УДК 531.36

©2012. В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА

Рассмотрена задача о влиянии демпфирующего момента на устойчивость вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой вокруг главной оси инерции, несущей центр масс. Найдены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости изучаемого движения, которые налагают ограничения на распределение масс в теле, величину скорости вращения и коэффициент трения. Установлено, что при вращении вокруг нижнего положения относительного равновесия движение становится асимптотически устойчивым. При вращении вокруг верхнего положения равновесия влияние демпфирующего момента является двояким – гироскопически стабилизированное вращение тела может терять свойство устойчивости, но может становиться и асимптотически устойчивым. Примечательным является тот факт, что последний эффект стабилизации реализуем только для динамически несимметричного тела.

Ключевые слова: *демпфирующий момент, структура сил, равномерные вращения, асимптотическая устойчивость.*

В последние десятилетия при исследовании неконсервативных механических систем большое внимание уделялось изучению влияния структуры сил на динамику и устойчивость движения этих систем. Наряду с результатами общего характера, посвященными обобщению и развитию классических теорем Томсона – Тэта – Четаева [1, 2], большое число работ связано с исследованием поведения конкретных систем [3 – 9]. При этом достаточно важным обстоятельством, влияющим на сложность исследования и его результаты, является отсутствие или наличие циркуляционных (неконсервативных позиционных) сил. В первом случае часто можно использовать вышеназванные теоремы и их обобщения. Соответствующие формулировки обычно содержат требования качественного порядка – полная диссипация энергии, произвольные гироскопические силы, устойчивость положения равновесия при одних (любых по величине) потенциальных силах ([2, теоремы 1 – 4 п. 6.5]) и пр. Во втором случае ситуация принципиально иная, поскольку устойчивость или неустойчивость движения зависит от количественных соотношений между величинами действующих сил. В частности, движение гироскопически стабилизированной системы теряет устойчивость при добавлении либо одних диссипативных, либо одних циркуляционных сил, но может становиться асимптотически устойчивым при их совместном воздействии (примером может служить вращение ротора на гибком валу, см. [6, п. 3.2; 7]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела под действием демпфирующего момента $\boldsymbol{M} = -k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$:

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + P\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела в связанной системе координат, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{s}$ – вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, P – вес тела.

В [10] получены условия устойчивости равномерных вращений тела вокруг главной оси, несущей центр масс, которым соответствует решение

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)^T, \qquad \boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^T, \tag{2}$$

символ T обозначает транспонирование.

Соответствующие уравнения в вариациях сводятся [10] к системе

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{x} = (\tilde{\nu}_2, \sqrt{a}\tilde{\nu}_1)^T$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1, 1)$, $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(\varkappa, \frac{\varkappa}{a})$, $\boldsymbol{G} = \frac{b}{\sqrt{a}}\,\boldsymbol{\Lambda}$,

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(1 - b + \mu, (a - b + \mu)/a), \; \boldsymbol{P} = \frac{\varkappa}{\sqrt{a}}\,\boldsymbol{\Lambda}, \; \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

значком “тильда” обозначены возмущения. Очевидно, без ограничения общности, можно считать $\omega_0 > 0$. Здесь использованы следующие обозначения

$$a = \frac{J_2}{J_1}, \quad b = \frac{J_1 + J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu = \frac{P}{J_1\omega_0^2}, \quad \varkappa = \frac{k}{J_1\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t. \tag{4}$$

С учетом неравенств треугольника для моментов инерции множество возможных значений параметров a, b определяется неравенствами

$$a > 0, \; 0 < b < 2, \; b < 2a. \tag{5}$$

Характеристическое уравнение для (3) таково:

$$a\lambda^4 + \varkappa(a+1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu)]\lambda^2 +$$
$$+\varkappa(a + 1 - 2\mu)\lambda + (b - 1 + \mu)(b - a + \mu) + \varkappa^2 = 0. \tag{6}$$

Согласно критерию Рауса–Гурвица [11] все корни имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда

$$\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu) > 0, \quad (a + 1 - 2\mu) > 0; \tag{7}$$

$$(b - 1 + \mu)(b - a + \mu) + \varkappa^2 > 0; \tag{8}$$

$$\Delta_3 = -\mu\varkappa^2[-\mu(a-1)^2 + 2(a+1)(\varkappa^2 + b^2)] > 0. \tag{9}$$

