

УДК 531.38

©2012. Г.В. Горр

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПУАНСО КИНЕМАТИЧЕСКОГО ИСТОЛКОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Предложен подход в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку, основанный на теореме Пуансо. Показано, что движение тела можно представить качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости тела, по неподвижному годографу этого вектора, лежащему в некоторой плоскости в пространстве.

**Ключевые слова:** теорема Пуансо, кинематические уравнения П.В. Харламова, кинематическое истолкование.

**Введение.** В динамике твердого тела, имеющего неподвижную точку, важным этапом исследования свойств движения тела является кинематическое истолкование движения. Прямым истолкованием движения тела, имеющего неподвижную точку, служит метод годографов, который основан на теореме Пуансо о представлении движения тела качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному [1]. Кинематические уравнения П.В. Харламова [2] позволили получить наглядное представление о свойствах движения тела во многих случаях интегрируемости уравнений динамики (см. обзоры [3–6]). Тем не менее, интерпретация Л. Пуансо движения тела в случае Эйлера [1] остается самым наглядным примером истолкования движения, поскольку движение тела Л. Пуансо представил качением без скольжения эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости. Он приводится практически во всех учебниках по теоретической механике для демонстрации эффективности геометрических методов исследования. Важность таких методов отмечал Н.Е. Жуковский [7]: *“Можно говорить, что математическая истина только тогда должна считаться вполне обработанной, когда она может быть объяснена всякому из публики, желающему ее усвоить. Я думаю, что если возможно приближение к этому идеалу, то только со стороны геометрического толкования или моделирования”*.

Интерпретация Л. Пуансо является не единственным примером, когда неподвижный годограф является плоской кривой. Так, например, интерпретация случая Д. Гриоли [8], выполненная в работе [5], показала, что конец вектора угловой скорости в неподвижном пространстве находится в плоскости.

В геометрическом исследовании широко известного решения В. Гесса [9] применялись два подхода кинематического истолкования движения тела. Первый подход [10] основан на теореме Пуансо и уравнениях П.В. Харламова, второй подход [11] показывает, что при нулевой постоянной интеграла момен-

тов движение гироскопа Гесса можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции по плоскости.

В данной статье для кинематического истолкования движения тела выбирается вектор  $\mathbf{b}(t)$ , направленный по вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ :  $\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}$ . На основании замечания, указанного П.В. Харламовым [3, с. 21], при движении тела неизменно связанная с телом кривая (подвижный годограф вектора  $\mathbf{b}$ ) катится без скольжения по неподвижной кривой (неподвижному годографу вектора  $\mathbf{b}$ ). С помощью этого замечания в данной статье предлагается выбрать функцию  $b(t) > 0$  так, чтобы неподвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  находился в некоторой, неподвижной в пространстве, плоскости. Это значит, что движение тела может быть представлено качением без скольжения некоторой кривой по плоской кривой. Следовательно, мы приходим к определенному аналогу интерпретации движения тела, предложенной Л. Пуансо для случая Эйлера. **При этом представлении движения тела качение необходимо осуществлять с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и с сохранением направления вращения.**

Рассмотрены четыре случая интерпретации: в решении В.А. Стеклова [12]; в решении А.И. Докшевича [13]; в двух случаях прецессионно-изоконических движений тела [14].

**1. Постановка задачи. Метод истолкования движения.** Движение тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, описывается уравнениями [3, 4]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \Gamma(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где введены обозначения:  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – вектор угловой скорости тела;  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$  – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести;  $A$  – тензор инерции в неподвижной точке;  $\Gamma$  – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки  $O$  до центра тяжести тела  $C$ ;  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$  – единичный вектор, направленный из точки  $O$  в точку  $C$ . Точка над переменными обозначает относительную производную по времени  $t$ .

Уравнения (1) имеют интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2\Gamma(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (2)$$

где  $E$  и  $k$  – произвольные постоянные.

С телом свяжем систему координат  $Oxyz$  с единичными векторами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , а в неподвижном пространстве введем систему координат  $O\xi\eta\zeta$  с единичными векторами  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \boldsymbol{\nu}$ .

