

УДК 531.38, 531.36

©2012. Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

СВОЙСТВО ПРИТЯЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ АСИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается движение гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании в поле силы тяжести и имеющего вертикальную наружную ось подвеса. Относительно оси ротора действует момент, равный алгебраической сумме момента сил трения и вращающего момента асинхронного электродвигателя. Моменты сил трения и какие-либо управляющие моменты относительно осей подвеса отсутствуют. Уравнения движения такой системы допускают семейство решений, которые описывают ее стационарные движения — регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса и равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси. При достаточно общих предположениях показано, что любое движение прибора с течением времени стремится к некоторому стационарному движению.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, асинхронный электродвигатель, стационарное движение, принцип Ла-Салля, глобальное притяжение.

Введение. При исследовании динамики гироскопа в кардановом подвесе часто предполагают, что трение на осях подвеса и ротора отсутствует. На практике моменты сил трения относительно осей подвеса действительно пренебрежимо малы, но на быстровращающийся ротор действует значительный момент диссипативных сил, и поэтому для поддержания вращения ротора используется электродвигатель, статором которого служит внутренняя карданова “рамка”. Основные типы электродвигателей — асинхронный и синхронный.

Если наружная ось подвеса вертикальна или же прибор статически уравновешен, то при обоих типах электродвигателей уравнения движения прибора допускают семейство решений, описывающих его стационарные движения — регулярные прецессии ротора вокруг наружной оси подвеса и равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси.

В работах [1, 2] на основе обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе [3], снабженного электродвигателем, показано, что достаточным и, как правило, необходимым условием устойчивости таких движений является наличие изолированного минимума приведенной потенциальной энергии. В работах [4, 5] обнаружено свойство локального притяжения стационарных движений. Оно состоит в том, что при выполнении условия минимума приведенной потенциальной энергии возмущенное движение, соответствующее малым начальным возмущениям, с течением времени стремится к стационарному движению, близкому к невозмущенному.

В настоящей работе рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, снабженный асинхронным электродвигателем. Установлено, что для большинства конструкций такого прибора (в том числе и для обычно рассматривае-

мой модели [6]) свойство притяжения стационарных движений имеет глобальный характер, т. е. любое движение прибора с течением времени стремится к некоторому стационарному движению. Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие это свойство.

1. Исходные соотношения. В работе принята следующая обобщенная модель гироскопа в кардановом подвесе [3], берущая свое начало от статьи [7]. Динамически симметричный ротор заключен в карданов подвес, составленный из двух “рамок” произвольной формы, внутренняя ось подвеса неколлинеарна наружной оси подвеса и оси ротора, и эти три оси, вообще говоря, не пересекаются в одной точке. Относительно оси ротора действуют момент сил трения и вращающий момент электродвигателя. Какие-либо диссипативные или управляющие моменты на осях подвеса предполагаются отсутствующими. Наружная ось подвеса неподвижна и направлена вертикально (или же эта ось неvertикальна, но прибор статически уравновешен).

Положение такой механической системы в каждый момент времени t определяют углы α , β , φ , где α — угол поворота наружной рамки относительно основания, β — угол поворота внутренней рамки относительно наружной, φ — угол поворота ротора относительно внутренней рамки. При сделанных предположениях кинетическая энергия системы выражается формулой

$$T = \frac{1}{2} [G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi}], \quad (1)$$

где C — осевой момент инерции ротора, коэффициенты H, R зависят только от постоянных механических параметров, коэффициенты G, N, Q , а также потенциальная энергия силы тяжести U зависят от угла β по формулам [3]

$$\begin{aligned} U(\beta) &= u_0 + u_1 \sin \beta + u_2 \cos \beta, \\ G(\beta) &= g_0 + g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta + g_3 \sin 2\beta + g_4 \cos 2\beta, \\ N(\beta) &= n_0 + n_1 \sin \beta + n_2 \cos \beta, \quad Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_0 — произвольная постоянная, а выражения остальных коэффициентов формул (2) и величин H, R через механические параметры вытекают из формул (8)–(15) статьи [3], если предположить, что наружная ось подвеса вертикальна, ротор динамически симметричен и центр масс ротора находится на оси его вращения. Отметим, что $q_1 \neq 0$, так как $q_1 = C \sin \theta_2 \sin \theta_3$, а синусы углов θ_2, θ_3 , которые внутренняя карданова ось образует с наружной кардановой осью и осью ротора, предполагаются отличными от нуля. Для уравновешенного гироскопа $U = \text{const}$.

