УДК 681.511.42

©2012. **А.А. Перкин, Е.Л. Перьева, В.Б. Смирнова, А.И.Шепелявый**

ЧАСТОТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЙ ЦИКЛОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассмотрены системы непрямого управления с периодическими дифференцируемыми нелинейностями. С помощью метода периодических функций Ляпунова и частотной теоремы Якубовича – Калмана получены оценки сверху для отклонения выхода системы в произвольный момент времени от его начального значения. Оценки устанавливаются путем проверки неравенств относительно частотной характеристики линейной части системы.

Ключевые слова: *фазовая система, проскальзывание циклов, прямой метод Ляпунова, частотные критерии.*

Введение. Статья посвящена изучению асимптотического поведения фазовых систем управления. Фазовые системы – это системы непрямого управления с периодическими нелинейностями. Математическое описание многомерной фазовой системы с одной нелинейностью может быть сведено [1] к системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = Az + b\varphi(\sigma), \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = c^* z + \rho\varphi(\sigma). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь A – действительная $m \times m$-матрица, b и c – действительные m-векторы, ρ – число, символом * обозначено эрмитово сопряжение, $\varphi(\sigma)$ – Δ-периодическая функция. Непосредственно из вида уравнений (1) вытекает, что если пара функций $\{z(t), \sigma(t)\}$ является решением системы (1), то и пара $\{z(t), \sigma(t) + j\Delta\}$, где $j \in \mathbb{Z}$, также является ее решением. Так что, если множество положений равновесия системы (1) непусто, то оно не менее чем счетно.

Среди положений равновесия фазовой системы могут быть как устойчивые в малом, так и неустойчивые. Поэтому основной характеристикой устойчивости фазовой системы является стремление любого ее решения к одному из положений равновесия при стремлении $t \to +\infty$. Это свойство носит название глобальной асимптотической устойчивости.

Изучению асимптотического поведения фазовых систем как низкого (второго или третьего) порядка, так и многомерных посвящено много работ, начиная со статьи Ф. Трикоми [2]. Подробная библиография содержится в обзоре Г.А. Леонова [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 12-01-00808).

Условия глобальной асимптотической устойчивости многомерных систем разрабатывались с помощью прямого метода А.М. Ляпунова. Оказалось, что стандартные в теории управления функции Ляпунова вида “квадратичная форма” и “квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности” не позволяют получать конструктивные условия глобальной асимптотической устойчивости. Поэтому в рамках прямого метода А.М. Ляпунова были разработаны новые методы: процедура Бакаева–Гужа (метод периодических функций Ляпунова) [4] и метод нелокального сведения [5]. Они привели к новым классам функций Ляпунова. Необходимые и достаточные условия существования функций Ляпунова формулировались с помощью частотной теоремы Якубовича–Калмана [6]. Они имели форму частотных неравенств с варьируемыми параметрами.

К задаче о глобальной асимптотической устойчивости тесно примыкает задача о числе проскальзываний циклов, впервые поставленная Дж. Стокером [7] для математического маятника, испытывающего сопротивление воздуха, пропорциональное первой степени скорости. На многомерные фазовые системы эта задача была обобщена в статье [8].

***Определение* 1.** Говорят, что решение $\{z(t), \sigma(t)\}$ системы (1) проскальзывает k циклов, если существует такой момент $\hat{t}$, что $|\sigma(\hat{t}) - \sigma(0)| = k\Delta$, и $|\sigma(t) - \sigma(0)| < (k+1)\Delta$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

В статье [8] путем применения метода нелокального сведения и метода периодических функций Ляпунова для решений системы (1) получены частотные критерии, позволяющие строить оценки числа проскальзываний циклов. В эти критерии был затем введен дополнительный варьируемый параметр для случая дифференцируемой нелинейной функции [9]. Они были распространены на распределенные [10] и на дискретные [11] фазовые системы. В статье [12] частотные критерии, установленные в работе [8], сопрягаются с методом линейных матричных неравенств, что дает возможность эффективно применять их к конкретным системам.

В данной статье продолжено исследование случая дифференцируемой нелинейности, начатое в монографии [9]. В статье используется обобщение периодических функций Ляпунова, примененных в [9]. В итоге для построения оценок числа проскальзываний циклов устанавливаются новые многопараметрические частотные критерии.