2. Анализ условий асимптотической устойчивости равномерных вращений. Найдем условия совместности системы (7) – (9). Напомним [12], что необходимые условия устойчивости обычного тяжелого гироскопа (без демпфирующего момента, т.е. при $\varkappa = 0$) суть

$$c_2 = -(a+1)(\mu - \mu_0) > 0, \; c_0 = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) > 0, \; d = c_2^2 - 4ac_0 > 0. \tag{10}$$

Здесь

$$\mu_0 = (2a + b^2)/(a + 1) - b, \; \mu_1 = \min(a, 1) - b, \; \mu_2 = \max(1, a) - b. \tag{11}$$

Рассмотрим вначале более простой случай висящего гироскопа ($\mu < 0$). Выражение для d из (10) можно представить следующим образом:

$$d = [\mu(a-1) - b(a+1-b)]^2 - 4ab\mu\delta_1 \tag{12}$$

или

$$d = [\mu(a-1) + b(a+1-b)]^2 - 4b\mu\delta_2, \tag{13}$$

где $\delta_1 = -a+b+1$, $\delta_2 = a+b-1$. Если $\delta_1 > 0$, то положительность d следует из первого представления (12). В противном случае имеем $a \geq b+1$, тогда $\delta_2 \geq b+1+b-1 = 2b > 0$, и $d > 0$ в силу (13). Кроме того, легко убедиться в том, что всюду в области (5) выполняется неравенство $\mu_0 > 0$. Поэтому неравенства (10) выполнены тогда и только тогда, когда $\mu \in (-\infty, \mu_1) \bigcup (\mu_2, 0)$, $\mu_2 < 0$. В этом случае условия (7) – (9) также выполнены при любом значении коэффициента $\varkappa \neq 0$ – устойчивые в первом приближении равномерные вращения висящего гироскопа становятся асимптотически устойчивыми.

Предположим теперь, что $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, тогда вращение гироскопа без трения неустойчиво ($c_0 < 0$). Однако при значениях $\varkappa$ больших, чем $\varkappa_2 = [(\mu_1 - \mu)(\mu - \mu_2)]^{1/2}$ свободный член характеристического уравнения (6) положителен, равно как и все остальные коэффициенты этого уравнения.

Таким образом, все условия (7) – (9) выполнены при $\varkappa > \varkappa_2$. Этот результат не изменится, если $\mu \in [\mu_1, 0)$, $\mu_2 > 0$. Если же $\mu_1 > 0$, то условия асимптотической устойчивости выполнены для любых значений $\varkappa$. Демпфирующий момент оказывает стабилизирующее влияние на движение твердого тела: устойчивые в первом приближении вращения всегда переводит в асимптотически устойчивые, а неустойчивые – при дополнительном ограничении снизу на величину коэффициента демпфирования.

Перейдем к рассмотрению случая выпрямленного гироскопа ($\mu > 0$). Теперь уже неравенство (9) не выполняется автоматически для любых допустимых значений параметров. Выражение в фигурных скобках должно быть отрицательно, откуда имеем ограничение для $\varkappa$:

$$\varkappa^2 = \kappa < \kappa_3 = \frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2. \tag{14}$$

Поскольку левая часть (14) положительна, то должно выполняться условие $\kappa_3 > 0$. Иначе система неравенств (7) – (9) будет несовместна. Следовательно, необходимым условием совместности системы (7) – (9) является условие

$$\mu > \mu_3 = \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2}. \tag{15}$$

Из первого неравенства (7) и неравенства (8) получим

$$\kappa > \kappa_1 = (a+1)(\mu+b) - 2a - b^2, \tag{16}$$

$$\kappa > \kappa_2 = -\mu^2 + (a-2b+1)\mu - (b-a)(b-1). \tag{17}$$

Если $\kappa_1 < 0,\ \kappa_2 < 0$, то условия (16), (17) выполняются автоматически, и при анализе их можно не учитывать.

Объединяя условия (14), (16) и (17), получим

$$\kappa_0 = \max(\kappa_1, \kappa_2, 0) < \kappa < \kappa_3. \tag{18}$$

Отметим, что $\kappa_2 > \kappa_1$, если $0 < \mu < \sqrt{a+b^2} - b$ и $\kappa_1 > \kappa_2$, если $\mu > \sqrt{a+b^2} - b$. Для того, чтобы двойное неравенство (18) имело место необходимой является положительность двух выражений

$$\begin{aligned} \kappa_{31} &= \kappa_3 - \kappa_1 = -\frac{a^2+6a+1}{2(a+1)}\mu + 2a - b(a+1), \\ \kappa_{32} &= \kappa_3 - \kappa_2 = \mu^2 + [2b - \frac{a^2+6a+1}{2(a+1)}]\mu + a - b(a+1). \end{aligned} \tag{19}$$

Решая первое неравенство (19) относительно μ, получим

$$\mu < \mu_{31} = \frac{-2(ab-2a+b)(a+1)}{a^2+6a+1}. \tag{20}$$

Так как должно выполняться условие $\mu > 0$, то неравенство (20) имеет смысл при $0 < b < 2a/(a+1)$.

