УДК 531.38

©2012. **О.С. Волкова**

ИНВАРИАНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА В СЛУЧАЕ, КОГДА ЦЕНТР МАСС ПРИНАДЛЕЖИТ ГЛАВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Изучается вращение вокруг неподвижной точки гиростата с фиксированным в подвижном базисе направлением гиростатического момента. Предполагается, что центр масс и гиростатический момент принадлежат одной из главных плоскостей эллипсоида инерции. Исследованы условия существования решения с одним линейным по компонентам угловой скорости инвариантным соотношением. Получен аналог решения Е.И. Харламовой.

Ключевые слова: *гиростат с неподвижной точкой, переменный гиростатический момент, линейное инвариантное соотношение.*

Введение. Пусть механическая система состоит из носителя S, имеющего неподвижную точку, и закрепленных на нем тел S^i, $i=\overline{1,n}$. Считаем, что система тел $\{S,\ S^1,..,S^n\}$ удовлетворяет определению гиростата П.В. Харламова [1]: в этом случае динамические характеристики носителя не зависят от вращения присоединенных тел, а уравнения движения имеют вид

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}=(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\qquad \dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega},\tag{1}$$

где $\boldsymbol{J}$ – обобщенный тензор инерции, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата в подвижном базисе, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{e}$ – орт радиус-вектора центра масс, $\boldsymbol{\lambda}$ – переменный гиростатический момент. Предположим, что направление вектора $\boldsymbol{\lambda}$ фиксировано в связанном с гиростатом базисе: $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, а $\lambda(t)$ – непрерывно дифференцируемая ограниченная функция времени.

При постоянном $\boldsymbol{\lambda}$ известны три первых интеграла уравнений движения, но при $\boldsymbol{\lambda}\neq\text{const}$ система (1) допускает только два их них:

$$(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda},\,\boldsymbol{\nu})=g,\quad |\boldsymbol{\nu}|^2=1.\tag{2}$$

В задаче динамики тяжелого неавтономного гиростата с $\boldsymbol{\lambda}=\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ исследованы условия существования основных классов безнутационных движений [2–4], найдены аналоги решений Дж. Гриоли, В. Гесса, Д.К. Бобылева – В.А. Стеклова [4–7]. При $\boldsymbol{\lambda}=\text{const}$, $\boldsymbol{\omega}\neq\text{const}$ известны и другие решения с линейными инвариантными соотношениями: они существуют при условии, что центр масс лежит в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного в неподвижной точке.

В работе будут получены условия существования решения системы (1) с инвариантным соотношением типа Е.И. Харламовой при условии, что гиростатический момент и радиус-вектор центра масс принадлежат главной плоскости, а λ – линейная функция компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАНУ и РФФИ (рег. № 0112U003346).

Пусть $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{i} \parallel \boldsymbol{J}\boldsymbol{i}$. Перейдем от главных осей к базису $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{i}$, $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i})$: обозначим $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}) = \omega_1$, $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{i}) = \omega_2$, $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}) = \omega_3$, $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}) = \nu_1$, $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{i}) = \nu_2$, $(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}) = \nu_3$, $J_* = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})$. Проекции динамического уравнения на $\boldsymbol{e}$, $(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i})$ образуют подсистему

$$(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{e}) = [\,J_*\omega_3 - (\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i})]\,\omega_2, \tag{3}$$

$$(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}) = [-J_*\omega_1 + (\boldsymbol{K},\boldsymbol{e})]\,\omega_2 + \nu_2. \tag{4}$$

Так как цель работы – получения аналога решения Е.И. Харламовой, то случай $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$, при $\lambda = \mathrm{const}$ вырождающийся в $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}) = \mathrm{const}$, в п. 1 будет исключен из рассмотрения. Здесь же отметим, что $(\dot{\boldsymbol{K}},\boldsymbol{e}) = 0$ приводит к $\omega_2 = 0$ либо $J_*\omega_3 = (\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i})$. Первая возможность исследована в [5, п. 3], ей соответствуют решения I), II). Вторая возможность распадается на два варианта:

1) система (1) помимо $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}) = K_0$ допускает линейное по $\boldsymbol{\omega}$ соотношение

$$(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\eta}) = K_0(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{i}), \text{ где } \boldsymbol{\eta} = J_*(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{e})(\,\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{i}) \neq 0;$$

2) вектор $\boldsymbol{\eta} = 0$, т. е. параметры удовлетворяют условиям

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\alpha}, \quad J_*(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}),\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}), \quad K_0(\boldsymbol{J}\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e},\boldsymbol{i}) = 0.$$

Вариант 1) требует отдельного изучения вне рамок этой работы; условия 2) характеризуют обобщение решения В. Гесса, полученное в [6].

1. Инвариантное соотношение, характеризующее частные решения Дж. Гриоли и Е.И. Харламовой. В классической задаче о движении гиростата с $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ вопрос существования линейного по компонентам $\boldsymbol{\omega}$ инвариантного соотношения до конца не исследован.

Для случая $\boldsymbol{e} \perp \boldsymbol{i} \parallel \boldsymbol{J}\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{\lambda} = 0$ П.В. Харламов провел полный анализ, уточнив тем самым результат С.А. Чаплыгина [8]. Из [9] следует, что в задаче о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, решений с одним линейным инвариантным соотношением только четыре: это решения Ж. Лагранжа, В. Гесса, Дж. Гриоли и Е.И. Харламовой. В монографии [10] при том же условии на расположение центра масс и $\lambda(t) = \mathrm{const}$ система (1) сведена к одному интегродифференциальному уравнению, определяющему зависимость $y(x)$, где $y = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i})$, $x = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{e})$. Там же изучено инвариантное соотношение вида

$$y = mx + m_1, \quad x \neq \mathrm{const}. \tag{5}$$

Показано, что существуют только два решения с таким соотношением, представляющие собой обобщения решений Дж. Гриоли и Е.И. Харламовой [11] уравнений движения твердого тела. Случай одного соотношения $x = \mathrm{const}$ исследован отдельно: установлено, что ему соответствуют обобщение решения Ж. Лагранжа и решение Л.Н. Сретенского – В. Гесса.

При $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathrm{const}$ система (1), вообще говоря, не замкнута, если не задано вращение присоединенных тел гиростата. Наличие одного инвариантного соотношения может не ограничивать количество различных решений. Укажем одно из решений, совпадающее при $\lambda(t) = 0$ с решением [11].

Пусть гиростатический момент $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $\lambda(t) \neq \text{const}$, направлен вдоль вектора $(1, 0, m)^T$, т. е. $\alpha_3/\alpha_1 = m$; тогда одновременно с (5) выполняется

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}) = m(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) + m_1. \tag{6}$$

Зададимся целью получить решение с соотношением (5). Для того, чтобы система (1) допускала аналог интеграла энергии, совпадающий по форме с интегралом при $\lambda(t) = \text{const}$, считаем λ линейной по x. Положим

$$\lambda = ((k-1)x + b)/\alpha_1, \text{ тогда } (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}) = kx + b. \tag{7}$$

Постоянные k, b подлежат определению из условий существования решения с соотношением (5). Очевидно, что значения $k = 1$, $b = 0$ приводят к $\lambda = 0$, и система (1) в этом случае представляет собой уравнения Эйлера – Пуассона. Случай $x = \text{const}$ здесь, как и в [11], не рассматриваем; положим также $k \neq 0$.