Пусть в результате интегрирования уравнений (1) с интегралами (2) найдено решение

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \nu_1(t)\mathbf{i}_1 + \nu_2(t)\mathbf{i}_2 + \nu_3(t)\mathbf{i}_3, \quad (3)$$

где  $t \in [0, \infty)$ . Тогда первая вектор-функция из (3) описывает подвижный годограф вектора угловой скорости тела. Уравнения неподвижного годографа запишем в форме кинематических уравнений П.В.Харламова [2]:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \omega_\eta(t)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \omega_\zeta(t)\boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (4)$$

где

$$\omega_{\xi}(t) = \omega_{\rho}(t) \cos \alpha(t), \quad \omega_{\eta}(t) = \omega_{\rho}(t) \sin \alpha(t), \quad (5)$$

$$\omega_{\zeta}(t) = \omega_1(t)\nu_1(t) + \omega_2(t)\nu_2(t) + \omega_3(t)\nu_3(t), \quad (6)$$

$$\omega_{\rho}^2(t) = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) - \omega_{\zeta}^2(t), \quad (7)$$

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{\omega_{\rho}^2(t)} [\dot{\omega}_1(t)(\nu_2(t)\omega_3(t) - \nu_3(t)\omega_2(t)) + \dot{\omega}_2(t)(\nu_3(t)\omega_1(t) - \nu_1(t)\omega_3(t)) + \dot{\omega}_3(t)(\nu_1(t)\omega_2(t) - \nu_2(t)\omega_1(t))] dt. \quad (8)$$

На рис. 1 изображены подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости  $\omega$ . Из равенства абсолютной и относительной производной этого вектора следует  $d\omega(t) = d'\omega(t)$ . Это означает, что длины годографов  $s$  и  $s'$  равны, т.е.  $\sphericalangle \Omega_0\Omega^* = \sphericalangle \Omega'_0\Omega^*$ . Здесь  $\Omega_0$  – начальная точка (при  $t = t_0$ ) на неподвижном годографе,  $\Omega'_0$  – начальная точка (при  $t = t_0$ ) на подвижном годографе,  $\Omega^*$  – точка касания годографов в момент  $t$ . Из указанных свойств и следует теорема Л. Пуансо о представлении движения тела качением без скольжения подвижного годографа вектора угловой скорости по неподвижному.

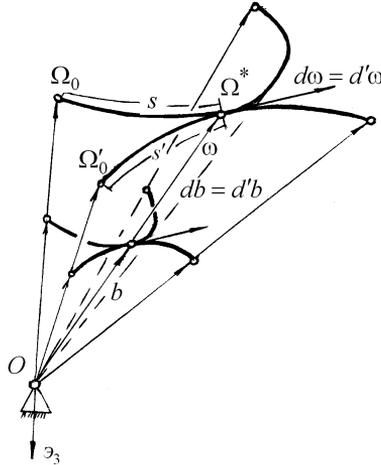


Рис. 1.

Как уже было отмечено выше, применение уравнений (3)–(8) позволило накопить обширную информацию о свойствах движения тела в различных задачах динамики [3–6], в том числе и в задачах, обобщающих классическую.

Покажем, что открывается определенная перспектива в обобщении истолкования Л. Пуансо [1], основанная на уравнениях П.В. Харламова [2].

Следуя [2], введем в рассмотрение вектор

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\omega(t), \quad (b(t) > 0). \quad (9)$$

На рис. 1 указаны подвижный и неподвижный годографы вектора  $\mathbf{b}(t)$ . Очевидно, что, как и в случае годографов угловой скорости, подвижный и неподвижный годографы вектора  $\mathbf{b}(t)$  имеют общую касательную и в силу  $db(t)\boldsymbol{\omega}(t) = d'b(t)\boldsymbol{\omega}(t)$  длины дуг, описанных за одинаковый промежуток времени концом вектора  $\mathbf{b}$  на подвижном и неподвижном годографе, равны. Следовательно, за основу кинематического истолкования можно взять годографы вектора  $\mathbf{b}(t)$  и движение тела, имеющего неподвижную точку, представить качением без скольжения подвижного годографа вектора  $\mathbf{b}(t)$  по неподвижному. При этом вращать тело необходимо с угловой скоростью

$$\omega^2(t) = \omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t). \quad (10)$$

Это обстоятельство можно учесть на заключительном этапе кинематического истолкования, **т.е. при качении годографов**. При этом функция  $b(t)$  – произвольная дифференцируемая функция.