Аналогичным образом из второго неравенства (19) имеем следующие ограничения на μ:

$$\mu < \mu_{32} = \frac{2(a-ab-b)}{a+1}, \tag{21}$$

$$\mu > \frac{1}{2}(a+1). \tag{22}$$

Неравенство (21) имеет смысл при $0 < b < a/(1+a)$.

Не трудно видеть, что выполнение неравенства (22) противоречит второму условию (7) и может быть исключено из рассмотрения. Объединяя указанные ограничения на μ, получим условия совместности системы неравенств (7) – (9)

$$\mu_3 < \mu < \min(\mu_1, \mu_{31}, \mu_{32}). \tag{23}$$

Поскольку

$$\mu_{31} - \mu_{32} = \frac{2a(4b(a+1)+(a-1)^2)}{(1+a^2+6a)(a+1)} > 0, \quad \mu_1 - \mu_{32} = \frac{b(a+1+b)}{a+1} > 0,$$

то $\mu_{31} > \mu_{32}$ и $\mu_1 > \mu_{32}$ для любых значений a и b. Следовательно, (23) перепишется в следующем виде:

$$\mu_3 < \mu < \mu_{32}. \tag{24}$$

Поверхности, соответствующие правой части неравенства (23) и области выполнения неравенства (24), изображены на рис. 1, 2.

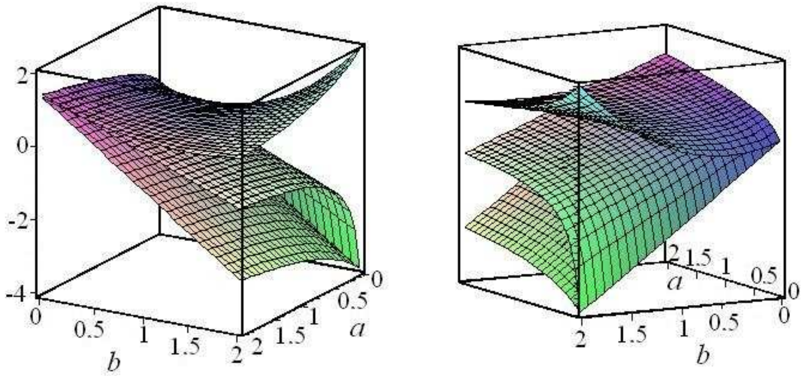

Рис. 1. Вид поверхностей: $\mu = \mu_1(a,b)$ – верхняя, $\mu = \mu_{31}(a,b)$ – средняя, $\mu = \mu_{32}(a,b)$ – нижняя.

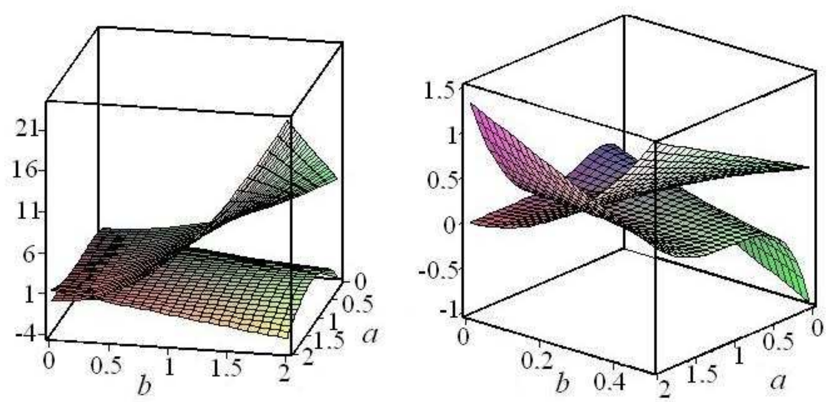

Рис. 2. Вид поверхностей $\mu = \mu_{32}(a,b), \mu = \mu_3(a,b)$.

