УДК 531.38

©2013. **Г.В. Горр, Е.К. Щетинина**

ПРЕЦЕССИИ ГИРОСТАТА В СЛУЧАЕ ПЛОСКОГО ГОДОГРАФА ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Исследованы прецессионные движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предполагается, что переменный гиростатический момент находится в плоскости, неизменно связанной с телом-носителем. Найдены новые решения уравнений движения, характеризующиеся свойством постоянства скорости прецессии.

Ключевые слова: *гиростат, переменный момент, прецессия.*

Введение. Движение системы связанных твердых тел, моделируемой гиростатом, изучалось в различных постановках [1–4]. Ж. Лиувилль [1] впервые получил уравнения движения системы материальных точек, которые можно рассматривать, как уравнения движения гиростата. Н.Е. Жуковский пришел к аналогичным уравнениям при рассмотрении движения тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью [2]. В.В. Румянцев [3] модель гиростата использовал в задачах управления движением спутника. Он предполагал, что роторы (несомые тела) имеют симметричную геометрическую форму. Наиболее общая модель гиростата рассмотрена П.В. Харламовым [4], так как в его модели носители могут быть и несимметричными. Для случая постоянного гиростатического момента получены многочисленные результаты [5, 6]. Когда гиростатический момент зависит от времени, система дифференциальных уравнений движения гиростата становится неавтономной. Решения этой системы построены не только в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием силы тяжести [7–11], но и в задаче о движении гиростата в поле более сложной структуры [12–15]. Особенностью данных исследований является предположение, что гиростатический момент направлен по некоторой, неподвижной в теле-носителе, оси. Поэтому представляет интерес изучение условий существования программных движений, для которых гиростатический момент лежит в некоторой плоскости тела-носителя. В данной статье рассмотрены прецессионные движения гиростата, характеризующиеся постоянством скорости прецессии гиростата. Найдены новые решения уравнений движения, описывающиеся элементарными и эллиптическими функциями времени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [4, 6]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t) \times \boldsymbol{\omega} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \mathrm{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

В (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – гиростатический момент; A – тензор инерции гиростата с компонентами (A_{ij}); $B = (B_{ij})$ и (C_{ij}) – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, характеризующий обобщенный центр масс гиростата. Будем предполагать, что гиростатический момент находится в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, т. е.

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}, \quad |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = 1, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим в качестве программных движений полурегулярные прецессии гиростата первого типа. Ранее [15] условия существования таких движений изучались в случае $\lambda_2(t) \equiv 0$. Здесь будем предполагать, что $\lambda_2 \neq 0$.

Обозначим через $\boldsymbol{a}$ единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем с началом в неподвижной точке. Пусть в течение всего времени постоянен угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$, т. е.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0), \tag{4}$$

где $\theta_0 = \mathrm{const}$. В [6] показано, что при выполнении равенства (4) вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$. Предполагая, что скорость прецессии гиростата постоянна, запишем выражение для $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

Здесь m – постоянная, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ – скорость собственного вращения. При подстановке (5) в уравнение (2) получим

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \tag{6}$$

Соотношению (4), уравнению (6) и геометрическому интегралу $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ удовлетворим, полагая [6]

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{7}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$.

Подставим выражения (3), (5) в уравнение (1):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = \lambda_1(t)[m(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a})] + \lambda_2(t)[m(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}) + \\ + \dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a})] - \ddot{\varphi}A\boldsymbol{a} + \dot{\varphi}^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) - \dot{\varphi}(B^*\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C^*\boldsymbol{\nu};\end{gathered} \tag{8}$$

здесь

$$B^* = B - 2mA + mSp(A), \qquad C^* = C + mB - m^2A. \tag{9}$$

Рассмотрим уравнения, которые вытекают из (8) при скалярном умножении на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ и учете (7):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}] - \\ - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\mu_2 \sin\varphi + \mu_3 \cos\varphi + \mu_4) + \\ + \mu_5 \sin 2\varphi + \mu_6 \cos 2\varphi + \mu_7 \sin\varphi + \mu_8 \cos\varphi + \mu_9,\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda_2}(t) = -\lambda_1(t)[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}]-\\
&- \varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\varepsilon_2\sin\varphi + \varepsilon_3\cos\varphi + \varepsilon_4)+\\
&+ \varepsilon_5\sin 2\varphi + \varepsilon_6\cos 2\varphi + \varepsilon_7\sin\varphi + \varepsilon_8\cos\varphi + \varepsilon_9,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t)[m(a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3) + \beta_3\dot{\varphi}]-\\
&- \lambda_2(t)[m(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + a_0\alpha_3) + \alpha_3\dot{\varphi}]-\\
&- \sigma_0\ddot{\varphi} + \sigma_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) + \sigma_5\sin 2\varphi+\\
&+ \sigma_6\cos 2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