1. Рассмотрим автономную фазовую систему (1). Будем предполагать, что матрица A – гурвицева, пара (A, b) – управляема, пара (A, c) – наблюдаема, функция $\varphi(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой функцией с конечным числом простых нулей на промежутке $[0,\Delta)$. Для определенности предположим, что

$$\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma < 0. \tag{2}$$

Линейная часть системы (1) характеризуется передаточной функцией от входа φ к выходу $(-\dot{\sigma})$. Она имеет вид

$$K(p) = -\rho + c^*(A - pE_m)^{-1}b \qquad (p \in \mathbb{C}),$$

где E_m – единичная $m \times m$-матрица. Пусть числа α_1 и α_2 таковы, что

$$\alpha_1 \leq \frac{d\varphi}{d\sigma} \leq \alpha_2 \qquad (\sigma \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

Заметим, что $\alpha_1\alpha_2 < 0$.

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{(1 - \alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma))(1 - \alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma))}\ ,$$

$$r_j(k, æ, x) = \frac{\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma)d\sigma + (-1)^j \frac{x}{æk}}{\int\limits_0^\Delta |\varphi(\sigma)|d\sigma} \qquad (j = 1, 2)\ ,$$

$$r_{0j}(k, æ, x) = \frac{\int\limits_0^\Delta \varphi(\sigma)d\sigma + (-1)^j \frac{x}{æk}}{\int\limits_0^\Delta \Phi(\sigma)|\varphi(\sigma)|d\sigma} \qquad (j = 1, 2)\ .$$

Докажем лемму ляпуновского типа.

Лемма 1. *Пусть существует такое целое число k, такие неотрицательные числа a и a_0, положительные числа ε, δ, τ и число $æ \neq 0$, а также такие непрерывно дифференцируемые при $t \geq 0$ функции $\sigma(t)$ и $W(t)$, что выполняются следующие требования:*

1)

$$\frac{dW(t)}{dt} + æ\varphi(\sigma(t))\frac{d\sigma(t)}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right)^2 + \delta\varphi^2(\sigma(t)) + \tau\Phi^2(\sigma(t))\left(\frac{d\sigma(t)}{dt}\right)^2 \leq 0; \tag{4}$$

2) $a + a_0 = 1$;

3) матрицы $T_j(W(0))$, где

$$T_j(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon & \dfrac{aær_j(k, æ, x)}{2} & 0 \\ \dfrac{aær_j(k, æ, x)}{2} & \delta & \dfrac{a_0ær_{0j}(k, æ, x)}{2} \\ 0 & \dfrac{a_0ær_{0j}(k, æ, x)}{2} & \tau \end{Vmatrix}$$

являются положительно определенными ($j = 1, 2$);

4) величина $\bar{t}$ такова, что $W(\bar{t}) \geq 0$.

Тогда $|\sigma(\bar{t}) - \sigma(0)| \neq k\Delta$.

Доказательство. Пусть положительное число ε_0 столь мало, что матрицы $T_j(W(0)+\varepsilon_0)$ $(j=1,2)$ являются положительно определенными. Определим для $j=1,2$ следующие функции:

$$F_j(\sigma) = \varphi(\sigma) - r_j|\varphi(\sigma)|,$$

$$\Psi_j(\sigma) = \varphi(\sigma) - r_{0j}|\varphi(\sigma)|\Phi(\sigma),$$

где

$$r_j = r_j(k, æ, W(0)+\varepsilon_0),$$

$$r_{0j} = r_{0j}(k, æ, W(0)+\varepsilon_0).$$

Определим также функции ляпуновского типа

$$V_j(t) = W(t) + æ\left(a\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} F_j(\sigma)d\sigma + a_0\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} \Psi_j(\sigma)d\sigma\right).$$

Вычислим производные

$$\frac{dV_j(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dt} + æaF_j(\sigma(t))\dot\sigma(t) + æa_0\Psi_j(\sigma(t))\dot\sigma(t).$$

Согласно требованию 1) доказываемой леммы, установим, что справедливо неравенство

$$\frac{dV_j}{dt} \le -\varepsilon\dot\sigma^2 - \tau\left(\Phi(\sigma)\dot\sigma\right)^2 - æar_j|\varphi(\sigma)|\dot\sigma - æa_0r_{0j}|\varphi(\sigma)|\Phi(\sigma)\dot\sigma - \delta\varphi^2(\sigma(t)).$$