Так как кинетическая энергия (1) — положительно определенная квадратичная форма угловых скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$, то, согласно критерию Сильвестра,

$$G(\beta) > 0, \quad J_1(\beta) = G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad J(\beta) > 0 \quad (3)$$

при любом β . Здесь $J(\beta)$ — определитель формы $2T$.

Силы, действующие на ротор со стороны статора (внутренней "рамки"), создают относительно оси ротора момент L , равный алгебраической сумме вращающего момента электродвигателя и момента сил трения относительно оси ротора. В настоящей работе рассматривается случай *асинхронного* электродвигателя. В этом случае для суммарного момента L часто принимают выражение $L = -\lambda\dot{\gamma}$, где $\lambda > 0$ — постоянная, $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, а постоянная $\omega > 0$ меньше угловой скорости вращения магнитного поля в статоре электродвигателя. При более общем подходе (см. [6], с. 107-110) полагают $L = L(\dot{\gamma})$, где $L(\dot{\gamma})$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\dot{\gamma}L(\dot{\gamma}) < 0 \quad (\dot{\gamma} \neq 0), \quad L(0) = 0. \quad (4)$$

2. Уравнения движения и стационарные режимы. При сделанных предположениях обобщенные силы для лагранжевых координат α, β, φ равны $0, -U', L$. Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по β . Пользуясь вместо $\dot{\varphi}$ переменной $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, получаем следующие *лагранжевы* уравнения движения *асинхронного* гироскопа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) \right] &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha}N(\beta) + \dot{\beta}H + (\omega + \dot{\gamma})R \right] - \\ - \dot{\alpha} \left[\frac{\dot{\alpha}}{2}G'(\beta) + \dot{\beta}N'(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q'(\beta) \right] &= -U'(\beta), \\ \frac{d}{dt} \left[\dot{\alpha}Q(\beta) + \dot{\beta}R + (\omega + \dot{\gamma})C \right] &= L(\dot{\gamma}). \end{aligned} \quad (5)$$

Они эквивалентны нормальной системе четвертого порядка с фазовым вектором $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$.

Уравнения (5) имеют семейство стационарных решений

$$\dot{\alpha} = \Omega^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0, \quad (6)$$

где постоянные Ω^0, β^0 связаны соотношением

$$-\Omega^0 \left[\frac{1}{2}\Omega^0 G'(\beta^0) + \omega Q'(\beta^0) \right] + U'(\beta^0) = 0. \quad (7)$$

Эти решения описывают регулярные прецессии ($\Omega^0 \neq 0$) или равномерные вращения ротора ($\Omega^0 = 0$). Уравнения (5) допускают интеграл

$$\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}). \quad (8)$$

Рассматривая равенство (8) как определение переменной p , перейдем в уравнениях (5) от переменных $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ к переменным $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$. Для этого

во втором и третьем уравнениях (5) заменим $\dot{\alpha}$ выражением, следующим из (8). Получим *преобразованную* систему уравнений движения гироскопа

$$\frac{d}{dt}p = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{(p - \omega Q)N + \dot{\beta}(GH - N^2) + \dot{\gamma}(GR - QN)}{G} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{(p - \omega Q - \dot{\beta}N - \dot{\gamma}Q)^2}{2G} + U \right] = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{(p - \omega Q)Q + \dot{\beta}(GR - QN) + \dot{\gamma}(GC - Q^2)}{G} = L,$$

определяющую $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$. Аргументы $\dot{\gamma}$ у функции L и β у функций G, N, Q, U здесь для краткости опущены. При фиксированном значении p второе и третье уравнения (9) образуют *приведенную* систему S_p , соответствующую данному p .