Покажем, что функцию  $b(t)$  можно выбрать так, чтобы неподвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  находился в некоторой, неподвижной в пространстве, плоскости.

Рассмотрим вектор-функцию (4). Предположим, что  $\omega_\zeta(t)$  не изменяет своего знака при  $t \in [0; \infty)$ . Тогда в качестве вектора  $\mathbf{b}(t)$  можно взять вектор  $\boldsymbol{\omega}(t)/\omega_\zeta(t)$ , и из (4) вытекает, что

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta(t)}\mathfrak{e}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta(t)}\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3. \quad (11)$$

Следовательно, функция  $b(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}$ , и подвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  определим из первой формулы системы (3):

$$\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}(\omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3). \quad (12)$$

Из (11) получаем, что неподвижный годограф лежит в плоскости  $\zeta = 1$ . Поскольку касательные векторы к  $\mathbf{b}(t)$  тоже лежат в этой плоскости, то движение тела можно представить качением без скольжения кривой (12) по плоской кривой (11). **Таким образом получили некоторый аналог теоремы Л. Пуансо о представлении движения свободного тела.**

Как показано ниже, выбор вектора  $\mathbf{b}(t)$  зависит от свойств вектор-функции (4). Например, если одна из функций  $\omega_\xi(t), \omega_\eta(t)$  не обращается в нуль, то в качестве функции  $b(t)$  можно выбрать или  $\frac{1}{\omega_\xi(t)}$ , или  $\frac{1}{\omega_\eta(t)}$ .

В случае, если для вектор-функции (4) невозможно найти линейную комбинацию компонент вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , которая не обращается в нуль (например, если неподвижный годограф содержит начало координат), то можно движение тела разбить на некоторые классы, в которых  $b(t) \neq 0$ , а затем объединить их в итоговый результат истолкования.

**2. Решение В.А. Стеклова [12]** (см. [5]). Это решение уравнений (1) получено при условиях  $e_3 = e_2 = 0$  и имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{A_3 - A_2}{A_1}\omega_2^2 &= \frac{A_1 - A_3}{2A_2 - A_1}\omega_1^2 + \frac{2A_3 - A_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}H, \\ \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_3^2 &= \frac{A_1 - A_2}{2A_3 - A_1}\omega_1^2 + \frac{2A_2 - A_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}H, \\ \nu_1\Gamma &= \frac{A_1(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{(2A_2 - A_1)(2A_3 - A_1)}\omega_1^2 + H, \\ \nu_2\Gamma &= \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{(2A_3 - A_1)}\omega_1\omega_2, \quad \nu_3\Gamma = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{2A_2 - A_1}\omega_1\omega_3, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_1\omega_3,\end{aligned}\tag{13}$$

где  $H = \pm\Gamma$ ,  $A_i$  – главные моменты инерции тела.

Для примера рассмотрим случай  $H = -\Gamma$ . Следуя [5], запишем решение Стеклова (13) в виде

$$\omega_1 = p_{10}\operatorname{cn}\varkappa t, \quad \omega_2 = -p_{20}\operatorname{sn}\varkappa t, \quad \omega_3 = p_{30}\operatorname{dn}\varkappa t,\tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}p_{10} &= \sqrt{\frac{(1-2c)(2b-1)}{(1-c)^2(b-1)}}, & p_{20} &= \sqrt{\frac{1-2c}{(1-c)(b-1)(b-c)}}, \\ p_{30} &= \sqrt{\frac{2b-1}{(1-c)^2(b-1)}}, & \varkappa &= \sqrt{\frac{b-c}{(1-c)(b-1)}}, \\ k &= \sqrt{\frac{b-1}{b-c}}, & b &= \frac{A_2}{A_1}, & c &= \frac{A_3}{A_1}.\end{aligned}\tag{15}$$

Следовательно, решение Стеклова выражается эллиптическими функциями Якоби (14), в которых модуль эллиптических функций имеет значение из (15). Величины  $p_{10}, p_{20}, p_{30}$  из (15) характеризуют вид подвижного годографа. Формулы (14) записаны для безразмерных значений компонент вектора угловой скорости, безразмерного времени  $t$  и безразмерных параметров  $b, c$ .