В (10)–(12) введены обозначения

$$\begin{gathered}
\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1,\\
\mu_0 = A_{13}\alpha_1 + A_{23}\alpha_2 + A_{33}\alpha_3, \quad \varepsilon_0 = A_{13}\beta_1 + A_{23}\beta_2 + A_{33}\beta_3,\\
\sigma_0 = A_{13}\gamma_1 + A_{23}\gamma_2 + A_{33}\gamma_3,\\
\mu_1 = \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}, \quad \varepsilon_1 = \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}, \quad \sigma_1 = \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13},\\
\mu_2 = a_0'(\alpha_2 B_{11}^* - \alpha_1 B_{12}^*), \quad \varepsilon_2 = a_0'(\beta_2 B_{11}^* - \beta_1 B_{12}^*),\\
\sigma_2 = a_0'(\gamma_2 B_{11}^* - \gamma_1 B_{12}^*),\\
\mu_3 = a_0'(\alpha_2 B_{12}^* - \alpha_1 B_{22}^*), \quad \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 B_{12}^* - \beta_1 B_{22}^*),\\
\sigma_3 = a_0'(\gamma_2 B_{12}^* - \gamma_1 B_{22}^*),\\
\mu_4 = a_0(\alpha_2 B_{13}^* - \alpha_1 B_{23}^*), \quad \varepsilon_4 = a_0(\beta_2 B_{13}^* - \beta_1 B_{23}^*),\\
\sigma_4 = a_0(\gamma_2 B_{13}^* - \gamma_1 B_{23}^*),\\
\mu_5 = \frac{1}{2}a_0'[\alpha_1 C_{13}^* - \alpha_2 C_{23}^* + \alpha_3(C_{22}^* - C_{11}^*)],\\
\varepsilon_5 = \frac{1}{2}a_0'[\beta_1 C_{13}^* - \beta_2 C_{23}^* + \beta_3(C_{22}^* - C_{11}^*)],\\
\sigma_5 = \frac{1}{2}a_0'[\gamma_1 C_{13}^* - \gamma_2 C_{23}^* + \gamma_3(C_{22}^* - C_{11}^*)],\\
\mu_6 = \frac{1}{2}a_0'^2(\alpha_1 C_{23}^* + \alpha_2 C_{13}^* - 2\alpha_3 C_{12}^*),\\
\varepsilon_6 = \frac{1}{2}a_0'^2(\beta_1 C_{23}^* + \beta_2 C_{13}^* - 2\beta_3 C_{12}^*),\\
\sigma_6 = \frac{1}{2}a_0'^2(\gamma_1 C_{23}^* + \gamma_2 C_{13}^* - 2\gamma_3 C_{12}^*),\\
\mu_7 = a_0'[-\alpha_1 a_0 C_{12}^* + \alpha_2(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)],\\
\varepsilon_7 = a_0'[-\beta_1 a_0 C_{12}^* + \beta_2(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)],\\
\sigma_7 = a_0'[-\gamma_1 a_0 C_{12}^* + \gamma_2(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)],\\
\mu_8 = a_0'[-\alpha_1(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)) + a_0\alpha_2 C_{12}^* + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)],\\
\varepsilon_8 = a_0'[-\beta_1(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)) + a_0\beta_2 C_{12}^* + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)],\\
\sigma_8 = a_0'[-\gamma_1(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)) + a_0\gamma_2 C_{12}^* + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)],
\end{gathered} \tag{13}$$

$$\mu_9 = \frac{\alpha_1}{2}[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*] - \frac{\alpha_2}{2}[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*],$$
$$\varepsilon_9 = \frac{\beta_1}{2}[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*] - \frac{\beta_2}{2}[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*],$$
$$\sigma_9 = \frac{\gamma_1}{2}[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*] - \frac{\gamma_2}{2}[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*].$$