Так как $G(\beta) > 0$ при любом β согласно (3), то замена переменных $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ переменными $(p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ взаимно однозначна и непрерывна в обе стороны.

Стационарному решению (6) системы (5) соответствует стационарное решение

$$p = p^0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^0 \quad (10)$$

преобразованной системы (9). Здесь $p^0 = \Omega^0 G(\beta^0) + \omega Q(\beta^0)$. Оно существует, если выполнено условие

$$-\frac{p^0 - \omega Q(\beta^0)}{G(\beta^0)} \left[\frac{G'(\beta^0)}{2G(\beta^0)} (p^0 - \omega Q(\beta^0)) + \omega Q'(\beta^0) \right] + U'(\beta^0) = 0, \quad (11)$$

эквивалентное (7). Условие (11) существования стационарного решения (10) можно записать в виде $U_*(p^0, \beta^0) = 0$, где

$$U_*(p, \beta) = \frac{[p - \omega Q(\beta)]^2}{2G(\beta)} + U(\beta) \quad (12)$$

— приведенная потенциальная энергия.

Из формул (2) следует, что приведенная потенциальная энергия является 2π -периодической функцией переменной β . Поэтому при любом значении постоянной p условие $U_*(p, \beta) = 0$ существования стационарных решений определяет по крайней мере два значения угла β , они соответствуют точкам абсолютного минимума и максимума $U_*(p, \beta)$ как функции β .

При записи условия существования стационарных решений в виде (7) оно является квадратным уравнением относительно угловой скорости прецессии Ω . Поэтому на тех интервалах изменения β , где дискриминант этого уравнения положителен, при каждом значении угла β существуют по крайней мере два стационарных режима с разными угловыми скоростями прецессии.

Кроме того, не исключается существование значений β , для которых условие вида (7) выполняется при любом значении Ω . Таким образом, множество стационарных режимов гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем, геометрически изображается совокупностью кривых и прямых на плоскости β, Ω . Для обычной модели гироскопа в кардановом подвесе геометрическая структура множества стационарных режимов на плоскости β, Ω изучена в [8].

3. Применение принципа Ла-Салля к асинхронному гироскопу. Согласно формулам (2), (12), приведенная потенциальная энергия $U_*(p, \beta)$ — непрерывная 2π -периодическая функция переменной β . Пусть $U_{*\min}(p)$ и $U_{*\max}(p)$ — минимальное и максимальное значения этой функции на промежутке $[0, 2\pi)$. При изменении β на промежутке $[0, 2\pi)$ разность

$$\Delta U_*(p, \beta) = U_*(p, \beta) - U_{*\min}(p) \quad (13)$$

принимает все значения от нуля до $\Delta U_{*\max}(p) = U_{*\max}(p) - U_{*\min}(p)$. В общем случае имеем $\Delta U_{*\max}(p) > 0$. В [1] показано, что в рамках обобщенной модели существуют две специальные конструкции гироскопа в кардановом подвесе, для которых при некотором значении $p = \tilde{p}$ постоянной p функция $U_*(p, \beta)$ является тождественной постоянной по β . В этом случае $\Delta U_{*\max}(\tilde{p}) = 0$.

Определим функцию $V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ фазовых переменных приведенной системы S_p формулой

$$V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) + \Delta U_*(p, \beta), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) &= \\ &= \frac{\dot{\beta}^2[G(\beta)H - N^2(\beta)] + 2\dot{\beta}\dot{\gamma}[G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)] + \dot{\gamma}^2[G(\beta)C - Q^2(\beta)]}{2G(\beta)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из теоремы об изменении полной энергии следует, что производная функции V_p по t в силу приведенной системы S_p равна

$$\dot{V}_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = \dot{\gamma}L(\dot{\gamma}) \quad (16)$$

и, в соответствии с (4), является знакопостоянной отрицательной функцией.

Из неравенств (3) следует, что при любом β функция T_* является определенно положительной квадратичной формой относительно переменных $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$. Следовательно, функция V_p неотрицательна при всех значениях фазовых переменных $\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta$ приведенной системы S_p .