Неподвижный годограф вектора угловой скорости выражается по формулам (5)–(8) (см. [5]):

$$\omega_\xi(t) = p_{30}\operatorname{dn}\varkappa t, \quad \omega_\eta(t) = p_{20}\operatorname{sn}\varkappa t, \quad \omega_\zeta(t) = -p_{10}\operatorname{cn}\varkappa t.\tag{16}$$

В силу соотношений (16) вектор  $\mathbf{b}(t)$  выберем так:  $\mathbf{b}(t) = \frac{1}{\operatorname{dn}\varkappa t}\boldsymbol{\omega}$ . Тогда подвижный и неподвижный годографы вектора  $\mathbf{b}(t)$  задаются формулами

$$\mathbf{b}(t) = \frac{p_{10}\operatorname{cn}\varkappa t}{\operatorname{dn}\varkappa t}\mathbf{i}_1 - \frac{p_{20}\operatorname{sn}\varkappa t}{\operatorname{dn}\varkappa t}\mathbf{i}_2 + p_{30}\mathbf{i}_3,\tag{17}$$

$$\mathbf{b}(t) = p_{30}\mathfrak{e}_1 + \frac{p_{20}\operatorname{sn}\chi t}{\operatorname{dn}\chi t}\mathfrak{e}_2 - \frac{p_{10}\operatorname{cn}\chi t}{\operatorname{dn}\chi t}\mathfrak{e}_3. \quad (18)$$

Из формул (17), (18) следует, что движение тела в случае Стеклова можно представить качением без скольжения плоской кривой (17) по плоской кривой (18). При этом эти кривые симметричны относительно касательной к ним плоскости и являются эллипсами.

**3. Решение А.И. Докшевича при условиях Гесса [13].** Запишем уравнения (1), используя в качестве переменных компоненты момента количества движения  $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega} = (x, y, z)$  и компоненты вектора  $\boldsymbol{\nu} : \nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Гириационный тензор  $A^{-1}$  примем в виде

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 \\ b_1 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

и предположим, что центр масс лежит на первой координатной оси. Для записи уравнений движения используем безразмерные переменные  $x', y', z'$ ; безразмерное время  $t'$  и безразмерные параметры  $a', a'_1$

$$x = x'\sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}}, \quad y = y'\sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}}, \quad z = z'\sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}}, \quad t = \frac{1}{\sqrt{\Gamma b_1}}t', \quad a' = \frac{a}{b_1}, \quad a'_1 = \frac{a_1}{b_1}.$$

Опуская штрихи, из (1), (2), (19) имеем [15]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xz, & \dot{y} &= (a - a_1)xz + yz - \nu_3, & \dot{z} &= -(a - a_1)zy + x^2 - y^2 + \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= a_1z\nu_2 - (a_1y + x)\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= \nu_3(ax + y) - a_1z\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_1(a_1y + x) - \nu_2(ax + y), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad x\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 = k, \quad ax^2 + a_1(y^2 + z^2) + 2xy - 2\nu_1 = 2E. \quad (21)$$

