УДК 531.38

©2012. **Е.А. Игнатова**

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Получено решение уравнений движения сферического гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона, которое характеризуется двумя линейными инвариантными соотношениями относительно основных переменных задачи.

Ключевые слова: *эффект Барнетта–Лондона, гиростат, точные решения.*

Рассмотрена задача о движении сверхпроводящего твердого тела и нейтрального ферромагнетика в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [1, 2].

С помощью метода инвариантных соотношений [3] в [4] были указаны условия существования двух линейных инвариантных соотношений уравнений движения гиростата и построены решения исходных уравнений в предположении, что диагональные компоненты гирационного тензора не равны между собой.

В данной статье для случая сферического гиростата построено новое решение уравнений движения, которое выражается через элементарные функции времени.

Постановка задачи. Уравнения движения гиростата в магнитном поле, с учетом эффекта Барнетта–Лондона и действия центральных ньютоновских сил, имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + Ba\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu},\\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей и магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного центра масс; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} = k, \qquad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \tag{2}$$

где k – произвольная постоянная.

В [4], согласно методу инвариантных соотношений [3], получены условия существования двух линейных инвариантных соотношений

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \qquad x_2 = c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3 \tag{3}$$

для случая, когда гирационный тензор имеет вид $a = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

Случай сферического гиростата. Аналогично [4] запишем условия существования инвариантных соотношений (3) для сферического гиростата, предполагая

$$a = \operatorname{diag}(a_1, a_1, a_1), \qquad \lambda_3 \neq 0, \quad b_3 \neq 0, \quad c_3 \neq 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&b_0 = b_2 = c_0 = c_1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad B_{23} = B_{13} = 0, \quad c_2 = b_1 = -B_{33},\\
&b_3(B_{11} - B_{33}) + c_3 B_{12} = 0, \qquad b_3 B_{12} - c_3(B_{33} - B_{22}) = 0,\\
&s_1 = a_1 b_3 \lambda_3, \quad s_2 = -a_1 c_3 \lambda_3, \quad s_3 = a_1 \lambda_3 B_{33}, \quad C_{13} = C_{23} = 0,\\
&C_{12} = -a_1(b_3 c_3 + B_{12} B_{33}), \quad C_{11} = C_{33} + a_1 B_{33}^2 - a_1 B_{33} B_{11} + a_1 c_3^2,\\
&C_{22} = C_{33} + a_1 B_{33}^2 - a_1 B_{33} B_{22} + a_1 b_3^2, \quad B_{12}^2 + (B_{33} - B_{11})(B_{33} - B_{22}) = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

В силу первого равенства из (5) соотношения (3) упрощаются:

$$x_1 = b_1 \nu_1 + b_3 \nu_3, \qquad x_2 = c_2 \nu_2 + c_3 \nu_3. \tag{6}$$

Используя равенства (5) и инвариантные соотношения (6), уравнения движения (1) сведем к системе

$$\dot{x}_3 = a_1(b_3 \nu_2 - c_3 \nu_1)(b_3 \nu_1 + c_3 \nu_2 - b_1 \nu_3 + \lambda_3), \tag{7}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\nu}_1 = a_1\big[x_3 \nu_2 - \nu_3(-B_{33}\nu_2 + c_3 \nu_3)\big],\\
\dot{\nu}_2 = a_1\big[\nu_3(-B_{33}\nu_1 + b_3 \nu_3) - \nu_1 x_3\big], \qquad \dot{\nu}_3 = a_1 \nu_3 (c_3 \nu_1 - b_3 \nu_2).
\end{gathered} \tag{8}$$

Интегралы уравнений (7), (8) имеют вид

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{9}$$

$$(x_3 + \lambda_3 + b_3 \nu_1 + c_3 \nu_2 - b_1 \nu_3)\nu_3 = l_0, \tag{10}$$

где $l_0 = k - b_1$.

Таким образом, для сферического гиростата с учетом (4)–(6) интегрирование исходных уравнений (1) сведено к интегрированию уравнений (7), (8) с интегралами (9), (10).

Новое решение уравнений. Используя (7), последнее уравнение системы (8) и (10), получим

$$\frac{dx_3}{d\nu_3} = \frac{1}{\nu_3}\Big(x_3 - \frac{l_0}{\nu_3}\Big). \tag{11}$$

Выпишем общее решение уравнения (11)

$$x_3(t) = \frac{l_0}{2\nu_3(t)} + C\nu_3(t). \tag{12}$$

Отметим, что функция x_3 из (12) зависит от двух произвольных постоянных: l_0 и C и является дробно-линейной функцией. Используя (12), интеграл (10) можно записать в виде

$$(\lambda_3 + b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - b_*\nu_3)\nu_3 = l_0/2, \tag{13}$$

где $b_* = b_1 - C$. Следовательно, система (8) имеет два интеграла: геометрический (9) и интеграл (13).