Переменные $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$ могут принимать любые действительные значения, т. е. пара этих переменных является элементом плоскости \mathbb{R}^2 . Значениям угла β , отличающимся на $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), соответствуют одинаковые положения прибора и одинаковые значения приведенной потенциальной энергии

(12). Поэтому переменную β следует рассматривать как точку на окружности единичного радиуса. Таким образом, в случае асинхронного гироскопа *фазовое пространство* приведенной системы S_p представляется в виде декартова произведения плоскости на окружность единичного радиуса, т. е. фазовое пространство является цилиндрическим.

В [9] проведено качественное исследование решений систем дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством. При этом основное внимание уделено классификации положений равновесия и движений таких систем. Рассмотрена задача об определении области притяжения устойчивого равновесия, а также вопрос об устойчивости положения равновесия в целом (т. е. его устойчивости и глобального притяжения). Для решения двух последних задач применяется известная теорема Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости, в которой используется функция Ляпунова со знакопостоянной производной (см. [10]), а также обобщения этой теоремы.

Целью настоящей работы является исследование вопроса о глобальном притяжении не отдельно взятого положения равновесия, а *инвариантного множества*, состоящего из положений равновесия приведенной системы для асинхронного гироскопа в кардановом подвесе. В этом случае вместо теорем Барбашина–Красовского удобно пользоваться аналогичными результатами в форме Ла-Салля [11]. Такой подход используется в теории фазовой синхронизации (см. обзор [12]).

Пусть M_0 — совокупность тех точек фазового пространства приведенной системы S_p , в которых $\dot{V}_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = 0$, и пусть M — максимальное положительно инвариантное множество, содержащееся в M_0 . Обращаясь к доказательству теоремы VIII из [11], замечаем, что оно остается верным и для того случая, когда некоторые из фазовых переменных изменяются не на числовой прямой, а на окружности. С учетом этого из данной теоремы следует, что каждое решение приведенной системы S_p , остающееся ограниченным при $t > 0$, стремится к M при $t \rightarrow \infty$.

В оставшейся части данной работы для широкого класса асинхронных гироскопов в кардановом подвесе показано, что при любом p множество M является множеством стационарных решений приведенной системы S_p (лемма 3). Установлено также, что всякое решение системы S_p ограничено при $t \geq 0$ (лемма 4). Поэтому, в соответствии с упомянутой теоремой Ла-Салля, любое решение приведенной системы стремится к M при $t \rightarrow \infty$. Это означает, что множество стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе обладает свойством глобального притяжения.

4. Структура инвариантного множества M . Согласно данному выше определению, M — максимальное положительно инвариантное множество приведенной системы S_p , содержащееся в M_0 . Здесь M_0 — совокупность всех точек фазового пространства этой системы, в которых выполнено равенство $\dot{V}_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) = 0$. Из (4), (16) следует, что это равенство выполняется только при $\dot{\gamma} = 0$. Поэтому множество M состоит из фазовых траекторий приведенной системы S_p , удовлетворяющих условию $\dot{\gamma} = 0$.

При любом значении постоянной p этому условию удовлетворяют стационарные решения приведенной системы S_p .

Рассмотрим вопрос о том, существует ли значение постоянной p такое, что приведенная система S_p имеет *нестационарное* решение, для которого $\dot{\gamma} = 0$:

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(t), \dot{\gamma} = 0, \beta = \beta(t) \quad (t \geq 0). \quad (17)$$

Здесь функция $\beta(t)$ отлична от тождественной постоянной. Для решения (17) при всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\dot{\beta}^2(t) \frac{G(\beta(t))H - N^2(\beta(t))}{2G(\beta(t))} + \Delta U_*(p, \beta(t)) = e, \quad (18)$$

$$\frac{[p - \omega Q(\beta(t))]Q(\beta(t))}{G(\beta(t))} + \dot{\beta}(t) \frac{G(\beta(t))R - Q(\beta(t))N(\beta(t))}{G(\beta(t))} = k, \quad (19)$$

где e, k — постоянные. Первое из этих соотношений при $\dot{\gamma} = 0$ следует из (14), (15), а второе следует из последнего уравнения (9).