Как показано в [13], уравнения (20), (21) допускают решение

$$\begin{aligned} y &= -c_1^2x + c_2^2x^{-1}, & z^2 &= m_0^2 - m_1^2x^2 - m_2^2x^{-2}, & \dot{x} &= -xz, \\ \nu_1 &= -1 + s^2x^2, & \nu_2 &= -a_1 + s_1^2x^2, & \nu_3 &= -s_2^2xz, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} 3c_1^2 &= 2a - a_1 + \sqrt{a^2 - aa_1 + a_1^2 + 3}, & c_2^2 &= \frac{a_1}{s_2^2}, & s_2^2 &= 2c_1^2 - a + a_1, \\ s^2 &= \frac{s_2^2}{4 + a_1^2}(3a_1c_1^2 - aa_1 - 2), & s_1^2 &= \frac{s_2^2}{4 + a_1^2}[(a_1^2 - 2)c_1^2 + 2a - a_1], \\ m_0^2 &= \frac{2}{s_2^2(4 + a_1^2)}[a_1(1 + a_1^2)c_1^2 + aa_1 - a_1^2 - 2], \\ m_1^2 &= \frac{1}{4 + a_1^2}[(a - c_1^2)^2 + (1 - a_1c_1^2)^2], & m_2^2 &= a_1^2/s_2^4. \end{aligned} \quad (23)$$

Зависимость переменной  $x$  от  $t$  найдем из третьего дифференциального уравнения системы (22)

$$x = x^* \operatorname{dn}(\rho t, k), \quad \rho = x^* |m_1|, \quad k = \frac{1}{x^*} \sqrt{x^{*2} - x_*^2}, \quad (24)$$

где

$$x_* = \frac{1}{|m_1| \sqrt{2}} \left( m_0^2 - \sqrt{m_0^4 - 4m_1^2 m_2^2} \right), \quad x^* = \frac{1}{|m_1| \sqrt{2}} \left( m_0^2 + \sqrt{m_0^4 - 4m_1^2 m_2^2} \right).$$

Компоненты  $\omega_i$  угловой скорости в силу (19) и введенных выше безразмерных переменных и параметров определяются соотношениями

$$\omega_1 = ax + y, \quad \omega_2 = a_1 y + x, \quad \omega_3 = a_1 z, \quad (25)$$

где  $x, y, z$  имеют значения из (22). Тогда подвижный годограф на основании (24), (25) имеет вид [15]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{x^* \operatorname{dn}(\rho t, k)} \left[ L_1(t) \mathbf{i}_1 + L_2(t) \mathbf{i}_2 + L_3(t) \mathbf{i}_3 \right], \\ L_1(t) &= (a - c_1^2) x^{*2} \operatorname{dn}^2(\rho t, k) + c_2^2, \\ L_2(t) &= (1 - a_1 c_1^2) x^{*2} \operatorname{dn}^2(\rho t, k) + a_1 c_2^2, \\ L_3(t) &= a_1 x^{*2} |m_1| k^2 \operatorname{sn}(\rho t, k) \operatorname{cn}(\rho t, k), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $k$  – модуль эллиптической функции, входящей в равенство (24). Значения параметров вектор-функции (26) указаны в (23).

Запишем неподвижный годограф [15]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \varkappa_3 \left[ x^* \operatorname{cn}(\rho t, k) \boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_* \operatorname{sn}(\rho t, k) \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right] + \frac{M(t)}{x^* \operatorname{dn}(\rho t, k)} \boldsymbol{\varepsilon}_3, \\ M(t) &= \varkappa_1^2 x^{*2} \operatorname{dn}^2(\rho t, k) - \varkappa_2^2, \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$  – параметры:

$$\varkappa_1^2 = c_1^2 - a + \frac{a_1 s^2}{s_2^2}, \quad \varkappa_2^2 = \frac{a_1}{s_2^2}, \quad \varkappa_3 = s_2^2 \sqrt{m_0^4 - 4m_1^2 m_2^2}.$$

В качестве функции  $b(t)$  выберем функцию  $\frac{1}{\omega_\zeta}$ . Тогда в силу (27) неподвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  такой

$$\mathbf{b}(t) = \varkappa_2 x^* M^{-1}(t) \operatorname{dn}(\rho t, k) \left[ x^* \operatorname{cn}(\rho t, k) \boldsymbol{\varepsilon}_1 + x_* \operatorname{sn}(\rho t, k) \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right] + \boldsymbol{\varepsilon}_3. \quad (28)$$