Выполним интегрирование уравнений (8). Исходя из (9), введем вместо ν_1, ν_2, ν_3 новые переменные

$$\nu_1 = \sin\theta\cos\xi, \quad \nu_2 = \sin\theta\sin\xi, \quad \nu_3 = \cos\theta \tag{14}$$

и вместо параметров b_3, c_3 параметры $\alpha_0, \mu_0 : b_3 = \mu_0\cos\alpha_0,\ c_3 = \mu_0\sin\alpha_0$, $\mu_0 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$. Тогда из соотношения (13) получим

$$\cos(\xi - \alpha_0) = \frac{g_0(\theta)}{\mu_0\sin\theta\cos\theta}, \tag{15}$$

где $g_0(\theta) = l_0/2 - \cos\theta(\lambda_3 - b_*\cos\theta)$. Последнее уравнение системы (8) в силу (14) можно преобразовать к виду

$$\dot\theta = \mu_0 a_1 \cos\theta\sin(\alpha_0 - \xi). \tag{16}$$

Исключим из уравнений (15), (16) переменную $(\alpha_0 - \xi)$:

$$\dot\theta = \frac{a_1}{\sin\theta}\Big(\mu_0^2\sin^2\theta\cos^2\theta - g_0^2(\theta)\Big)^{1/2}. \tag{17}$$

Из уравнения (17) обращением соответствующего интеграла можно найти зависимость θ от t. Тогда из (15) определим $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos\Big(\frac{g_0(\theta(t))}{\mu_0\sin\theta(t)\cos\theta(t)}\Big). \tag{18}$$

Соотношения (14) дают возможность найти $\nu_i = \nu_i(t)$, а соотношения (6), (12) – функции $x_i = x_i(t)$.

Для нахождения функции $\theta = \theta(t)$ преобразуем (17) к виду

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{d_4\nu_3^4 + d_3\nu_3^3 + d_2\nu_3^2 + d_1\nu_3 + d_0}} = -a_1(t - t_0), \tag{19}$$

где

$$d_4 = -(\mu_0^2 + b_*^2),\ d_3 = 2\lambda_3 b_*,\ d_2 = \mu_0^2 - \lambda_3^2 - b_* l_0,\ d_1 = \lambda_3 l_0,\ d_0 = -l_0^2/4. \tag{20}$$

Отметим, что функция $\nu_3(t)$ описывается эллиптическими функциями времени. Действительности функции $\nu_3(t)$ можно добиться, используя неравенство $|\nu_3| < 1$ и выбирая параметры $l_0, C, \lambda_3, B_{33}$ достаточно малыми.

Определив зависимость $\nu_3(t)$ из (19), из (18) находим

$$\xi(t) = \alpha_0 + \arccos\left[\frac{l_0/2 - \lambda_3\nu_3(t) + b_*\nu_3^2(t)}{\mu_0\nu_3(t)\sqrt{1-\nu_3^2(t)}}\right]. \tag{21}$$

Функции $\nu_1(t)$, $\nu_2(t)$ определим из (14)

$$\nu_1(t) = \sqrt{1-\nu_3^2(t)}\cos\xi(t), \qquad \nu_2(t) = \sqrt{1-\nu_3^2(t)}\sin\xi(t), \tag{22}$$

где $\xi(t)$ выражается формулой (21).

Тогда на основании (6), (22), функции $x_1(t), x_2(t)$ таковы:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1\sqrt{1-\nu_3^2(t)}\cos\xi(t) + b_3\nu_3(t), \\ x_2(t) &= b_1\sqrt{1-\nu_3^2(t)}\sin\xi(t) + c_3\nu_3(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Для сферического гиростата соотношения (23), (12), (22) и $\nu_3(t)$ из (19) являются решением уравнений (1) при выполнении условий (4), (5).

Случай $\boldsymbol{l_0 = 0}$. Положим в (19) $l_0 = 0$. Тогда

$$k = b_1. \tag{24}$$

И из (19) в силу (20), (24) имеем

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3\sqrt{d_4\nu_3^2 + d_3\nu_3 + d_{20}}} = -a_1(t - t_0), \tag{25}$$

где $d_{20} = \mu_0^2 - \lambda_3^2$.