Опуская для краткости аргумент t в соотношениях (18), (19), запишем второе из них в виде

$$\dot{\beta}[G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)] = kG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]Q(\beta).$$

Возводим обе части этого равенства в квадрат и умножаем на величину $G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)$, которая строго положительна согласно (3). Получаем

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^2 [G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)] [G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)]^2 = \\ = [G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)] \{kG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]Q(\beta)\}^2. \end{aligned}$$

Заменяем здесь величину $\dot{\beta}^2 [G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)]$ выражением

$$\dot{\beta}^2 [G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)] = 2hG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]^2 - 2G(\beta)U(\beta),$$

которое следует из (18) с учетом определений (12), (13) функций U_* , ΔU_* . Здесь постоянная $h = e + U_{*\min}(p)$ является произвольной, так как выражение (2) потенциальной энергии U содержит произвольную постоянную u_0 .

В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned} \{2hG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]^2 - 2G(\beta)U(\beta)\} [G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta)]^2 = \\ = [G(\beta)H - Q(\beta)N(\beta)] \{kG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]Q(\beta)\}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Оно является условием совместности соотношений (18), (19), которым должно удовлетворять решение (17) приведенной системы S_p при условии $\dot{\gamma} = 0$. Здесь $\beta = \beta(t)$ и данное равенство является тождеством по t . Но поскольку функция $\beta = \beta(t)$ отлична от тождественной постоянной, равенство (20) должно быть тождеством по переменной β .

Из формул (2) следует, что это тождество записывается в виде

$$a_0 + \sum_{n=1}^7 (a_n \cos n\beta + b_n \sin n\beta) \equiv 0. \quad (21)$$

Постоянные коэффициенты a_0, a_n, b_n ($n = 1, \dots, 7$) выражаются через постоянные p, k, h и коэффициенты формул (2), т. е. в конечном счете они выражаются через начальные данные и механические параметры прибора. Тождество (21) эквивалентно системе

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = 0 \quad (n = 1, \dots, 7)$$

пятнадцати нелинейных уравнений. Эта система очень громоздка и сложна для анализа. Если данная система уравнений имеет решение, то ему соответствует узкий класс механических систем, так что в рамках обобщенной модели гироскопа в кардановом подвесе для подавляющего большинства конструкций нестационарные решения вида (17) не существуют.

Чтобы получить более точный результат, рассмотрим класс механических систем, для которых выполнено условие

$$G(\beta)R - Q(\beta)N(\beta) \equiv 0, \quad (22)$$

и покажем, что для систем этого класса нестационарные решения вида (17) заведомо не существуют. Отметим, что данному классу принадлежит, например, обычная модель гироскопа в кардановом подвесе [6], так как для нее $R = 0, N(\beta) \equiv 0$.

При выполнении условия (22) из тождества (20) следует тождественное по β равенство

$$kG(\beta) - [p - \omega Q(\beta)]Q(\beta) \equiv 0, \quad (23)$$

которое можно также получить непосредственно из (19).

Условия (22), (23) уже рассматривались в [5] в связи с изучением свойства локального притяжения стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе. Были доказаны следующие две леммы, справедливые для случаев как синхронного, так и асинхронного электродвигателей.

Лемма 1. *Значение \tilde{p} постоянной p , при котором справедливы тождества (22), (23), существует тогда и только тогда, когда коэффициенты формул (2) удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} g_2 = 0, \quad g_3 = 0, \quad g_4 \neq 0, \quad q_0(2q_0g_4 + q_1g_1) - q_1^2(g_0 + g_4) &= 0, \\ g_0R - q_0n_0 - q_1n_1/2 = 0, \quad g_1R - q_0n_1 - q_1n_0 &= 0, \\ n_2 = 0, \quad g_4R + q_1n_1/2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

При выполнении этих соотношений $\tilde{p} = 2\omega q_0 + \omega q_1 g_1 / 2g_4$.

Лемма 2. *Конструкции гироскопа в кардановом подвесе, удовлетворяющей соотношениям (24), не существует.*

Из лемм 1, 2 следует такой результат.