Запишем на основании выбранной функции  $b(t)$  уравнение подвижного годографа вектора  $\mathbf{b}(t)$ . Используя (26), имеем

$$\mathbf{b}(t) = M^{-1}(t) \left[ L_1(t) \mathbf{i}_1 + L_2(t) \mathbf{i}_2 + L_3(t) \mathbf{i}_3 \right]. \quad (29)$$

Покажем, что подвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  из (29) является плоской кривой. Коэффициенты при  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  в формуле (29) обозначим через  $b_1, b_2$ , а  $(x^*)^2 dn^2(\rho t, k)$  – через  $u$ . Составим линейную комбинацию  $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_0$ , где  $\alpha_i$  ( $i = 0, 2$ ) – параметры

$$\alpha_1[(a - c_1^2)u + c_2^2] + \alpha_2[(1 - a_1 c_1^2)u + a_1 c_2^2] = \alpha_0(\kappa_1^2 u + a_1 c_2^2).$$

Требую, чтобы данное равенство было тождеством по  $u$ , в силу (26) получим

$$\alpha_0 = -\alpha_1 - a_1 \alpha_2, \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha_2}{a_1} \left[ a_1 + \frac{(1 - a a_1)(4 + a_1^2)}{3a_1 c_1^2 - a a_1 - 2} \right].$$

Таким образом, подвижный годограф (29) является плоской замкнутой кривой, расположенной в плоскости  $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_0$ .

**4. Прецессионно-изоконические движения.** Рассмотрим первый класс прецессионно-изоконических движений общего вида [14]. Предположим, что для углов Эйлера  $\theta, \varphi, \psi$  выполняются условия  $\theta = \theta_0, \dot{\psi} = \dot{\varphi}$ . Тогда подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости таковы

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} [\sin \theta_0 \sin \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \theta_0 \cos \varphi \mathbf{i}_2 + (1 + \cos \theta_0) \mathbf{i}_3], \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} [\sin \theta_0 \sin \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \sin \theta_0 \cos \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (1 + \cos \theta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_3]. \quad (31)$$

Считаем  $\dot{\varphi}(t) > 0$ . Введем вектор  $\mathbf{b} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \boldsymbol{\omega}$ , тогда в силу (30), (31)

$$\mathbf{b}(t) = \sin \theta_0 \sin \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \theta_0 \cos \varphi \mathbf{i}_2 + (1 + \cos \theta_0) \mathbf{i}_3, \quad (32)$$

$$\mathbf{b}(t) = \sin \theta_0 \sin \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \sin \theta_0 \cos \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (1 + \cos \theta_0) \boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

Неподвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  из (32) является окружностью и расположен в плоскости  $(1 + \cos \theta_0)$ , подвижный годограф вектора  $\mathbf{b}(t)$  из (32) также является окружностью с тем же радиусом и расположен в плоскости  $(1 + \cos \theta_0)$ . То есть движение тела можно получить качением одной окружности по другой, симметричной данной относительно касательной плоскости. При этом необходимо учитывать значение величины  $\dot{\varphi}$ , определяющей величину угловой скорости и направление обкатывания годографов. В представлении движения данным способом наблюдается определенный аналог движения регулярной прецессии [14].

Изучим прецессионно-изоконические движения тела второго класса [14]

$$\theta = \theta_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\varphi} N^{-1}(\varphi), \quad N(\varphi) = b_0 + c_0 \sin \varphi, \quad (33)$$

где  $b_0, c_0$  – параметры:  $b_0^2 = 1 + c_0^2$ . Подвижный годограф с учетом (33) запишем так

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} N^{-1}(\varphi) \left[ a'_0 \sin \varphi \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \varphi \mathbf{i}_2 + (a_0 + N(\varphi)) \mathbf{i}_3 \right], \quad (34)$$

а неподвижный – в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \left\{ a'_0 \sin \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 - a'_0 \cos \psi \boldsymbol{\varepsilon}_2 + [1 + a_0 N(\varphi)] N^{-1}(\varphi) \boldsymbol{\varepsilon}_3 \right\}. \quad (35)$$