Выражение под корнем положительно при $\nu_3 \in (\nu_3^{(1)}, \nu_3^{(2)})$, где

$$\nu_3^{(1)} = \frac{\lambda_3 b_* - \mu_0\sqrt{\Delta}}{\mu_0^2 + b_*^2}, \quad \nu_3^{(2)} = \frac{\lambda_3 b_* + \mu_0\sqrt{\Delta}}{\mu_0^2 + b_*^2}, \quad \Delta = \mu_0^2 + b_*^2 - \lambda_3^2,$$

здесь предполагаем, что $\mu_0 > 0$. Для того, чтобы решение было действительным, необходимо потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu_0^2 + b_*^2 - \lambda_3^2 > 0. \tag{26}$$

Выполнения условия (26) можно добиться выбором произвольной постоянной C, которая входит в b_*.

Таким образом, из (25) получим

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3\sqrt{(\nu_3^{(2)}-\nu_3)(\nu_3-\nu_3^{(1)})}} = -a_1\sqrt{\mu_0^2+b_*^2}(t-t_0). \tag{27}$$

Нахождение интеграла (27) в зависимости от значений параметров разбивается на ряд случаев; рассмотрим некоторые из них.

Случай $\mathbf{d_{20}=\boldsymbol{\mu}_0^2-\boldsymbol{\lambda}_3^2>0}$. При выполнении неравенства

$$\mu_0^2-\lambda_3^2>0 \tag{28}$$

из интеграла (25) найдем зависимость от времени третьей компоненты единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$, характеризующего направление магнитного поля:

$$\nu_3(t)=\frac{d_{20}e^{-\eta(t)}}{R_1(t)}, \tag{29}$$

где

$$R_1(t)=\zeta_1+\Big(\zeta_2-\frac{1}{2}e^{-\eta(t)}\Big)^2,\quad \eta(t)=a_1\sqrt{d_{20}}(t-t_0),\quad \zeta_1=-d_{20}d_4,\quad \zeta_2=\lambda_3b_*.$$

Используя соотношение (10) и третье уравнение системы (8), получим выражения

$$\begin{aligned}\nu_1(t)&=-\frac{1}{\mu_0^2}\big[m_0+m_1\nu_3(t)-c_3R_2(t)/R_1(t)\big],\\ \nu_2(t)&=-\frac{1}{\mu_0^2}\big[m_2+m_3\nu_3(t)+b_3R_2(t)/R_1(t)\big],\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$m_0=b_3\lambda_3,\quad m_1=-b_3b_*,\quad m_2=c_3\lambda_3,$$
$$m_3=-c_3b_*,\quad R_2(t)=-\sqrt{d_{20}}\Big(\zeta_1+\zeta_2^2-\frac{1}{4}e^{-2\eta(t)}\Big).$$

Подставим $\nu_3(t)$ из (29) в соотношения (30):

$$\begin{aligned}\nu_1(t)&=-\frac{1}{\mu_0^2R_1(t)}\big[\zeta_3+\zeta_4e^{-\eta(t)}+\zeta_5e^{-2\eta(t)}\big],\\ \nu_2(t)&=-\frac{1}{\mu_0^2R_1(t)}\big[\zeta_6+\zeta_7e^{-\eta(t)}+\zeta_8e^{-2\eta(t)}\big],\end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\zeta_3=(\zeta_1+\zeta_2^2)(b_3\lambda_3+c_3\sqrt{d_{20}}),\qquad \zeta_4=-b_3b_*\mu_0^2,\qquad \zeta_5=\frac{1}{4}(b_3\lambda_3-c_3\sqrt{d_{20}}),$$

$$\zeta_6=(\zeta_1+\zeta_2^2)(c_3\lambda_3-b_3\sqrt{d_{20}}),\qquad \zeta_7=-c_3b_*\mu_0^2,\qquad \zeta_8=\frac{1}{4}(\lambda_3c_3+b_3\sqrt{d_{20}}).$$

Внесем выражения (29), (31) в формулы (6), (12). Тогда

$$x_1(t)=\frac{1}{\mu_0^2R_1(t)}\big[\zeta_3'+\zeta_9e^{-\eta(t)}+\zeta_5'e^{-2\eta(t)}\big],$$
$$x_2(t)=\frac{1}{\mu_0^2R_1(t)}\big[\zeta_6'+\zeta_{10}e^{-\eta(t)}+\zeta_8'e^{-2\eta(t)}\big],\qquad x_3=\frac{Cd_{20}e^{-\eta(t)}}{R_1(t)},\tag{32}$$

где

$$\zeta_3'=-b_1\zeta_3,\quad \zeta_5'=-b_1\zeta_5,\quad \zeta_6'=b_1\zeta_6,\quad \zeta_8'=b_1\zeta_8,$$
$$\zeta_9=b_3\mu_0^2(\mu_0-\lambda_3^2+b_1b_*),\qquad \zeta_{10}=-\mu_0^2c_3(\mu_0^2-\lambda_3^2+b_1b_*).$$

Решение (29), (31), (32) существует при условиях на параметры (4), (5), (24), (28).