Выразим ω_1, ω_3 через x, y :

$$\omega_1 = ux + u_1 y, \quad \omega_3 = u_1 x + u_2 y, \tag{8}$$

$$\text{где} \quad u_1 = \triangle^{-1}(\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e}), \;\; u_2 = \triangle^{-1}(\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{e}), \;\; u = \triangle^{-1}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}), \tag{9}$$
$$\triangle = (\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{e})(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}), \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i}) - (\boldsymbol{Je}, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{e})^2 > 0.$$

При условии (6) из (3), (4) получим не содержащее производных по времени выражение для ν_2:

$$\nu_2 = \omega_2 [Y_1 x + Y_2], \tag{10}$$
$$Y_1 = (J_* u_2 - k)m^2 + J_*(2u_1 m + u) - k,$$
$$Y_2 = [J_* u_1 + sm]m_1 - (m^2 + 1)b,$$

где $s = J_* u_2 - 1$. Уравнение (3) после подстановки (6)-(8) отделяется:

$$\dot{x} = \omega_2 [Bx + C], \tag{11}$$
$$B = -m + J_*(u_1 + u_2 m)/k, \quad C = (m_1 s - mb)/k.$$

Возможность $B = 0$ приводит к решению, вырождающемуся в решение Гриоли; далее считаем $B \neq 0$. В предположении $\omega_2 \neq 0$ введем новую независимую переменную $\tau : \dot{\tau} = \omega_2$. Проекции кинематического уравнения на $\boldsymbol{e}$, $(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{i})$ с учетом (5), (8), (10) запишутся как

$$\begin{aligned} \nu_1' &= -\nu_3 + ((u_1 + u_2 m)x + u_2 m_1)[Y_1 x + Y_2], \\ \nu_3' &= \nu_1 - ((u + u_1 m)x + u_1 m_1)[Y_1 x + Y_2]. \end{aligned} \tag{12}$$

Штрих в (12) обозначает дифференцирование по τ. Согласно (11) $x' = Bx + C$, поэтому система (12) имеет общее решение вида

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \Gamma \cos(\tau - \tau_0) + \xi_2 x^2 + \xi_1 x + \xi_0, \\ \nu_3 &= \Gamma \sin(\tau - \tau_0) + \chi_2 x^2 + \chi_1 x + \chi_0, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\xi_2 = \frac{Y_1\,[2B(u_1+u_2m)+u+u_1m]}{1+4B^2}, \quad \chi_2 = \frac{Y_1\,[u_1+u_2m-2B(u+u_1m)]}{1+4B^2},$$

$$\xi_1 = \frac{(u_1+Bu_2)\,m_1Y_1}{1+B^2} + \frac{[(u_1+u_2m)B+u+u_1m]\,Y_2}{1+B^2} + \frac{2C\,(\chi_2-B\xi_2)}{1+B^2},$$

$$\chi_1 = \frac{(u_2-Bu_1)\,m_1Y_1}{1+B^2} + \frac{[u_1+u_2m-(u+u_1m)B]\,Y_2}{1+B^2} - \frac{2C\,(B\chi_2+\xi_2)}{1+B^2},$$

$$\xi_0 = u_1m_1Y_2 + C\chi_1, \quad \chi_0 = u_2m_1Y_2 - C\xi_1.$$

Проекция на $\boldsymbol{\omega}$ динамического уравнения системы (1) дает интеграл, из которого легко выразить $\omega_2(x,\tau)$:

$$J_*\omega_2^2 = -k(2u_1m+u_2m^2+u)x^2 - 2k\,m_1(u_1+u_2m)x + 2\nu_1 + h. \tag{14}$$

Функция $\nu_2(x,\tau)$ теперь также известна, она вычисляется согласно (10). Таким образом, все фазовые переменные выражены через x и τ, причем $\tau(x)$ определяется интегрированием уравнения $\dfrac{d\tau}{dx} = (Bx+C)^{-1}$. Подставим найденные значения в интеграл площадей (2): получим выражение вида

$$P_1(x)\cos(\tau-\tau_0) + \tilde{P}_1(x)\sin(\tau-\tau_0) + P_3(x) = 0, \tag{15}$$

где $P_1(x) = \Gamma[(k+2Y_1)x+(b+2Y_2)]$, $\tilde{P}_1(x) = \Gamma[\,mk\,x+(mb+m_1)]$,

