}$. Скорость собственного вращения n – произвольна, а скорость прецессии

$$\dot{\psi} = \frac{2\,[g + n(J_2 - J_3)\alpha_2\alpha_3\cos\varphi]}{(\tilde{J}_{22} - J_1)\cos 2\varphi + J_1 + \tilde{J}_{22}}, \qquad \tilde{J}_{22} = \frac{J_2 J_3}{J_2 + J_3 - J_1}. \tag{26}$$

Функция $\lambda(\varphi)$, необходимая для реализации заданного движения, имеет вид

$$\lambda(\varphi) = \frac{e_2\alpha_3(J_3 - J_2)}{J_3 n}\cos\varphi + n(J_1 - J_2 - J_3) - \frac{g\,e_2}{J_3\alpha_2 n^2}. \tag{27}$$

Компоненты вектора угловой скорости определяются из $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\,\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{\alpha}$ с $\dot{\psi}$ вида (26) и $\nu_1 = \sin\varphi$, $\nu_2 = \alpha_3\cos\varphi$, $\nu_3 = -\alpha_2\cos\varphi$, где $\varphi = nt - \varphi_0$.

Это же решение в связанной с вектором $\boldsymbol{\alpha}$ неглавной системе координат приведено в работе [16].

Замечание. Очевидно, что (25) представляет собой условие В. Гесса. Поскольку выполнено $\boldsymbol{Je} \parallel \boldsymbol{\alpha}$ и $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$, из разложения $\boldsymbol{\omega}$ следует, что $(\boldsymbol{J\omega}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$. Гиростатический момент в этом случае не может быть постоянным: согласно (24)–(27), из $\lambda(\varphi) = \mathrm{const}$ следовало бы $\boldsymbol{J\alpha} \parallel \boldsymbol{\alpha}$ и $\dot{\psi} = \mathrm{const}$.

3.2. Полурегулярные прецессии с $\dot{\psi} = m$. Теперь изучим возможность вращения гиростата с постоянной скоростью прецессии. В задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил несколько решений с $\dot{\psi} = m$ указаны в [17]. В настоящей работе для случая $\dot{\psi} = m$, $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ проведено полное исследование.

Итак, при $\dot{\psi} = m$ из интеграла (5) целесообразно выразить $\dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu})$:

$$\begin{gathered} \dot{\varphi} = \frac{g - m(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})}{(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})}, \\ \ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}}{(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})^2} \left[g(\boldsymbol{J\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}) + m\, (\boldsymbol{J\nu} \times \boldsymbol{\alpha},\, (\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{J\alpha}) \right], \end{gathered} \tag{28}$$

где вектор $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\varphi)$ задан разложением (4). Поскольку правая часть уравнения для $\dot{\varphi}$ – функция φ, зависимость $t(\varphi)$ определяется интегрированием.

Уравнение (7) при условии $\dot{\psi} = m$ упрощается до

$$mK + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}) = \frac{[g - m(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})]\, \Psi}{(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})^3}, \tag{29}$$

$$\Psi = g\mu^2 + |\boldsymbol{J}| m \left[1 - (\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})\right];$$

величина Ψ, очевидно, от φ не зависит. Из уравнения (6) получим соотношение, связывающее K'_φ и компоненты $\boldsymbol{\nu}$:

$$\begin{gathered} \big(K'_\varphi + m(\boldsymbol{J\alpha} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu})\big)[g - m(\boldsymbol{J\nu}, \boldsymbol{\nu})] = \\ = \big[m^2(\boldsymbol{J\nu},\, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{e}, \boldsymbol{\nu})\big](\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu}). \end{gathered} \tag{30}$$

Предположим, что $\Psi \neq 0$. Учитывая, что производная K'_φ вычисляется в силу системы $\boldsymbol{\nu}'_\varphi = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha}$, сможем проинтегрировать (30) при условии (29). То есть систему (29), (30) заменим равносильной ей системой уравнений (29) и

$$\begin{aligned} [mK + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})]^2 + m^2(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})[mK + (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})] - \frac{2m\Psi(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r_2})}{\mu(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\nu})} = \\ = 2m\Psi\mu^{-2}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r_1})\, \mathrm{arcth}(\sin\varphi) + I_0, \end{aligned} \tag{31}$$

где I_0 – произвольная постоянная. Из (29) следует, что левая часть (31) – дробно-рациональна по $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Значит, правая часть (31) не может быть трансцендентной функцией $\sin\varphi$. Отсюда заключаем, что $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{r_1})=0$. Подстановка (29) в (31) приводит к соотношению

$$I_0(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})^6-m^2\Psi[g-m(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})](\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})^4+\\ +\frac{2m\Psi}{\mu}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{r_2})(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})^5-\Psi^2[g-m(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})]^2=0, \quad (32)$$