Случай $\mathbf{b}_*^2>\boldsymbol{\lambda_3^2-\mu_0^2}>\mathbf{0}$. Рассмотрим интеграл (25) для случая, когда

$$\mu_0^2-\lambda_3^2<0,\qquad \mu_0^2-\lambda_3^2+b_*^2>0.\tag{33}$$

При выполнении условий (4), (5), (24), (33) решение задачи (1) будет таким

$$\nu_1(t)=-\frac{1}{\mu_0R_5(t)}\big[\zeta_{15}+\zeta_{16}\sin(\zeta_{13}(t-t_0))+\zeta_{17}\cos(\zeta_{13}(t-t_0))\big],$$
$$\nu_2(t)=-\frac{1}{\mu_0R_5(t)}\big[\zeta_{21}+\zeta_{22}\sin(\zeta_{13}(t-t_0))+\zeta_{23}\cos(\zeta_{13}(t-t_0))\big],\nu_3(t)=\frac{\zeta_{11}}{R_5(t)},$$
$$x_1=\frac{\zeta_{24}+\zeta_{25}\sin\big(\zeta_{13}(t-t_0)\big)+\zeta_{26}\cos\big(\zeta_{13}(t-t_0)\big)}{\mu_0R_5(t)},$$
$$x_2=\frac{\zeta_{27}+\zeta_{28}\sin\big(\zeta_{13}(t-t_0)\big)+\zeta_{29}\cos\big(\zeta_{13}(t-t_0)\big)}{\mu_0R_5(t)},\qquad x_3=\frac{C\zeta_{11}}{R_5(t)},$$

где

$$\zeta_{11}=\lambda_3^2-\mu_0^2,\qquad \zeta_{12}=\mu_0\sqrt{\Delta},\qquad \zeta_{13}=a_1\sqrt{\lambda_3^2-\mu_0^2},\qquad \zeta_{14}=\lambda_3b_*,$$
$$\zeta_{15}=b_3b_*\mu_0,\qquad \zeta_{16}=b_3\lambda_3\sqrt{\Delta},\qquad \zeta_{17}=c_3\sqrt{\lambda_3^2-\mu_0^2}\sqrt{\Delta},\qquad \zeta_{21}=c_3b_*\mu_0,$$
$$\zeta_{22}=\lambda_3c_3\sqrt{\Delta},\qquad \zeta_{23}=-b_3\sqrt{\lambda_3^2-\mu_0^2}\sqrt{\Delta},\qquad \zeta_{24}=b_3\mu_0(\lambda_3^2-\mu_0^2-b_1b_*),$$
$$\zeta_{25}=-b_1\zeta_{16},\qquad \zeta_{26}=-b_1\zeta_{17},\qquad \zeta_{27}=c_3\mu_0(\lambda_3^2-\mu_0^2-b_1b_*),$$
$$\zeta_{28}=-b_1\zeta_{22},\quad \zeta_{29}=-b_1\zeta_{23},\quad R_5(t)=\zeta_{12}\sin(\zeta_{13}(t-t_0))+\zeta_{14}.$$

Итак, для уравнений движения сферического гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона при выполнении условий (4), (5) получено новое частное решение (12), (22), (23), зависящее от ν_3. Связь между ν_3 и t устанавливается квадратурой (19), и, значит, $x_3(t)$ – эллиптическая функция времени. Указаны условия, при выполнении которых это решение выражается в элементарных функциях.

1. *Егармин И.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и космические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С. 95–96.
2. *Киттель И.* Введение в физику твердого тела. – М.: Физматгиз, 1963. – 696 с.
3. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 6. – С. 26–30.
4. *Данилейко Е.А.* Новое частное решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 55–60.

K.A. Ignatova

On the solution of the equations of motion of spherical gyrostat in a magnetic field

The solution of the equations of motion of a spherical gyrostat in a magnetic field with considering the effect of Barnett–London are received. This solution is characterized by two linear invariant relations on the main variables of the problem.

Keywords: *effect of Barnett–London, gyrostat, exact solutions.*

К.А. Ігнатова

Про один розв'язок рівнянь руху сферичного гіростата у магнітному полі

Отримано розв'язок рівнянь руху сферичного гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта–Лондона, який характеризується двома лінійними інваріантними співвідношеннями відносно основних змінних задачі.

Ключові слова: *ефект Барнетта–Лондона, гіростат, точні розв'язки.*

Национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк

katerina-ignat@rambler.ru

Получено 20.09.12