а $P_3(x)$ – полином третьей степени от x. Рассмотрим случай $\Gamma \neq 0$. По предположению $x \neq \mathrm{const}$, $k \neq 0$, поэтому коэффициенты при $\sin(\tau-\tau_0)$ и $\cos(\tau-\tau_0)$ исчезают одновременно только в случае $m = m_1 = b = 0$, $k = 2J_*u$, но при этом $P_3(x) = 2J_*^2u^3x^3 - hJ_*ux - g \neq 0$, так как $u > 0$, $J_* > 0$. Далее считаем, что в формулах (13) постоянная $\Gamma = 0$. Тогда ν_1, ν_3, ω_2^2, ν_2^2 – многочлены от x. Потребуем, чтобы интегралы (2) были тождествами по x. Выражение $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2-1$– полином четвертой степени по x, а коэффициенты его – многочлены более высокого порядка относительно параметров, чем коэффициенты полинома $P_3(x)$, поэтому сначала обнулим коэффициенты $P_3(x)$. Введем обозначения

$$N = 2\xi_2 - (u_2m^2+2u_1m+u)k, \quad L = 2\xi_1 - 2m_1k(u_1+u_2m), \ \text{ тогда}$$

$$NY_1 + k(\xi_2+m\chi_2) = 0, \tag{16}$$

$$LY_1 + NY_2 + b\,\xi_2 + (m_1+bm)\chi_2 + k(\xi_1+\chi_1m) = 0, \tag{17}$$

$$LY_2 + (2\xi_0+h)Y_1 + b\,\xi_1 + (m_1+bm)\chi_1 + k(\xi_0+m\chi_0) = 0, \tag{18}$$

$$g = (2\xi_0+h)Y_2 + b(\xi_0+m\chi_0) + m_1\chi_0. \tag{19}$$

Показано, что значения параметров, удовлетворяющие условиям (16)-(18), обнуляют коэффициенты геометрического интеграла при ненулевых степенях x; равенство нулю свободного члена дает условие

$$(2\xi_0+h)Y_2^2 + J_*(\xi_0^2+\chi_0^2-1) = 0. \tag{20}$$

Соотношение (19) не накладывает условий на параметры, а задает значение интегральной постоянной g.

2. Аналог решения Е.И. Харламовой. Пусть $u_1 \neq 0$, то есть $\boldsymbol{e} \nparallel \boldsymbol{J}\boldsymbol{e}$. В итоге исследования системы (16)-(18), (20) алгебраических уравнений на параметры получаем эквивалентный ей набор условий a)-c).

a) Константы m и k связаны равенством

$$2u_1(k-J_*u_2)m^3+((k-J_*u_2)\tilde{u}-3J_*u_1^2)m^2-2J_*\tilde{u}\,u_1m+J_*(u_1^2-u^2)+ku=0, \quad (21)$$

$\tilde{u}=2u-u_2$, которое позволяет выразить m либо $k(m)$. Действительно, если $k \neq J_*u_2$, то кубическое по m уравнение (21) имеет хотя бы один действительный корень. Если же $k=J_*u_2$, то действительных корней ровно два, так как дискриминант уравнения (21) строго положителен. Это становится очевидным, если выразить входящие в него величины через главные моменты инерции: $J_*=J_2$, равенства (9) принимают вид

$$u=\frac{J_1e_3^2+J_3e_1^2}{J_1J_3}, \;\; u_1=\frac{(J_1-J_3)e_1e_3}{J_1J_3}, \;\; u_2=\frac{J_1e_1^2+J_3e_3^2}{J_1J_3},$$

дискриминант (21) при этом равен $\dfrac{4e_1^2e_3^2}{J_1^4J_3^4}\left[J_2^2(J_1-J_3)^2(J_1^2+J_3^2-J_1J_3)\right]>0.$ С другой стороны, выражение (21) линейно по k, причем коэффициенты при k^1 и k^0 одновременно в ноль не обращаются. Следовательно, k не может принимать произвольные значения, а однозначно определяется величиной m.

b) Введем $\varphi=b/m_1$. Поскольку B, Y_1, ξ_2, χ_2 не содержат b и m_1, условие $a_1\varphi+a_0=0$, где