В обозначениях (13) компоненты матриц B^* и C^* в силу (9) таковы:

$$\begin{aligned}
&B_{11}^* = B_{11} - m(A_{11} - A_{22} - A_{33}), \quad B_{22}^* = B_{22} - m(A_{22} - A_{11} - A_{33}),\\
&B_{33}^* = B_{33} - m(A_{33} - A_{11} - A_{22}), \quad B_{12}^* = B_{12} - 2mA_{12},\\
&B_{13}^* = B_{13} - 2mA_{13}, \quad B_{23}^* = B_{23} - 2mA_{23},\\
&C_{11}^* = C_{11} + m^2 B_{11} - m^2 A_{11}, \quad C_{22}^* = C_{22} + mB_{22} - m^2 A_{22},\\
&C_{33}^* = C_{33} + mB_{33} - m^2 A_{33}, \quad C_{12}^* = C_{12} + mB_{12} - m^2 A_{12},\\
&C_{13}^* = C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}, \quad C_{23}^* = C_{23} + mB_{23} - m^2 A_{23}.
\end{aligned} \tag{14}$$

2. Полурегулярные прецессии гиростата. При заданной зависимости $\varphi = \varphi(t)$ система (10)–(12) представляет собой систему неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$, которая должна допускать инвариантное соотношение (12). Если же функцию $\varphi(t)$ считать неизвестной функцией, то уравнения (10)–(12) – система нелинейных уравнений относительно $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$. Так как в общем случае ее интегрирование затруднительно, то рассмотрим некоторые частные случаи.

Положим $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,\ \boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0),\ \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0),\ a_0 = 0$, тогда из (13) имеем

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = A_{13}, \quad \varepsilon_0 = A_{23}, \quad \sigma_0 = A_{33}, \quad \mu_1 = A_{23}, \quad \varepsilon_1 = -A_{13}, \quad \sigma_1 = 0,\\
&\mu_2 = -B_{12}^*, \quad \varepsilon_2 = B_{11}^*, \quad \sigma_2 = 0, \quad \mu_3 = -B_{22}^*, \quad \varepsilon_3 = B_{12}^*, \quad \sigma_3 = 0,\\
&\mu_4 = 0,\ \varepsilon_4 = 0,\ \sigma_4 = 0,\ \mu_5 = \frac{1}{2}C_{13}^*,\ \varepsilon_5 = -\frac{1}{2}C_{23}^*,\ \sigma_5 = \frac{1}{2}(C_{22}^* - C_{11}^*),\\
&\mu_6 = \frac{1}{2}C_{23}^*, \quad \varepsilon_6 = \frac{1}{2}C_{13}^*, \quad \sigma_6 = -C_{12}^*, \quad \mu_7 = 0, \quad \mu_8 = -s_3,\\
&\mu_9 = \frac{1}{2}C_{23}^*, \quad \varepsilon_7 = s_3, \quad \varepsilon_8 = 0, \quad \varepsilon_9 = -\frac{1}{2}C_{13}^*, \quad \sigma_7 = s_2, \quad \sigma_8 = s_1, \quad \sigma_9 = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Инвариантное соотношение (12) примет вид

$$\begin{gathered}
m\big[\lambda_1(t)\cos\varphi - \lambda_2(t)\sin\varphi\big] - A_{33}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}(C_{22}^* - C_{11}^*)\sin 2\varphi -\\
-\frac{1}{2}C_{12}^*\cos 2\varphi + s_2\sin\varphi + s_1\cos\varphi = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Уравнения (10), (11) таковы:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1(t) =&\lambda_2(t)\dot{\varphi} - A_{13}\ddot{\varphi} + A_{23}\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}(B_{12}^*\sin\varphi + B_{22}^*\cos\varphi)+\\ &+\cos\varphi(C_{13}^*\sin\varphi + C_{23}^*\cos\varphi - s_3),\\ \dot{\lambda}_2(t) =&-\lambda_1(t)\dot{\varphi} - A_{23}\ddot{\varphi} - A_{13}\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(B_{11}^*\sin\varphi + B_{12}^*\cos\varphi)-\\ &-\sin\varphi(C_{13}^*\sin\varphi + C_{23}^*\cos\varphi - s_3).\end{aligned} \tag{17}$$