Лемма 3. *Для класса гироскопов в кардановом подвесе, удовлетворяющих условию (22), множество M состоит только из стационарных решений приведенной системы S_p .*

Действительно, нестационарные решения, принадлежащие множеству M , имеют вид (17). Но, как было показано выше, при выполнении условия (22) приведенная система S_p имеет нестационарное решение вида (17) только в случае, когда выполняется также условие (23). В лемме 1 установлено, что два условия (22) и (23) одновременно выполняются только тогда, когда имеют место соотношения (24). Однако, согласно лемме 2, эти соотношения несовместны. Поэтому несовместны и условия (22), (23). Следовательно, при условии (22) множество M не содержит нестационарных решений.

5. Ограниченность решений приведенной системы. Пусть

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(t), \dot{\beta} = \dot{\beta}(t), \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t), \beta = \beta(t) \quad (25)$$

— решение системы лагранжевых уравнений движения (5) асинхронного гироскопа в кардановом подвесе при любых начальных условиях

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0, \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0, \beta(0) = \beta_0. \quad (26)$$

Последние три компоненты решения (25) образуют решение

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(t), \dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t), \beta = \beta(t) \quad (27)$$

приведенной системы S_p , соответствующей значению

$$p = \dot{\alpha}_0 G(\beta_0) + \dot{\beta}_0 N(\beta_0) + (\omega + \dot{\gamma}_0) Q(\beta_0). \quad (28)$$

Начальные условия для решения (27) таковы: $\dot{\beta}(0) = \dot{\beta}_0$, $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}_0$, $\beta(0) = \beta_0$.

Лемма 4. *Решение (27) является ограниченным.*

Для доказательства заметим, что, согласно (4), (16), функция V_p не возрастает вдоль решения (27). Поэтому при всех $t \geq 0$ решение (27) принадлежит множеству

$$D_e = \{(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) : V_p(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) \leq e\}, \quad (29)$$

где $e = V_p(\dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0)$ — значение функции V_p в начальной точке этого решения.

В определении (14) функции V_p функция T_* определено положительно относительно переменных $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$, а функция ΔU_* положительно при всех значениях β за исключением одной или нескольких точек минимума, где она обращается в нуль. Отсюда следует, что $e \geq 0$.

Равенство $e = 0$ имеет место лишь при $\dot{\beta}_0 = \dot{\gamma}_0 = 0$ и значениях β_0 , соответствующих абсолютному минимуму ΔU_* , т. е. оно выполняется только в том случае, когда (27) есть стационарное решение, соответствующее минимуму функции ΔU_* . В этом случае множество D_e состоит из одной или нескольких таких стационарных точек и, следовательно, ограничено.

Во всех других случаях имеем $e > 0$. Множество D_e при этом остается ограниченным. В самом деле, поскольку $e > 0$ и обе функции T_* , ΔU_* неотрицательны, для точек этого множества из (14), (29) следуют два неравенства

$$T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta) \leq e, \quad \Delta U_*(p, \beta) \leq e. \quad (30)$$

Первому из них удовлетворяют только значения $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$, лежащие в круге конечного радиуса. Это следует из того, что функция $T_*(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta)$ определено положительна по $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$ при любом β . Второе неравенство (30) определяет некоторое множество значений переменной β , которое является ограниченным вследствие того, что множество всех значений этой переменной ограничено согласно определению фазового пространства.

Итак, решение (27) при всех $t \geq 0$ принадлежит ограниченному множеству D_e , и поэтому данное решение ограничено.

6. Формулировка основного результата. В соответствии с принципом Ла-Салля, из лемм 3, 4 вытекает следующее *свойство глобального притяжения* стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе.

Теорема. Пусть (25) — решение лагранжеских уравнений движения (5) асинхронного гироскопа в кардановом подвесе при произвольных начальных условиях (26), а (27) — соответствующее решение приведенной системы S_p , отвечающей значению (28) постоянной p .

При данном значении p условие $U'_*(p, \beta) = 0$ определяет набор значений переменной β , которым соответствуют стационарные решения приведенной системы.