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[4BY_1m-k(B^2(1+2m^2)-2Bm+1)\right]\xi_2+ \\ &\qquad + \left[k(B^2+2Bm-1)-4Y_1\right]m\chi_2+k(m^2+1)(Bs_1k-2Y_1s_2), \\ a_0 &= 2\left[(B^2s_3-Bs+J_*u_1)k-2BY_1s\right]\xi_2+ \\ &\quad + \left[4Y_1s+k(B^2-2Bsm+2u_2J_*-1)\right]\chi_2+2(Bu_2+u_1)\,kY_1{}^2+ \\ &\qquad + \left[2s_2s_3-k((2(s_2-u)-u_1m-u_2)B+u_2m+u_1)\right]kY_1-Bk^2s_1s_3, \end{aligned}$$

$$s_1=(Bu_2+u_1)m^2+(2Bu_1+u-u_2)m+Bu-u_1,$$
$$s_2=B(u_2m+u_1)+u+u_1m, \quad s_3=ms+J_*u_1,$$

позволяет в общем случае выразить φ через k, m и параметры гиростата.

c) Выражения $\tilde{\xi}_1=\xi_1/m_1$, $\tilde{\chi}_1=\chi_1/m_1$, $\tilde{\xi}_0=\xi_0/m_1^2$, $\tilde{\chi}_0=\chi_0/m_1^2$,

$$f_1=\tilde{\xi}_1+\tilde{\chi}_1m, \;\; f_0=\tilde{\xi}_0+\tilde{\chi}_0m, \;\; \tilde{L}=L/m_1, \;\; \tilde{Y}_2=Y_2/m_1,$$

после подстановки в χ_i, ξ_i значений B, C, Y_1, Y_2 зависят от φ, но уже не содержат m_1. Константа m_1 выражается через определенные выше величины из условия

$$m_1^4\left[J_*(\tilde{\xi}_0^2+\tilde{\chi}_0^2)Y_1-(\tilde{\chi}_1+f_1\phi+f_0k)\tilde{Y}_2^2-\tilde{L}\tilde{Y}_2^3\right]=J_*Y_1. \quad (22)$$

Постоянная интеграла (14) зависит от параметров следующим образом:

$$h = -2\xi_0 - \frac{1}{Y_1}\left((f_0 k + f_1\varphi)m_1^2 + 2\left[\xi_1 - m_1 k\left(u_2 m + u_1\right)\right]Y_2 + \chi_1 m_1\right), \qquad (23)$$

Итак, компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ выражены через одну переменную x, связь которой со временем устанавливается квадратурой

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\omega_2(x)\left[Bx + C\right]}, \quad \omega_2(x) = \pm\sqrt{q_2 x^2 + q_1 x + q_0},$$

где $q_2 = N/J_*$, $q_1 = L/J_*$, $q_0 = (2\xi_0 + h)/J_*$. Важно, что после учета в N всех промежуточных обозначений получаем

$$q_2 = -\frac{k^2(1+4m^2)\Big[\left[m(u_1^2+u_2^2) + u_1(u+u_2)\right]^2 + \left(u_2 u - u_1^2\right)^2\Big]}{(u_1^2+u_2^2)\Big[\left[k(1+4m^2) - 4J_* m(u_1+u_2 m)\right]^2 + 4J_*^2(u_1+u_2 m)^2\Big]} < 0;$$

значит, должно выполняться $q_1^2 - 4q_2q_0 > 0$. Обозначим $d = C/B$,

$$\rho = q_2 d^2 + q_0 - q_1 d, \quad \delta^2 = q_1^2 - 4q_2q_0, \quad \text{тогда}$$

$$B(t-t_0) = \begin{cases} \dfrac{\mp 1}{\sqrt{\rho}}\ \ln\dfrac{(q_1 - 2q_2 d)x + 2q_0 - q_1 d \pm 2\sqrt{\rho}\,\omega_2(x)}{x+d}, & \rho > 0; \\ \dfrac{\mp 1}{\sqrt{-\rho}}\ \operatorname{arctg}\dfrac{(2q_2 d - q_1)x + q_1 d - 2q_0}{\pm 2\sqrt{-\rho}\,\omega_2(x)}, & \rho < 0; \\ \dfrac{\pm 1}{(2q_2 d - q_1)}\ \ln\dfrac{q_2(x-d) + q_1}{x+d}, & \rho = 0. \end{cases}$$