Вычислим производную от левой части (16) в силу уравнений (17) и представим ее в виде

$$\begin{gathered}\Big\{m\dot{\varphi}(A_{23}\sin\varphi - A_{13}\cos\varphi) - A_{33}\ddot{\varphi} + \frac{m}{2}\Big[B_{12}^*\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(B_{11}^*-\\ -B_{22}^*)\sin 2\varphi - (B_{11}^* + B_{22}^*)\varphi\Big] + \frac{1}{2}(C_{22}^* - C_{11}^*)\sin 2\varphi - \frac{1}{2}C_{12}^*\cos 2\varphi+\\ +s_2\sin\varphi + s_1\cos\varphi\Big\}^{\cdot} + C_{13}^*\sin\varphi + C_{23}^*\cos\varphi - s_3 = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Можно показать, что уравнение (18) допускает решение $\varphi = \varkappa_0 + \varkappa_1\sin\varphi$, например, при выполнении условий

$$C_{13}^* = 0, \quad C_{23}^* = 0, \quad s_3 = 0, \quad B_{11}^* + B_{22}^* = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&C_{22}^* - C_{11}^* + mB_{11}^* - \varkappa_1(A_{33}\varkappa_1 + mA_{13}) = 0,\\ &C_{12} - mB_{12}^* + m\varkappa_1 A_{23} = 0,\\ &ms_0A_{23} + s_2 = 0, \quad \varkappa_0(mA_{13} + A_{33}\varkappa_1) - s_1 = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ находятся из уравнений (17), в которых положено $\dot{\varphi} = \varkappa_0 + \varkappa_1\sin\varphi$. Очевидно, что $\varphi(t)$ – элементарная функция времени.

Укажем пример существования решения уравнений (17) при наличии ИС (16) в случае, когда $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени. Пусть выполняются условия

$$\begin{gathered}A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad s_3 = 0, \quad C_{13}^* = 0,\\ C_{23}^* = 0, \quad B_{12}^* = 0, \quad B_{11}^* = 0, \quad B_{22}^* = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Тогда в силу (21) система (17) допускает решение

$$\lambda_1(t) = \lambda_0\sin\varphi, \quad \lambda_2(t) = \lambda_0\cos\varphi, \tag{22}$$

где λ_0 – постоянная. При подстановке (22) в уравнение (16) получим

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{A_{33}}\left[\frac{1}{2}(C_{11}^* - C_{22}^*)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}C_{12}^*\sin 2\varphi - 2s_2\cos\varphi + 2s_1\sin\varphi + C^*\right], \tag{23}$$

где C^* – произвольная постоянная. Из (23) вытекает, что $\varphi(t)$ – эллиптическая функция времени. Равенства $A_{23} = A_{13} = 0$ показывают, что вектор $\boldsymbol{a}$ лежит на главной оси эллипсоида инерции. Условие $s_3 = 0$ означает, что вектор обобщенного центра масс гиростата принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки.

Запишем четвертое и последующие условия из (21), используя обозначения (14):

$$C_{13}+mB_{13}=0, \quad C_{23}+mB_{23}=0, \quad B_{12}=2mA_{12},$$

$$B_{11}=m(A_{11}-A_{22}-A_{33}), \quad B_{22}=m(A_{22}-A_{11}-A_{33}).$$

Данные равенства показывают, что при рассмотрении случая действия силы тяжести получаем условия $A_{11}-A_{22}-A_{33}=0$, $A_{22}-A_{11}-A_{33}=0$, из которых следует $A_{33}=0$, что невозможно. Поэтому аналога решения (22), (23) в этом случае нет.