которое с учетом $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(\varphi)$ должно быть тождеством по φ. Слева получим тригонометрический полином шестого порядка. Приравнивая нулю его старшие члены, приходим к необходимости положить

$$\tilde{J}_{12}=0, \quad I_0=\frac{m^3}{\mu^2}\Psi(\tilde{J}_{11}-\tilde{J}_{22}). \quad (33)$$

Члены пятого порядка в (32) содержат только слагаемое $\dfrac{2m}{\mu}\Psi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{r_2})(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})^5$. Значит, $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{r_2})=0$, что вместе с $(\boldsymbol{e},\boldsymbol{r_1})=0$ дает $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\alpha}$. Теперь нужно обеспечить отсутствие в (32) членов четвертого порядка. Это возможно только при

$$g=\tilde{J}_{11}m-\frac{\Psi}{\mu^4}(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11})^2. \quad (34)$$

После подстановки (33), (34) в (32) получаем равенство

$$\Psi^3(\tilde{J}_{11}-\tilde{J}_{22})^3[m\mu^4(\cos 2\varphi+1)+\Psi(\tilde{J}_{22}-\tilde{J}_{11})]=0,$$

которое при $\Psi\neq 0$ выполняется тождественно только с $\tilde{J}_{11}=\tilde{J}_{22}$. Но тогда в (34) $g=\tilde{J}_{11}m$. Как было отмечено выше, из $\tilde{J}_{12}=(\boldsymbol{Jr_1},\boldsymbol{r_2})=0$ при $\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2}$ вида (14) следует $\boldsymbol{Jr_1}\parallel\boldsymbol{r_1}$, а значит, $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит главной плоскости. Несложно проверить, что при $\alpha_1=0$, $g=J_1m$ константа Ψ в формуле (29) равна нулю, что противоречит принятому предположению.

Рассмотрим вариант $\Psi=0$. При этом из (29) следует $K=-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})}{m}$, $K'_\varphi=0$. Следовательно, (30) с $K'_\varphi=0$, $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(\varphi)$ должно выполняться при любых φ. После упрощения (30) получим равенство

$$(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{J\alpha},\boldsymbol{\nu})+m(g\boldsymbol{J\alpha}+m\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha})=0. \quad (35)$$

Учитывая, что $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{J\alpha}$, условия тождественного выполнения (35) запишем в виде

$$\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\alpha}, \qquad g(\boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\alpha})+m(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\alpha})=0, \quad (36)$$

где $\boldsymbol{\eta}=|\boldsymbol{J}|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{Jr_1}\times\boldsymbol{Jr_2}$. Проектируя (36) на $\boldsymbol{r_1},\boldsymbol{r_2}$, получим $g=\tilde{J}_{11}m$ и $\boldsymbol{Jr_1}\parallel\boldsymbol{r_1}$, т. е. снова $\alpha_1=0$, $g=J_1m$. При таких значения α_1 и g верно $\Psi=0$. *Других решений с* $\dot{\psi}=m$, $\dot{\varphi}\neq\mathrm{const}$ *система* (5)–(7) *при* $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{J\alpha}$ *не имеет.*

Итак, движение тяжелого гиростата с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi} = m$ допустимо при условиях

$$\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\alpha}, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2\alpha_3 \neq 0, \qquad \alpha_2^2 \neq \frac{J_2 - J_1}{J_2 - J_3}, \qquad g = J_1 m, \tag{37}$$

т. е. собственное вращение происходит вокруг неглавной оси, несущей центр масс. Скорость собственного вращения в этом случае имеет вид

$$\dot{\varphi} = \xi \cos\varphi, \qquad \xi = \frac{m[J_1 - J_2\alpha_3^2 - J_3\alpha_2^2]}{(J_2 - J_3)\alpha_2\alpha_3} \neq 0.$$

Для реализации заданного движения необходимо обеспечить, чтобы величина λ изменялась по закону

$$\lambda(\varphi) = \frac{m[J_2J_3 - J_1(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\alpha})]}{(J_2 - J_3)\alpha_2\alpha_3} \cos\varphi - \frac{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e})}{m}, \tag{38}$$

$$\varphi(t) = \arcsin\left(\operatorname{th}\xi(t - t_0)\right).$$

Перечисленные условия могут быть получены и из результата [17] с $\boldsymbol{B} = 0$, $\boldsymbol{C} = 0$ приведением к главным осям.

Очевидно, что при $J_2J_3 = J_1(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ выражение $\lambda(\varphi)$ вида (38) будет постоянным. Параметры при этом будут удовлетворять условиям В. Гесса, т. е. получим полурегулярную прецессию в решении Л.Н. Сретенского [18].