Из положительной определенности матриц $T_j(W(0)+\varepsilon_0)$ $(j=1,2)$ вытекает, что

$$\frac{dV_j}{dt} \le 0 \quad (j=1,2) \tag{5}$$

и, следовательно, для всех $t\ge 0$ справедливы неравенства

$$V_j(t) \le V_j(0) = W(0). \tag{6}$$

Предположим теперь, что

$$\sigma(\bar t) = \sigma(0) + k\Delta.$$

Тогда

$$V_1(\bar t) = W(\bar t) + kæ\left(\int\limits_0^\Delta (aF_1(\sigma) + a_0\Psi_1(\sigma))d\sigma\right).$$

Но

$$\int_0^\Delta F_1(\sigma)d\sigma = \int_0^\Delta \Psi_1(\sigma)d\sigma = \frac{1}{æk}(W(0)+\varepsilon_0).$$

Следовательно,

$$V_1(\bar{t}) = W(\bar{t}) + W(0) + \varepsilon_0 > W(0), \tag{7}$$

что противоречит неравенству (6). Если же предположить, что

$$\sigma(\bar{t}) = \sigma(0) - k\Delta,$$

то аналогичными рассуждениями установим, что

$$V_2(\bar{t}) > W(0),$$

что также противоречит неравенству (6). Этими противоречиями лемма 1 доказана. □

Следствие. Пусть выполнены условия 1)–3) леммы 1. Если для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$W(t) \geq 0,$$

то для всех $t \geq 0$ выполнена оценка

$$|\sigma(t) - \sigma(0)| \leq k\Delta. \tag{8}$$

2. Чтобы воспользоваться леммой 1 для построения оценок числа проскальзываний циклов решений системы (1), проведем сначала дополнительные рассмотрения. Прежде всего, следуя [1], осуществим расширение фазового пространства системы (1). Введем в рассмотрение $(m+1)\times(m+1)$-матрицу

$$Q = \left\| \begin{matrix} A & b \\ O & O \end{matrix} \right\|,$$

$(m+1)$-векторы

$$L = \left\| \begin{matrix} O \\ 1 \end{matrix} \right\|, \qquad D = \left\| \begin{matrix} c \\ \rho \end{matrix} \right\|, \qquad y(t) = \left\| \begin{matrix} z(t) \\ \varphi(\sigma(t)) \end{matrix} \right\|$$

и функцию

$$\xi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(\sigma(t)).$$

Функции $y(t)$ и $\xi(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = Qy(t) + L\xi(t), \\ \dfrac{d\sigma(t)}{dt} = D^* y(t). \end{cases} \tag{9}$$

Из управляемости пары (A, b) следует управляемость пары (Q, L).

Рассмотрим квадратичную форму аргументов $y \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\xi \in \mathbb{R}$

$$G(y,\xi) = 2y^*H(Qy + L\xi) + æy^*LD^*y + \varepsilon y^*DD^*y+$$

$$+\delta y^*LL^*y + \tau(D^*y - \alpha_1^{-1}\xi)^*(D^*y - \alpha_2^{-1}\xi),$$

где $H = H^*$ – $(m+1)\times(m+1)$-матрица; æ, ε, δ, τ — параметры. Распространим форму $G(y,\xi)$ на комплексные переменные $y \in \mathbb{C}^{m+1}$, $\xi \in \mathbb{C}$ с сохранением эрмитовости, обозначив расширенную форму через $\tilde{G}$. Получим

$$\tilde{G}(y,\xi) = 2\mathrm{Re}\big[y^*H(Qy + L\xi) + æy^*LD^*y + \varepsilon y^*DD^*y+$$

$$+\delta y^*LL^*y + \tau(D^*y - \alpha_1^{-1}\xi)^*(D^*y - \alpha_2^{-1}\xi)\big].$$

Пусть

$$\tilde{M}(y,\xi) = -\mathrm{Re}\ \big[æy^*LD^*y+\varepsilon y^*DD^*y+\delta y^*LL^*y+\tau(D^*y-\alpha_1^{-1}\xi)^*(D^*y-\alpha_2^{-1}\xi)\big].$$

Согласно частотной теореме Якубовича–Калмана, для существования эрмитовой матрицы H (вещественной в вещественном случае), для которой $\tilde{G}(y,\xi) \le 0 \quad (\forall y \in \mathbb{C}^{m+1},\ \ \forall \xi \in \mathbb{C})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\tilde{M}((i\omega E_{m+1} - Q)^{-1}L\xi,\xi) \ge 0, \quad \xi \in \mathbb{C}, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \ne 0.$$