3. Регулярная прецессия гиростата. Полагая по-прежнему $\gamma_3=1$, рассмотрим регулярную прецессию $\dot{\varphi}=n$, где n – постоянная. Тогда вектор $\boldsymbol{\omega}$ из (5) примет вид

$$\boldsymbol{\omega}=n\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{\nu}. \tag{24}$$

Запишем значения параметров, указанных в (13), при условиях $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2=1$, $\beta_3=0$, $\gamma_1=0$, $\gamma_2=0$, $\gamma_3=1$:

$$\begin{gathered}
\mu_0=A_{13},\ \ \varepsilon_0=A_{23},\ \ \sigma_0=A_{33},\ \ \mu_1=A_{23},\ \ \varepsilon_1=-A_{13},\ \ \sigma_1=0,\\
\mu_2=-a_0'B_{12}^*,\ \ \varepsilon_2=a_0'B_{11}^*,\ \ \sigma_2=0,\ \ \mu_3=-a_0'B_{22}^*,\ \ \varepsilon_3=a_0'B_{12}^*,\ \ \sigma_3=0,\\
\mu_4=-a_0'B_{23}^*,\quad \varepsilon_4=a_0'B_{13}^*,\quad \sigma_4=0,\\
\mu_5=\frac{1}{2}a_0'^2C_{13}^*,\ \ \mu_6=\frac{1}{2}a_0'^2C_{23}^*,\ \ \mu_7=-a_0a_0'C_{12}^*,\\
\mu_8=-a_0'[s_3-a_0(C_{33}^*-C_{22}^*)],\quad \mu_9=\frac{1}{2}[2a_0s_2+(a_0'^2-2a_0^2)C_{23}^*],\\
\varepsilon_5=-\frac{1}{2}a'^2C_{23}^*,\quad \varepsilon_6=\frac{1}{2}a_0'^2C_{13}^*,\quad \varepsilon_7=a_0'\big[s_3-a_0(C_{33}^*-C_{11}^*)\big],\\
\varepsilon_8=a_0a_0'C_{12}^*,\quad \varepsilon_9=-\frac{1}{2}\big[2a_0s_1+(a_0'^2-2a_0^2)C_{13}^*\big],\ \ \sigma_5=\frac{1}{2}a_0'^2(C_{22}^*-C_{11}^*),\\
\sigma_6=-a_0'^2C_{12}^*,\ \ \sigma_7=-a_0'(s_2-a_0C_{23}^*),\ \ \sigma_8=a_0'(s_1-a_0C_{13}^*),\ \ \sigma_9=0
\end{gathered} \tag{25}$$

и преобразуем уравнения (10)–(12) с учетом (25) и $\varphi=nt$:

$$\dot{\lambda}_1(t)=(a_0m+n)\lambda_2(t)+F_1(t), \qquad \dot{\lambda}_2(t)=-(a_0m+n)\lambda_1(t)+F_2(t), \tag{26}$$

$$a_0'm(\lambda_1(t)\cos nt-\lambda_2(t)\sin nt)+F_3(t)=0, \tag{27}$$

где

$$
\begin{aligned}
F_1(t) =&\varepsilon_6 \sin 2nt - \varepsilon_5 \cos 2nt - (\varepsilon_8 + n\varepsilon_3)\sin nt + (\mu_8 + n\mu_3)\cos nt + \\
&+(\mu_9 + n^2\mu_1 + n\mu_4), \\
F_2(t) =&\varepsilon_5 \sin 2nt + \varepsilon_6 \cos 2nt + (\varepsilon_7 + n\varepsilon_2)\sin nt + (\varepsilon_8 + n\varepsilon_3)\cos nt + \\
&+(\varepsilon_9 + n^2\varepsilon_1 + n\varepsilon_4), \\
F_3(t) =&\sigma_5 \sin 2nt + \sigma_6 \cos 2nt + \sigma_7 \sin nt + \sigma_8 \cos nt.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Вычислим первую и вторую производные от ИС (27) в силу уравнений (26):

$$
\begin{gathered}
a_0' a_0 m^2[\lambda_2(t)\cos nt + \lambda_1(t)\sin nt] + \\
+a_0' m[F_1(t)\cos nt - F_2(t)\sin nt] + \dot{F}_3(t) = 0,
\end{gathered} \tag{29}
$$

$$
\begin{gathered}
a_0' a_0^2 m^3[\lambda_2(t)\sin nt - \lambda_1(t)\cos nt] + a_0' a_0 m^2[F_1(t)\sin nt + F_2(t)\cos nt] + \\
+a_0' m[F_1(t)\cos nt - F_2(t)\sin nt]^{\cdot} + \ddot{F}_3(t) = 0.
\end{gathered} \tag{30}
$$