Выпишем зависимости от φ проекций $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ на главные оси инерции:

$$\omega_1 = m\sin\varphi, \qquad \omega_2 = \frac{(J_1 - J_3)m}{(J_2 - J_3)\alpha_3}\cos\varphi, \qquad \omega_3 = \frac{(J_1 - J_2)m}{(J_2 - J_3)\alpha_2}\cos\varphi;$$

$$\nu_1 = \sin\varphi, \qquad \nu_2 = \alpha_3\cos\varphi, \qquad \nu_3 = -\alpha_2\cos\varphi.$$

Указанное решение обладает двумя характерными свойствами:

– проекция суммарного момента количества движения $\boldsymbol{K}$ на $\boldsymbol{e}$ постоянна;

– решение допускает линейное по $\boldsymbol{\omega}$ инвариантное соотношение $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\zeta}) = 0$, где $\boldsymbol{\zeta} = (0,\, (J_1 - J_2)\alpha_3,\, (J_3 - J_1)\alpha_2)^T$. Отметим, что при $J_2J_3 = J_1(\boldsymbol{J\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$ вектор $\boldsymbol{\zeta}$ коллинеарен $\boldsymbol{Je}$, а инвариантное соотношение имеет вид $(\boldsymbol{J\omega}, \boldsymbol{e}) = 0$.

Замечание. Условия $\alpha_2^2 = \dfrac{(J_2 - J_1)}{(J_2 - J_3)}$, $\alpha_3^2 = \dfrac{(J_1 - J_3)}{(J_2 - J_3)}$, исключенные в (37), при $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\alpha}$ представляют собой условия Дж. Гриоли [11] существования регулярных прецессий гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ вокруг наклонной оси. Для гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ эти же условия обеспечивают возможность регулярной прецессии *вокруг вертикали* [7].

Выводы. Таким образом, в предположении $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ полностью исследованы условия допустимости двух типов полурегулярных прецессий тяжелого гиростата с гиростатическим моментом $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$. Показано, что для существования решений уравнений движения необходимо, чтобы гиростатический момент и радиус-вектор центра масс принадлежали главной плоскости эллипсоида инерции.

1. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гиростатов // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4. – С. 9–16.
2. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
3. *Харламов П.В.* Гиростаты // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1988. – **9**. – С. 38–41.
4. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
5. *Kovaleva L.M.* Investigation of permanent rotations of the rigid body with fixed point, carrying one- and two-degree gyros // XXII Yugoslav congress of theoretical and applied mechanics. – Vrnjaska Banja, 1997. – P. 61–64.
6. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
7. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
8. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 63–76.
9. *Мазнев А.В.* Один класс прецессионно-изоконических движений неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2011. – **22**. – С. 145–152.
10. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
11. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. Mat. Pura ed Appl. Ser.4. – 1947. – **26**. – P. 271–281.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
13. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Соврем. проблемы математики, механики, информатики / Под ред. Кизиловой Н.Н., Жолткевича Г.Н. – Харьков: "Апостроф", 2011. – С. 74-84.
14. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
15. *Panayotounakos D.E., Zarmpoutis Th.I., Sotiropoulos P.* The General Solutions of the Normal Abel's Type Nonlinear ODE of the Second Kind // IAENG Intern. J. of Appl. Math. – 2013. – **43**: 3. – P. 94–98.
16. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вiсн. Донецького нацiонального ун-ту. Сер. А: Природничi науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–82.
17. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
18. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. – 1963. – **149**, № 2. – С. 292–294.

O.S. Volkova

Precessional motions of a gyrostat in the case when the gyrostatic momentum belongs to the horizontal plane

The paper concerns gyrostat rotations about a fixed point in the gravity field. Existence conditions for certain of precessional motions about the vertical axis are studied under the assumption that the direction of variable gyrostatic momentum is invariant in the rotating frame. The situations when the proper rotation is performed about the principal and nonprincipal axis of inertia are considered separately. In the first case integration of the motion equations is reduced to integration of the Abel equation; in the second one the complete investigation of all admissible semiregular precessions is carried out.

Keywords: *gyrostat with fixed point, variable gyrostatic momentum, precessional motion.*

О.С. Волкова

Прецесійні рухи гіростата у випадку, коли гіростатичний момент належить горизонтальній площині

Вивчається обертання навколо нерухомої точки важкого гіростата зі змінним гіростатичним моментом. У припущенні, що напрямок гіростатичного моменту фіксовано у базисі, який обертається, досліджено умови існування одного типу прецесійних рухів гіростата відносно вертикалі. Окремо розглянуто випадки, коли власне обертання відбувається навколо головної та неголовної осі еліпсоїда інерції. В першому з випадків інтегрування рівнянь руху зведено до інтегрування рівняння Абеля, у другому проведено повне дослідження допустимих напіврегулярних прецесій гіростата.

Ключові слова: *гіростат з нерухомою точкою, змінний гіростатичний момент, прецесійний рух.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`volkova@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 01.07.13