Если конструкция гироскопа в кардановом подвесе удовлетворяет условию (22), то

1) решение (27) приведенной системы S_p при $t \rightarrow \infty$ стремится к одному из ее стационарных решений, отвечающему некоторому значению β^* переменной β ;

2) решение (25) лагранжеских уравнений движения при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному режиму

$$\dot{\alpha} = \Omega^*, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad \beta = \beta^* \quad (\Omega^* = [p - \omega Q(\beta^*)]/G(\beta^*)).$$

В общем случае, когда не выполнены указанные в [1] условия D_1, D_2 , приведенная потенциальная энергия $U_*(p, \beta)$ отлична от тождественной постоянной по переменной β . Поэтому при $\beta \in [0, 2\pi)$ условие $U'_*(p, \beta) = 0$ существования стационарных решений определяет только конечный набор таких решений, и произвольное решение (27) приведенной системы стремится к одному из них. При этом не исключается возможность того, что решение (27) стремится к неустойчивому стационарному решению приведенной системы, но, как правило, оно стремится к одному из устойчивых стационарных решений, соответствующих точкам изолированного минимума по β приведенной потенциальной энергии $U_*(p, \beta)$, поскольку такие решения обладают свойством локального притяжения [4].

7. Результаты численного моделирования. Чтобы продемонстрировать на числовых примерах свойство глобального притяжения стационарных движений, рассмотрим неуравновешенный гироскоп в кардановом подвесе, выполненный по обычной конструктивной схеме. Для механических параметров прибора выбираем следующие числовые значения: $C = 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $A = 2 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $A_1 = 3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $B_1 = 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $C_1 = 3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $C_2 = 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $s = 5 \text{ см}$, $m = 1000 \text{ г}$. Здесь C, A — осевой и экваториальный центральные моменты инерции ротора, A_1, B_1, C_1 — моменты инерции внутренней рамки, C_2 — момент инерции наружной рамки относительно наружной оси подвеса, s — расстояние от центра масс ротора до центра подвеса, m — масса ротора. Параметры асинхронного электродвигателя принимаем равными: $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$, $\lambda = 4 \cdot 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$. Для суммарного момента L пользуемся линейной формулой $L = -\lambda \dot{\gamma}$.

Что касается начальных значений фазовых переменных $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta$ в момент $t = 0$, то при численном моделировании удобно взять $\dot{\gamma}_0 = 0 \text{ с}^{-1}$, $\beta_0 = 0$ и менять только значения $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0$. Для прибора обычной конструкции имеем $N(\beta) \equiv 0$, $Q(\beta) = C \sin \beta$. Поэтому при указанном выборе начальных данных значение (28) постоянной интеграла (8) равно $p = \dot{\alpha}_0 G(0)$. Оно не зависит от $\dot{\beta}_0$ и определяется только величиной $\dot{\alpha}_0$. Это позволяет выбрать величину $\dot{\alpha}_0$, а вместе с ней и постоянную p так, чтобы получить нетривиальный (непохожий на синусоиду) график зависимости приведенной потенциальной энергии $U_*(p, \beta)$ от β . В проведенных расчетах принято $\dot{\alpha}_0 = 300 \text{ с}^{-1}$.

Чтобы обнаружить свойство глобального притяжения стационарных режимов, рассмотрим случай, когда приведенная полная энергия V_p настолько велика в начальный момент, что выполняется неравенство $V_p(\dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0) > \Delta U_{* \max}(p)$. Согласно (15), при $\dot{\gamma}_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ начальное значение приведенной кинетической энергии T_* определяется только выбором $\dot{\beta}_0$. Поэтому случай большой начальной полной энергии можно получить, рассматривая достаточно большие значения $\dot{\beta}_0$. При указанном выше выборе параметров и других начальных данных это будут значения $\dot{\beta}_0 > 1487 \text{ с}^{-1}$.

При таких значениях $\dot{\beta}_0$ проводилось численное интегрирование приведенной системы S_p , дополненной уравнением $\dot{V}_p = -\lambda \dot{\gamma}^2$, которое следует из (16). В результате определялись фазовые переменные $\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta$ и приведенная полная энергия V_p в зависимости от времени t .