Для выполнения условия (24) необходимо, чтобы

$$\mu_{32} - \mu_3 = \frac{2a(a-1)^2 - 2b^2(a+1)^2 - 2b(a-1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)^2} > 0. \qquad (25)$$

1. Если $0 < a < 1$, то $(a-1)/(a+1) < 0 < a(1-a)/(a+1)$. И тогда выполнение условия (25) будет при $0 < b < a(1-a)/(a+1)$.

2. При $a > 1$ имеет место неравенство $a(1-a)/(a+1) < 0 < (a-1)/(a+1)$; тогда условие (25) справедливо при $0 < b < (a-1)/(a+1)$.

Следовательно, множество, на котором выполнена система (7) – (9), не пустое и описывается неравенствами (24) с учетом ограничения (25).

Таким образом, необходимым и достаточным[1] условием асимптотической устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа является система неравенств (18), (24) и (25). Последнее из них накладывает ограничения на распределение масс в теле и является необходимым для асимптотической устойчивости. Ему соответствует заштрихованная область на рис. 3. Второе условие определяет диапазон допустимых значений угловой скорости вращения. Первое условие определяет интервал значений (κ_0, κ_3) приведенного коэффициента демпфирования κ, которые переводят устойчивые (неасимптотически) вращения выпрямленного тяжелого гироскопа в асимптотически устойчивые.

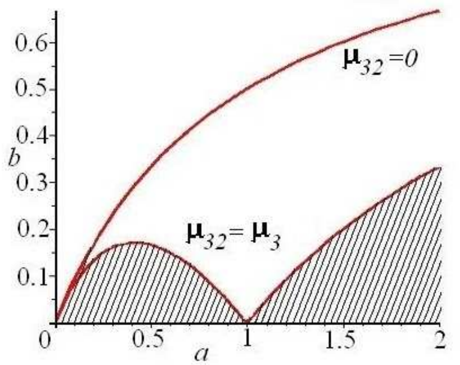

Рис.3. Область выполнения условия (25).

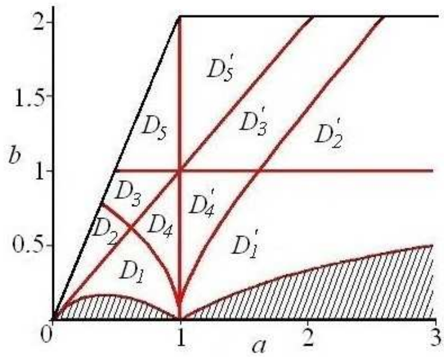

Рис.4. Разбиение на подобласти.

3. Оценка влияния демпфирующего момента на устойчивость. Сравним полученные условия (18), (24), (25) с условиями устойчивости равномерных вращений выпрямленного гироскопа (без демпфирующего момента), приведенными в [13]. Эти условия представлены в виде таблицы.

Таблица в других обозначениях приведена в [12], там же введен термин “тонкий” (“толстый”), который в наших обозначениях соответствует случаю $a < 1 - b^2 (a > 1 - b^2)$.

Величины $\omega_1, \omega_2, \omega_\star$, определяющие границы интервалов из таблицы, соответствуют значениям $\mu_1 = a - b$, $\mu_2 = 1 - b$ и меньшему из корней уравнения $d(\mu) = 0$

$$\mu_\star = \frac{b}{(1-a)^2}\left[b(a+1) - (1-a)^2 - 2\sqrt{a(a+b-1)(1+b-a)}\right].^2$$

Их явные выражения через параметры исходной системы могут быть получены с помощью формул (4).

В областях D'_j $(j = \overline{1;5})$ условия устойчивости получаются из приведенных в таблице посредством замены $(a, b, \mu) \longrightarrow (1/a, b/a, \mu/a)$.

[1]Случай, когда хотя бы одно из неравенств переходит в равенство, является критическим в смысле Ляпунова и требует дополнительного исследования.

[2]Легко убедиться в том, что $\mu_\star > 0$ в областях D_3, D_4, D_5.