Рассмотрим случай, когда выполняется равенство

$$
a_0 m + n = 0. \tag{31}
$$

В силу (31) уравнения (26), (27) интегрируются явно:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t) =& -\frac{\varepsilon_6}{2n}\cos 2nt - \frac{\varepsilon_5}{2n}\sin 2nt + \frac{1}{n}(\varepsilon_8 + n\varepsilon_3)\cos nt + \\
&+\frac{1}{n}(\mu_8 + n\mu_3)\sin nt + (\mu_9 + n^2\mu_1 + n\mu_4)t + c_1,
\end{aligned} \tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_2(t) =& -\frac{\varepsilon_5}{2n}\cos 2nt + \frac{\varepsilon_6}{2n}\sin 2nt - \frac{1}{n}(\varepsilon_7 + n\varepsilon_2)\cos nt + \\
&+\frac{1}{n}(\varepsilon_8 + n\varepsilon_3)\sin nt + (\varepsilon_9 + n^2\varepsilon_1 + n\varepsilon_4)t + c_2.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Подставим выражения (32), (33) в уравнение (27) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по t. Отсюда найдем условия

$$
\mu_9 + n^2\mu_1 + n\mu_4 = 0, \qquad \varepsilon_9 + n^2\varepsilon_1 + n\varepsilon_4 = 0, \tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_0' m(\varepsilon_8 + n\varepsilon_3) + n\sigma_6 = 0, \quad a_0' m[\mu_8 + \varepsilon_7 + n(\mu_3 + \varepsilon_2)] + 2n\sigma_5 = 0, \\
&2a_0' a_0 m c_1 = 2[a_0'\varepsilon_9 - a_0\sigma_8 + a_0' n^2\varepsilon_1 + n(a_0'\varepsilon_4 - a_0\sigma_3)] - a_0'\varepsilon_6, \\
&2a_0' a_0 m c_2 = -2[a_0'\mu_9 + a_0\sigma_7 + a_0' n^2\mu_1 + n(\sigma_2 a_0 + a_0'\mu_4)] + a_0'\varepsilon_5.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Учтем в уравнениях (34), (35) обозначения (25):

$$
2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^* - 2a_0 n B_{13}^* + 2n^2 A_{13} = 0, \tag{36}
$$

$$
\begin{gathered}
2a_0 s_2 + ({a'_0}^2 - 2a_0^2)C_{23}^* - 2a_0 n B_{23}^* + 2n^2 A_{23} = 0, \\
2(C_{22}^* - C_{11}^*) - m(B_{22}^* - B_{11}^*) = 0, \quad 2C_{12}^* - mB_{12}^* = 0.
\end{gathered} \tag{37}
$$

Внесем значения (14) в равенства (36), (37):

$$
\begin{gathered}
2a_0 s_1 + (1 - 3a_0^2)C_{13} + {a'_0}^2 m(B_{13} - mA_{13}) = 0, \\
2a_0 s_2 + (1 - 3a_0^2)C_{23} + {a'_0}^2 m(B_{23} - mA_{23}) = 0, \\
2(C_{11} - C_{22}) + m(B_{11} - B_{22}) = 0, \quad 2C_{12} + mB_{12} = 0.
\end{gathered} \tag{38}
$$

Таким образом, при выполнении условий (38) гиростат совершает регулярную прецессию (24) с $n = -a_0 m$. Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ определяются формулами (32), а параметры c_1, c_2 имеют значения (35). В случае действия на гиростат силы тяжести, т. е. при $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1, 3})$, из (38) получим

$$
2a_0 s_1 - {a'_0}^2 m^2 A_{13} = 0, \qquad 2a_0 s_2 - {a'_0}^2 m^2 A_{23} = 0. \tag{39}
$$

Особенностью равенств (38), (39) является отсутствие в них условий на параметр s_3.