Следуя [1], используем равенства

$$D^*(Q - pE_{m+1})^{-1}L = \frac{1}{p}K(p), \quad L^*(Q - pE_{m+1})^{-1}L = -\frac{1}{p} \quad (p \in \mathbb{C})$$

и установим, что

$$\tilde{M}((pE - Q)^{-1}L\xi,\xi) = |p|^{-2}\xi^*\big(\mathrm{Re}[æK(p) - \tau(K(p) + \alpha_1^{-1}p)^*(K(p) + \alpha_2^{-1}p)]-$$

$$-\varepsilon|K(p)|^2 - \delta\big)\xi \qquad (\xi \in \mathbb{C}, p \in \mathbb{C}).$$

Таким образом, если выполнено частотное условие

$$\mathrm{Re}\big[æK(i\omega) - \tau(K(i\omega) + \alpha_1^{-1}i\omega)^*(K(i\omega) + \alpha_2^{-1}i\omega)\big] - \varepsilon|K(i\omega)|^2 - \delta \ge 0, \quad (10)$$

то существует такая симметричная $(m+1)\times(m+1)$-матрица H, что выполнено неравенство

$$G(y,\xi) \le 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{m+1}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \qquad (11)$$

Рассмотрим решение системы (1) с начальными данными $(z(0), \sigma(0))$. Ему соответствует решение системы (9) с начальными данными

$$y(0) = \left\| \begin{array}{c} z(0) \\ \varphi(\sigma(0)) \end{array} \right\|.$$

Заметим, что в силу гурвицевости матрицы A любое решение $y(t)$ системы (9) ограничено при $t \in [0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть существуют такие неотрицательные числа a, a_0, положительные числа ε, δ, τ, число $æ \neq 0$ и натуральное число k, что выполняются следующие условия:*

1) для всех $\omega \geq 0$ справедливо частотное неравенство (10) ;

2) $a + a_0 = 1$;

3) матрицы $T_j\,(y^*(0)Hy(0) - I)$ $\quad (j = 1, 2)$, где $I = inf_{t \in \mathbb{R}_+} y^*(t)Hy(t)$, являются положительно определенными для некоторой матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству (11). Тогда для решения (1) с начальными данными $(z(0), \sigma(0))$ справедлива оценка (8) при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Оно основано на применении леммы 1. Пусть $W(t) = y^*(t)Hy(t) - I$. Тогда

$$\frac{dW(t)}{dt} = 2y^*(t)H\left(Qy(t) + L\xi(t)\right).$$

Условие 1) доказываемой теоремы обеспечивает выполнение неравенства (11), откуда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{dW(t)}{dt} &\leq -æ\varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) - \varepsilon\dot{\sigma}^2(t) - \delta\varphi^2(\sigma(t)) - \\ &-\tau\dot{\sigma}^2(t)\left(1 - \alpha_1^{-1}\varphi'(\sigma(t))\right)\left(1 - \alpha_2^{-1}\varphi'(\sigma(t))\right).\end{aligned}$$

Так что условие 1) леммы 1 выполнено. Условия 2) и 3) теоремы 1 совпадают с условиями 2) и 3) леммы 1 соответственно. Кроме того,

$$W(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Таким образом, справедливость теоремы 1 вытекает из следствия к лемме 1. □

Теорема 2. *Пусть $\sigma(0) \in (\sigma_1, \sigma_2)$, где $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$, $\quad |\sigma_1 - \sigma_2| < \Delta$.*

Пусть существуют такие неотрицательные числа a, a_0, натуральное число k, положительные числа ε, δ, τ и число $æ \neq 0$, что выполняются следующие условия:

1) для всех $\omega \geq 0$ справедливо частотное неравенство (10) ;

2) $a + a_0 = 1$.

Если для матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей неравенству (11), и при $i = 1$, и при $i = 2$ выполнены неравенства $w_i \equiv y^*(0)Hy(0) - æ \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma_i} \varphi(\sigma)d\sigma < 0$, то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка $|\sigma(0) - \sigma(t)| < \Delta$. Если же $w_p \geq 0$ для $p = 1$ или $p = 2$ и матрица $T_j(w_p)$, где $j = \frac{1}{2}(3 - sign æ)$, положительно определена для указанного значения p, то для решения системы (1) с начальными условиями $(z(0), \sigma(0))$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка

$$|\sigma(t) - \sigma(0)| < \Delta(k + 1).$$

Доказательство. Оно основано на лемме 1. Пусть $(z(t), \sigma(t))$ — решение системы (1), а $W(t) = y^*(t)Hy(t)$. Так же, как и в доказательстве теоремы 1, доказываем, что условие 1) леммы 1 выполнено. Пусть для $t = \hat{t}$ выполнено $\sigma(\hat{t}) = \sigma_1$ или $\sigma(\hat{t}) = \sigma_2$. Рассмотрим $(\hat{z}(t), \hat{\sigma}(t))$ — решение системы (1) с начальными данными $\hat{z}(0) = z(\hat{t})$, $\hat{\sigma}(0) = \sigma(\hat{t})$. Используем обозначения $\hat{y} = \left\| \begin{matrix} \hat{z} \\ \varphi(\hat{\sigma}(t)) \end{matrix} \right\|$, $\hat{W}(t) = \hat{y}^*(t)H\hat{y}(t)$. Заметим, что $\varphi(\hat{\sigma}(0)) = 0$. Предположим, что $\hat{\sigma}(\bar{t}) = \hat{\sigma}(0) \pm k\Delta$ (причем $|\hat{\sigma}(t) - \hat{\sigma}(0)| < k\Delta$ при $t < \bar{t}$). Тогда $\varphi(\hat{\sigma}(\bar{t})) = 0$. Запишем матрицу H в виде

$$H = \left\| \begin{matrix} H_0 & h \\ h^* & \alpha \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

где $H_0 = H_0^*$ – $m \times m$-матрица, h – m-вектор, α – число. Тогда $\hat{W}(\bar{t}) = \hat{z}^*(\bar{t})H_0\hat{z}(\bar{t})$. Покажем, что матрица H_0 является положительно определенной. Действительно, для матрицы H выполнено условие (11), откуда

$$G(y, 0) \le 0, \quad y \in \mathbb{R}^{m+1}. \tag{13}$$

Положим $y = \left\| \begin{matrix} z \\ 0 \end{matrix} \right\|$ $(z \in \mathbb{R}^m)$. Тогда $y^*L = 0$, $D^*y = c^*z$, $Qy = \left\| \begin{matrix} Az \\ 0 \end{matrix} \right\|$, $y^*HQy = z^*H_0Az$. Из (13) следует, что

$$2z^*H_0Az + (\varepsilon + \tau)|c^*z|^2 \le 0,$$

откуда в силу гурвицевости матрицы A и наблюдаемости (A, c) следует, что $H_0 > 0$ [6]. Таким образом,

$$\hat{W}(\bar{t}) \ge 0. \tag{14}$$

Заметим, что

$$\hat{W}(0) \ge 0. \tag{15}$$

С другой стороны, $\hat{W}(0) = W(\hat{t})$. Из (11) вытекает, что

$$\frac{dW(t)}{dt} \le -æ\varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t), \tag{16}$$

и, следовательно,

$$W(\hat{t}) \le W(0) - æ\int_0^{\hat{t}} \varphi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = W(0) - æ\int_{\sigma(0)}^{\sigma_j} \varphi(\sigma)d\sigma \quad (j = 1 \text{ или } 2). \tag{17}$$

Таким образом,

$$W(0) - æ\int_{\sigma(0)}^{\sigma_j} \varphi(\sigma)d\sigma \ge \hat{W}(0) \ge 0. \tag{18}$$

Если $w_j < 0$ и для $j = 1$, и для $j = 2$, то неравенство (18) приводит к противоречию. Следовательно, в этом случае $\sigma(t) \neq \sigma_1$ и $\sigma(t) \neq \sigma_2$.

Пусть хотя бы одно из $w_p \geq 0$ ($p = 1$ или 2). Используя вид функций $r_j(k,æ,x)$ и $r_{0j}(k,æ,x)$, легко показать, что, в силу неравенства (18), условия теоремы 2 гарантируют выполнение для $\hat{W}(t)$ условия 3) леммы 1. Действительно, пусть $æ > 0$. Тогда, в силу предположения (2), для любого $x > 0$ справедливы неравенства $|r_1(k,æ,x)| \geq |r_2(k, æ,x)|$, $|r_{01}(k,æ,x)| \geq$ $\geq |r_{02}(k,æ,x)|$. С другой стороны, если $x_1 \geq x \geq 0$, то $|r_1(k,æ,x_1)| \geq$ $\geq |r_1(k,æ,x)|$, $|r_{01}(k,æ,x_1)| \geq |r_{01}(k,æ,x)|$. Тогда из того, что $T_1(x_1) > 0$, следует, что $T_1(x) > 0$ и $T_2(x) > 0$. Аналогичные рассуждения справедливы и для случая $æ<0$.