Выписанные зависимости $t(x)$ позволяют явно указать и обратную функцию:

$$x(t+t_0) + d = \begin{cases} \dfrac{4\rho\, e^{\sigma t}}{e^{2\sigma t} + 2\,(2q_2 d - q_1)e^{\sigma t} + \delta^2}, \ \ \sigma = \mp B\sqrt{\rho}, & \rho > 0; \\ \dfrac{2\rho\,(2q_2 d - q_1 + \varepsilon\delta\sin\sigma t)}{\delta^2\cos^2\sigma t + 4q_2\rho}, \ \ \varepsilon = \pm 1, \ \sigma = B\sqrt{-\rho}, & \rho < 0; \\ \sigma\big[B(q_2 - e^{\sigma t})\big]^{-1}, \qquad \sigma = \pm B(2q_2 d - q_1), & \rho = 0. \end{cases}$$

Поскольку $q_2 < 0$, то знаменатели функций $x(t)$ ни при каких значениях t в нуль не обращаются. Если параметры задачи удовлетворяют неравенству $\rho \geqslant 0$, то $\exists \lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, в ином случае зависимость $x(t)$ периодическая. Указанные функции $x(t)$ ограничены, а значит, фазовые переменные и абсолютная величина гиростатического момента также будут ограниченными.

Замечание 1. Здесь не утвержается, что предложенный способ дает единственное или наиболее общее из решений, при $\lambda(t) = 0$ совпадающих с [11].

Даже в задаче с $\boldsymbol{\lambda}=\mathrm{const}$ не прослеживается единообразия подходов к обобщению классических решений. Так, обобщенное решение может вырождаться лишь в частный случай соответствующего решения уравнений динамики твердого тела, а может, наоборот, объединять в себе различные классические решения; компоненты $\boldsymbol{\lambda}$ могут неаддитивно входить в основное инвариантное соотношение, а могут быть тривиальным образом включены в постоянную (см. обзор [12, табл. на с. 198]). Для незамкнутой системы (1) произвол состоит уже в выборе $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\nu})$. Отметим, что в данном Е.И. Харламовой обобщении [10] своего решения [11] λ_1, λ_3 остаются свободными параметрами, не подчиненными принятому в настоящей работе условию $\lambda_3/\lambda_1 = m$. При снятии этого ограничения требование выполнения вдобавок к (5) соотношения

$$(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{i}) = n(\boldsymbol{K},\boldsymbol{e}) + n_1$$

привело бы к определению зависимости $\lambda(x) = [(m-n)x+m_1-n_1]/(n\alpha_1-\alpha_3)$, где $m \neq n$, иначе приходим к решению [10, § 2.4]. Этот случай исследуется аналогично (7).

Покажем, что найденные в п. 2 ограничения на параметры при отсутствии гиростатического момента соответствуют условиям существования решения Е.И. Харламовой [11]. Положив $k=1$, $\varphi=0$, из условия $a_0=0$ получаем

$$4m^2su_1[3J_*u_1+ms]+3u_1(4u_1^2J_*^2+1)m-(2J_*u-1)[2J_*(u_2u-2u_1^2)-2u-u_2]=0. \tag{24}$$

Результант левых частей (21) и (24) как многочленов от m разлагается на множители, из которых только один может обращаться в нуль при допустимых значениях параметров:

$$(u_2J_*-1)(2u-u_2)^3-9u_1^2\left(3u+J_*(u^2+3u_1^2+u_2^2-4u_2u)\right)=0. \tag{25}$$

Равенство (25), записанное в главных осях, оказывается эквивалентным условию Е.И. Харламовой на моменты инерции:

$$e_1\sqrt{J_1(J_1-2J_3)^3(J_2-J_3)} \pm \sqrt{J_3(J_3-2J_1)^3(J_1-J_2)}\,e_3=0, \tag{26}$$