Рассмотрим случай, когда в уравнениях (26), (27), (29), (30) параметр $a_0 = 0$. Поскольку при этом условии функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ в уравнение (29) не входят, то необходимо потребовать, чтобы уравнение (29) было тождеством по t. Учитывая в выражениях (28) значения параметров (15) и обозначения (14), получим

$$
\begin{gathered}
2C_{12} + mB_{12} = 0, \\
2(C_{22} - C_{11}) + m(B_{22} - B_{11}) = 0, \\
mC_{13} + m^2 B_{13} + m(n^2 - m^2)A_{13} - ns_1 = 0, \\
mC_{23} + m^2 B_{23} + m(n^2 - m^2)A_{23} - ns_2 = 0, \\
2s_3 + n(B_{11} + B_{22}) + 2mnA_{33} = 0.
\end{gathered} \tag{40}
$$

При выполнении условий (40) гиростат совершает регулярную прецессию, которая в силу $a_0 = 0$ и (24) описывается соотношениями

$$
\begin{gathered}
\nu_1 = \sin nt, \quad \nu_2 = \cos nt, \quad \nu_3 = 0, \\
\omega_1 = m \sin nt, \quad \omega_2 = m \cos nt, \quad \omega_3 = n.
\end{gathered} \tag{41}
$$

Когда $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1, 3})$, то из условий (40) вытекает

$$
\begin{gathered}
m(n^2 - m^2)A_{13} - ns_1 = 0, \\
m(n^2 - m^2)A_{23} - ns_2 = 0, \quad s_3 + mnA_{33} = 0.
\end{gathered} \tag{42}
$$

Для нахождения зависимостей $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ обратимся к уравнениям (26). Учитывая в них $F_1(t), F_2(t)$ из (28) при условиях (15), (42), для функции $\lambda_1(t)$ получим уравнение

$$
\ddot{\lambda}_1(t) + n^2 \lambda_1(t) = 3n\varepsilon_5 \sin 2nt + 3n\varepsilon_6 \cos 2nt + \mu_0, \tag{43}
$$

где $\mu_0 = -\dfrac{n^2}{2m}(s_1 + A_{13}nm)$. Общее решение уравнения (43) таково:

$$\lambda_1(t) = C_1 \sin nt + C_2 \cos nt - \frac{\varepsilon_5}{n} \sin 2nt - \frac{\varepsilon_6}{n} \cos 2nt + \frac{\mu_0}{n}. \tag{44}$$

Функцию $\lambda_2(t)$ определим из первого уравнения системы (26):

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) = -\frac{\varepsilon_5}{n} \cos 2nt + \frac{\varepsilon_6}{n} \sin 2nt + \frac{1}{n}(nC_1 - \mu_8 - n\mu_3) \cos nt - \\ - (C_2 - \varepsilon_3) \sin nt - \frac{1}{n}(\mu_9 + n^2\mu_1). \end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, в случае $a_0 = 0$ $\left(\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ должны выполняться условия (40), если же на гиростат действует сила тяжести, то – (42); а решение уравнений (1), (2) имеет вид (41), (44), (45).

Предположим, что в уравнениях (27)–(30) $a_0 \neq 0$, $a_0m + n \neq 0$. Исключим из (30) с помощью (27) выражение $\lambda_1(t)\cos nt - \lambda_2(t)\sin nt$:

$$\begin{aligned} a_0^2 m^2 F_3(t) + a_0 a_0' m^2 (F_1 \sin nt + F_2 \cos nt) + \\ + a_0' m (F_1 \cos nt - F_2 \sin nt)^{\cdot} + \ddot{F}_3(t) = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Уравнение (46) должно быть тождеством по t. Это приводит к условиям на параметры задачи (1), (2), для получения которых подставим выражения (28) в уравнение (46) и учтем обозначения (14) и (25). Тогда имеем

$$\begin{aligned} &(a_0m - 2n)(2C_{12} + mB_{12}) = 0, \\ &(a_0m - 2n)\big[2(C_{22} - C_{11}) + m(B_{22} - B_{11})\big] = 0, \\ &s_1(n - a_0m) + C_{13}\big[m(2a_0^2 - 1) - na_0\big] - {a_0'}^2 m^2 B_{13} + m(m^2 - n^2)A_{13} = 0, \\ &s_2(n - a_0m) + C_{23}\big[m(2a_0^2 - 1) - na_0\big] - {a_0'}^2 m^2 B_{23} + m(m^2 - n^2)A_{23} = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Проведем анализ условий (47). Если в них положить $a_0 = 0$, получим первые четыре равенства из (40). Так как при $a_0 = 0$ из (47) не вытекает последнее равенство из (40), то условия (47) нельзя считать обобщающими условиями двух вариантов: $a_0 = 0$, $a_0 \neq 0$. Запишем систему (47) при $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ (на гиростат действует сила тяжести)

$$s_1(n - a_0m) + m(m^2 - n^2)A_{13} = 0, \quad s_2(n - a_0m) + m(m^2 - n^2)A_{23} = 0. \tag{48}$$

Из (48) следует, что если ось собственного вращения гиростата является главной, то компоненты s_1 и s_2 могут быть отличными от нуля только при $n = a_0m$. Если в (48) положить $m = n$, то в силу неравенства $1 - a_0 \neq 0$ получим условия $s_2 = 0$, $s_1 = 0$, т. е. центр тяжести лежит на оси собственного вращения.