Итак, все условия для функций $\hat{\sigma}(t)$ и $\hat{W}(t)$ леммы 1 выполнены. Так как $\hat{W}(\bar{t}) \geq 0$, то согласно лемме 1 справедливо неравенство $|\hat{\sigma}(0) - \hat{\sigma}(\bar{t})| \neq k\Delta$, откуда следует, что для всех $t > 0$ справедлива оценка $|\hat{\sigma}(0) - \hat{\sigma}(\bar{t})| < k\Delta$. Но тогда для всех $t > 0$

$$-(k+1)\Delta < \sigma(t) < (k+1)\Delta.$$

□

Из доказательства теоремы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(\sigma(0)) = 0$. Пусть далее для некоторых чисел a, $a_0 \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta, \tau > 0$ и $æ \neq 0$ выполнены условия 1), 2) теоремы 2 и матрицы $T_j(y^*(0)Hy(0))$ являются положительно определенными для матрицы $H = H^*$, удовлетворяющей (11). Тогда для всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка $|\sigma(t) - \sigma(0)| < \Delta k$.*

1. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. *Tricomi F.* Integrazione di un'equazione differenziale prezentatasi in electrotecnica // Annal della Roma Schuola Normale Superiore de Pisa. Scienza Phys. e Math. – 1933. – **2**, № 2. – P. 1–20.
3. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
4. *Бакаев Ю.И., Гуж А.А.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Допплера // Радиотехника и электроника. – 1965. – **10**, № 1. – С. 175–196.
5. *Леонов Г.А.* Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации// Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 2. – С. 238–244.
6. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, № 2. – С. 265–289.
7. *Stoker J.J.* Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems. – New York: Interscience, 1950. – 273 p.
8. *Леонов Г.А., Ершова О.Б.* Частотные оценки числа проскальзываний циклов в фазовых системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. – 1983.– № 5. – С. 65–72.
9. *Leonov G.A., Reitmann V., Smirnova V.B.* Non-Local Methods for Pendulum-Like Feedback Systems. – Stuttgart–Leipzig: Teubner VerlagsgesellSchaft, 1992. – 242 p.

10. *Киселева О.Б., Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Оценка числа проскальзываний циклов в фазовых системах с распределенными параметрами// Численные методы в краевых задачах мат. физики. Межвуз. тематич. сб. тр. – Л.: ЛИСИ, 1985. – С. 116–124.
11. *Смирнова В.Б., Утина Н.В., Шепелявый А.И.* Оценка сверху числа проскальзываний циклов в дискретных системах с периодической нелинейностью // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. – 2003. – Вып. 2. – С. 48–57.
12. *Ying Yang, Lin Huang* Cycle slipping in phase synchronization systems // Physics Letters A. – 2007. – **362**, № 3. – P. 183–188.

A.A. Perkin, E.L. Perieva, V.B. Smirnova, A.I. Shepelyavyi

Frequency-algebraic estimates of a number of slipped cycles for multidimensional phase systems with differentiable nonlinearities

A system of indirect control with periodic differentiable nonlinearity is considered. By means of periodic Lyapunov functions and Yakubovich–Kalman frequency-domain theorem certain estimates for the deviation of the output from its initial value are obtained. The estimates are established with the help of frequency-domain inequalities.

Keywords: *phase system, cycle slipping, direct Lyapunov method, frequency-domain criteria.*

О.О. Перкін, К.Л. Пер'єва, В.Б. Смірнова, О.І. Шепелявий

Частотно-алгебраїчні оцінки числа проковзування циклів для багатовимірних фазових систем з диференційовними нелінійностями

Розглянуто системи непрямого керування з періодичними диференційовними нелінійностями. За допомогою методу періодичних функцій Ляпунова і частотної теореми Якубовича–Калмана отримано оцінки зверху для відхилення виходу системи в довільний момент часу від його початкового значення. Оцінки встановлюються шляхом перевірки нерівностей щодо частотної характеристики лінійної частини системи.

Ключові слова: *фазова система, проковзування циклів, прямий метод Ляпунова, частотні критерії.*

Санкт-Петербургский гос. архитектурно-строительный ун-т,
Санкт-Петербургский гос. ун-т
Получено 27.07.12

ofercinn@gmail.com; ekaterinaperieva@gmail.com;
root@al2189.spb.edu; as@as1020.spb.edu