Область	Вид гироскопа	Вращение устойчиво при
$D_1 : b < a < 1 - b^2$	короткоосный, тонкий	$\omega \in (\omega_1, \infty)$
$D_2 : a < b < \sqrt{1-a}$	среднеосный, тонкий	$\omega \in \emptyset$
$D_3 : 1 - b^2 < a < b, b < 1$	среднеосный, толстый	$\omega \in (\omega_\star, \omega_2)$
$D_4 : \sqrt{1-a} < b < a$	короткоосный, толстый	$\omega \in (\omega_\star, \omega_2) \cup (\omega_1, \infty)$
$D_5 : b > 1$	длинноосный	$\omega \in (\omega_\star, \infty)$

Как можно видеть на рис. 4, область значений a, b, в которой выполнены условия асимптотической устойчивости, принадлежит области $D_1(D_1')$. Промежуток (μ_3, μ_{32}) допустимых значений μ принадлежит промежутку $(0, \mu_1)$ (ранее было показано, что $\mu_{32} < \mu_1$). Интервал значений угловой скорости, при которых вращение будет устойчивым, сужается – нижняя граница увеличивается, и появляется ограничение сверху. Для точек же (a, b), принадлежащих незаштрихованной части рисунка, имеет место неустойчивость, независимо от скорости вращения тела и величины демпфирующего момента. Влияние последнего на устойчивость вращений выпрямленного гироскопа, таким образом, в основном негативно. Вместе с тем, как было показано в [14], для *симметричного* гироскопа диссипация энергии “разрушает” устойчивость ***любых*** вращений выпрямленного гироскопа (не трудно убедиться в том, что при $a = 1,\ \mu > 0$ неравенство (9) не выполняется). Считаем достойным внимания тот факт, что несимметрия тела может оказывать положительное влияние на устойчивость равномерных вращений.

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 536 с.
2. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях неконсервативных систем // Прикл. математика и механика. – 2000. – **64**, вып. 6. – С. 933–941.
4. *Agafonov S.A.* Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems // J. Math. Sci. Dynamical systems II. – 2002. – **112**, № 5. – P. 4419–4497.
5. *Пузырев В.Е.* Влияние сил вязкого трения на устойчивость стационарных движений механических систем при наличии частичной диссипации энергии // Докл. НАН Украины. – 2004. – N 8. – С. 61–65.
6. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах / Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1988. – 304 с.
7. *Стороженко В.О.* До дослідження дії неконсервативних позиційних сил в системах з обертанням // Доп. НАНУ. Сер. Мат., природн., техн. науки. – 1998. – № 7. – С. 67–70.
8. *Кириллов О.Н.* Об устойчивости неконсервативных систем с малой диссипацией // Современная математика и ее приложения. – 2005. – **36**. – С. 107–117.
9. *Агафонов С.А.* Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем // Прикл. математика и механика. – 2010. – **74**, вып. 4. – С.560–566.
10. *Пузырев В.Е., Топчий Н.В.* Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 132–140.

11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
12. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – Т.1. – 351 с.
13. *Пузырев В.Е.* Анализ условий устойчивости равномерных вращений тяжелого гироскопа на упруго закрепленном основании// Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 124–127.
14. *Матросов В.М.* К теории устойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 4. – С. 992–1002.

V.E. Puzyrev, N.V. Savchenko

The damping momentum's influence on the stability of the non-symmetrical gyro's permanent rotations

The problem of the damping momentum influence on the stability of permanent rotations of the rigid body with fixed point is considered. The necessary and sufficient conditions of the stability are found, which give restrictions for mass distribution of the body, the angular velocity of the rotation and the damping coefficient. It is shown that the motion for downside position of the gyro becomes asymptotically stable. The influence of the damping for the upside rotations may be two-fold: gyroscopically stabilized motion may lose its stability, or may become asymptotically stable. The noteworthy is the fact that the last stabilization effect is realizable for the non-symmetric gyro only.

Keywords: *damping momemtum, structure of forces, permanent rotations, asymptotic stability.*

В.Є. Пузирьов, Н.В. Савченко

Оцінка впливу демпфірувального моменту на стійкість рівномірних обертань несиметричного гіроскопа

Розглянуто задачу про вплив демпфірувального моменту на стійкість обертань твердого тіла з нерухомою точкою. Знайдено необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості руху, які накладають обмеження на розподіл мас у тілі, величину кутової швидкості і коефіцієнт тертя. Встановлено, що у разі обертань навкруги нижчого положення відносної рівноваги рух стає асимптотично стійким. У разі обертання навкруги верхнього положення рівноваги вплив демпфірувального моменту може мати такі наслідки: стабілізоване за рахунок гіроскопічних сил обертання може отримати стійкість або стати асимптотично стійким. Останній ефект стабілізації має місце лише для динамічно несиметричного тіла.

Ключові слова: *демпфірувальний момент, структура сил, рівномірні обертання, асимптотична стійкість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vpsr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 01.11.12