где $J_3>2J_1>2J_2$. Общий корень уравнений (21) и (24) при этом равен

$$m=\pm\frac{1}{3}\,\frac{J_2(J_1+J_3)^2+3J_1J_3(J_1+J_3-3J_2)}{\sqrt{J_1J_3(J_1-2J_3)(J_2-J_3)(2J_1-J_3)(J_2-J_1)}}.$$

Постоянная m_1 определяется из (22): как и в случае Е.И. Харламовой,

$$m_1^4=\frac{J_1^2J_3^2[(J_1+J_3)^3J_2-9J_1J_3(J_1^2+J_3^2-J_1J_3)][(J_1+J_3)J_2-3J_1J_3]}{(J_1-J_2)^2(J_1-2J_3)^2(J_3-J_2)^2(J_3-2J_1)^2}.$$

Замечание 2. Условие (26) может выполняться, только когда моменты инерции *не* удовлетворяют неравенству треугольника. Известно, что для твердого тела такие значения J_1, J_2, J_3 не допустимы; но если тело имеет полости, заполненные жидкостью, возможны случаи [11], когда $J_3>J_1+J_2$.

1. *Харламов П.В.* Гиростаты// Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1988. – Т. 9. – С. 38–41.
2. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100-105.
3. *Волкова О. С., Гашененко И. Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
4. *Волкова О.С.* Деякі класи рухів важкого гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Автореф.дис.... канд.физ.-мат.наук: 01.02.01.ИПММ НАНУ.-Донецьк,2010.-19 с.
5. *Волкова О.С.* О движениях гиростата, характеризующихся линейными по компонентам угловой скорости инвариантными соотношениями // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 39–50.
6. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки// Соврем. проблемы математики, механики, информатики / Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. Харьков: "Апостроф", 2011. – С. 74-84.
7. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Аналог решения Гесса в обобщенной задаче о движении гиростата // Актуальные проблемы прикл. математики, информатики и механики: Сб. тр. межд. конф. - Воронеж: Изд-во ВГУ, 2012. – Ч. 2. – С. 68-72.
8. *Чаплыгин С.А.* Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке. – Собр. соч.: В 4-х т. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – С. 110-117.
9. *Харламов П.В.* О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Докл. АН СССР. – 1962. – **143**, №4. – С. 805–807.
10. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
11. *Харламова Е.И.* Один частный случай интегрируемости уравнений Эйлера – Пуассона // Докл. АН СССР. — 1959. – **125**, № 5. – С. 996–997.
12. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.

O.S. Volkova

On invariant relation of the motion equations of a heavy gyrostat when the center of inertia belongs to the principal plane

The paper concerns rotation of a heavy gyrostat with a fixed point under the assumption that the gyrostatic momentum direction is invariant in the rotating frame. In addition, this directing vector and the position vector of the center of inertia belong to the principal plane. The existence conditions for solutions of the motion equations are studied in the case of one linear in angular velocity invariant relation. The equivalent of known Kharlamova's particular solution is obtained.

Keywords: *gyrostat with fixed point, variable gyrostatic momentum, linear invariant relation.*

О.С. Волкова

Інваріантне співвідношення рівнянь руху важкого гіростата у випадку, коли центр мас належить головній площині

Вивчається обертання навколо нерухомої точки гіростата з фіксованим у рухомому базисі напрямком гіростатичного моменту. Припускається, що радіус-вектор центра мас та гіростатичний момент належать одній з головних площин еліпсоїда інерції. Для рівнянь руху досліджено умови існування розв'язків з одним лінійним за компонентами кутової швидкості інваріантним співвідношенням. Отримано аналог відомого розв'язку О.І. Харламової.

Ключові слова: *гіростат з нерухомою точкою, змінний гіростатичний момент, лінійне инваріантне співвідношення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, г. Донецк
Получено 01.08.12

volkova@iamm.ac.donetsk.ua