Равенства (47) показывают, что при выполнении условия $2n = a_0 m$, параметры $C_{12}, C_{11}, C_{22}, B_{12}, B_{11}, B_{22}$ могут быть произвольными. Если $2n \neq a_0 m$, то они удовлетворяют равенствам

$$2C_{12} + mB_{12} = 0, \qquad 2(C_{22} - C_{11}) + m(B_{22} - B_{11}) = 0.$$

Рассмотрим уравнения (26). Исключим из первого уравнении этой системы функцию $\lambda_2(t)$ с помощью второго уравнения:

$$\begin{gathered}\ddot{\lambda}_1(t) + (a_0 m + n)\lambda_1(t) = (a_0 m + 3n)\varepsilon_5 \sin 2nt + (a_0 + 3n)\varepsilon_6 \cos 2nt + \\ +[(a_0 m + n)(\varepsilon_7 + n\varepsilon_2) - n(\mu_8 + n\mu_3)] \sin nt + a_0 m(\varepsilon_8 + n\varepsilon_3) \cos nt.\end{gathered} \tag{49}$$

Из уравнения (49) следует, что $\lambda_1(t)$ является тригонометрическим многочленом 2-го порядка. Функцию $\lambda_2(t)$ определим из (27) в виде

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{a_0' m \sin nt}(F_3(t) + a_0' m \lambda_1(t) \cos nt). \tag{50}$$

Таким образом, из (49), (50) получим, что $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ являются периодическими функциями времени с периодом $\dfrac{2\pi}{n}$. Решение

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin nt, \quad a_0' \cos nt, \quad a_0), \qquad \boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu},$$

описывающее регулярную прецессию гиростата, также является периодическим с указанным выше периодом.

Заключение. В статье получены три дифференциальных уравнения (10)–(12) на функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$; они являются линейными по $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и нелинейными по $\varphi(t)$. Приведены три варианта существования решения этих уравнений. Первые два варианта (см. п. 2) относятся к случаю полурегулярной прецессии гиростата: в одном из них $\varphi(t)$ – элементарная функция времени, в другом – эллиптическая; третий вариант (см. п. 3) относится к случаю регулярной прецессии гиростата. Уравнения (10), (11) применимы для исследования условий существования и других типов прецессионных движений [6].

1. *Liouville J.* Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1-25.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: В 2-х т. – М.; Л: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152–310.
3. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук, думка. – 1978. – С. 296.

6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2012. – С. 364.
7. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5 . – С. 825–826.
8. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
9. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
11. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики / Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. – Харьков: “Апостроф”, 2011. – С. 74–84.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 64–75.
13. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 10. – С. 91–104.
14. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 66–72.
15. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.

G.V. Gorr, E.K. Shchetinina

Gyrostat’s precessions in the case of a plane hodograph of the gyrostatic moment

Precessional motions of a gyrostat under the influence of potential and gyroscopic forces are investigated. It is assumed that the variable gyrostatic moment belongs to the plane which has been permanently connected with a carrier body. New solutions of the motion equations characterized by the property of constancy of the precession velocity are found.

Keywords: *gyrostat, variable moment, precession.*

Г.В. Горр, О.К. Щетініна

Прецесії гіростата у випадку плоского годографа гіростатичного моменту

Досліджено прецесійні рухи гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Припускається, що змінний гіростатичний момент належить площині, що незмінно пов’язана з тілом-носієм. Знайдено нові розв’язки рівнянь руху, що характеризуються властивістю сталості швидкості прецесії.

Ключові слова: *гіростат, змінний момент, прецесія.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Национальный ун-т экономики и торговли
им. М. Туган-Барановского, Донецк
elena-0607@bk.ru

Получено 02.09.13