Наиболее ярко свойство глобального притяжения стационарных движений проявляется, если изобразить на рисунке график приведенной потенциальной энергии $\Delta U_*(p, \beta)$ как функции β и показать на этом же рисунке параметрически заданную кривую $(\beta(t), V_p(t))$, $t \geq 0$, зависимости приведенной полной энергии V_p от β . Такое построение дано на рис. 1 для трех случаев: 1) $\dot{\beta}_0 = 1700 \text{ с}^{-1}$, 2) $\dot{\beta}_0 = 2400 \text{ с}^{-1}$, 3) $\dot{\beta}_0 = 2600 \text{ с}^{-1}$. Соответствующие кривые отмечены цифрами 1, 2, 3. Цифрой 0 отмечен график зависимости $\Delta U_*(p, \beta)$ от β . Из рисунка видно, что в процессе убывания полной энергии V_p решение с большой начальной энергией с течением времени попадает в "потенциальную яму", соответствующую одной из асимптотически устойчивых стационарных

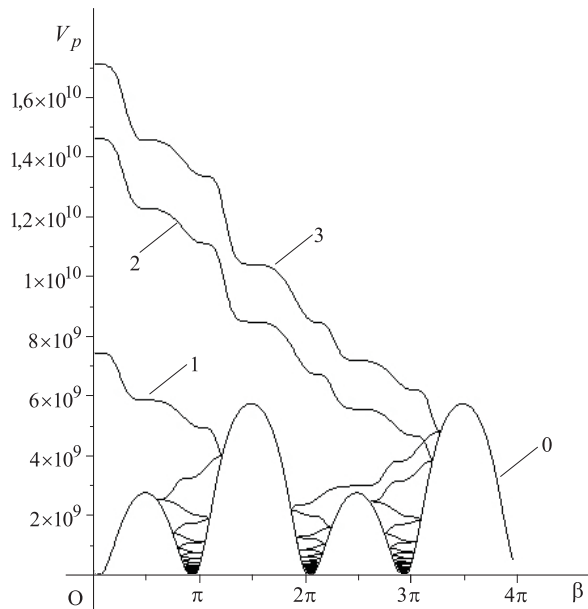


Рис. 1. Пример расчета кривых $(\beta(t), V_p(t))$ для асинхронного гироскопа.

точек приведенной системы, а затем притягивается к этой точке.

1. Коносевиц Б.И. Об устойчивости стационарных движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1977. – Вып. 9. – С. 61-73.
2. Коносевиц Ю.Б. Критерий устойчивости стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 2005. – Вып. 35. – С. 115-123.
3. Коносевиц Б.И. Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Там же. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
4. Коносевиц Б.И. Асимптотические свойства некоторых движений асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 1982. – Вып. 14. – С. 87-92.
5. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Асимптотическое поведение возмущенных стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 64-74.
6. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
7. Харламов П.В. Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 73-82.
8. Коносевиц Б.И. Исследование основного условия устойчивости стационарных движений гироскопа в кардановом подвесе, снабженного электродвигателем // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 80-89.
9. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
10. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
11. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

12. *Леонов Г.А.* Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47-85.

B.I. Konosevich, Yu.B. Konosevich

Attraction property of steady motions of a gimbal mounted asynchronous gyroscope

The global attraction property is established for the set of steady motions of an unbalanced gimbal mounted gyroscope, placed on the immovable foundation in the field of gravity and supplied with the asynchronous electric motor.

Keywords: *gimbal mounted gyroscope, asynchronous electric motor, steady motion, LaSalle principle, global attraction.*

Б.І. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц

Властивість притягання стаціонарних рухів асинхронного гіроскопа у кардановому підвісі

Доведено властивість глобального притягання стаціонарних рухів неврівноваженого гіроскопа у кардановому підвісі, встановленого на нерухомій основі у полі сили ваги та обладнаного асинхронним електродвигуном.

Ключові слова: *гіроскоп у кардановому підвісі, асинхронний електродвигун, стаціонарний рух, принцип Ла-Салля, глобальне притягання.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.06.12