Пусть  $a_0 b_0 + 1 + a_0 c_0 \sin \varphi \neq 0$ . В качестве функции  $b(t)$  примем функцию

$$b(t) = N(\varphi) [\dot{\varphi} (1 + a_0 N(\varphi))]^{-1}. \quad (36)$$

Тогда из (34)–(36) имеем

$$\mathbf{b}(t) = [1 + a_0 N(\varphi)]^{-1} \left[ a'_0 \sin \varphi \mathbf{i}_1 + a'_0 \cos \varphi \mathbf{i}_2 + (a_0 + N(\varphi)) \mathbf{i}_3 \right], \quad (37)$$

$$\mathbf{b}(t) = N(\varphi) [1 + a_0 N(\varphi)]^{-1} \left[ a'_0 \sin \psi \boldsymbol{\varepsilon}_1 - a'_0 \cos \psi \boldsymbol{\varepsilon}_2 \right] + \boldsymbol{\varepsilon}_3, \quad (38)$$

где  $a_0 = \cos \theta_0$ ,  $a'_0 = \sin \theta_0$ .

Очевидно, вектор-функция (38) задает плоскую кривую. Покажем, что кривая, задаваемая вектор-функцией (37), также является плоской. Составим линейную комбинацию

$$\alpha_1 a'_0 \sin \varphi - \alpha_2 a'_0 \cos \varphi + \alpha_3 (a_0 + N(\varphi)) = \alpha_0 (1 + a_0 N(\varphi)).$$

Требую, чтобы данное равенство было тождеством по  $\varphi$ , получим

$$\alpha_2 = 0, \quad \alpha_0 = -\frac{\alpha_1}{a_0 a'_0 c_0^2} (a_0'^2 c_0 + a_0 b_0 c_0), \quad \alpha_3 = -\frac{(1 + a_0 b_0)}{a'_0 c_0} \alpha_1.$$

Следовательно, подвижный годограф лежит в плоскости

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_3 b_3 = \alpha_0.$$

Движение тела можно представить качением без скольжения двух плоских кривых (37), (38). При этом для сохранения направления качения параметры в формуле (36) необходимо выбрать так, чтобы функция  $b(t)$  была положительной.

Во всех рассмотренных случаях годографы вектора  $\mathbf{b}(t)$  являются плоскими кривыми, что в значительной степени усиливает наглядность в представлении движения.

Поскольку построение годографов векторов  $\boldsymbol{\omega}(t)$  и  $\mathbf{b}(t)$  основано на применении формулы (8), то представляет интерес ее другое представление

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \varepsilon_0 \arctg \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{i}_3} + \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_3) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{i}_3)^2} dt, \quad (39)$$

где  $\varepsilon_0 = 0$ , если  $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_3 = \text{const}$  и  $\varepsilon_0 = 1$ , если  $\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{i}_3 \neq \text{const}$ . Эквивалентность формул (8) и (39) можно доказать с помощью углов Эйлера. В отличие от (8), в формулу (39) не входит производная от угловой скорости.

**Закключение.** При применении многих методов кинематического истолкования движения тела (метода апекса, метода годографов и других методов) отсутствует визуальное представление о геометрии тела. Поэтому выбор метода исследования кинематических свойств движения тела может быть достаточно широким, в частности, основываться на произвольных геометрических объектах, связанных с телом.

В данной статье предложен модифицированный подход в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку, который использует теорему Пуансо. Показано, что движение тела можно представить качением без скольжения подвижного годографа вектора, коллинеарного вектору угловой скорости тела, по неподвижному годографу этого вектора, лежащему в некоторой плоскости в пространстве. Этот подход является некоторым аналогом истолкования Л. Пуансо движения свободного твердого тела. В работе [11] при исследовании движения тела в случае Гесса для направляющей неподвижного аксоида использована также плоская кривая. Предлагаемый метод является перспективным для геометрических исследований. Действительно, нетрудно показать, что в качестве подвижного годографа вектора  $\mathbf{b}(t)$  можно выбрать либо плоскую кривую, либо кривую, лежащую на эллипсоиде инерции, на сфере, либо на другой (характерной для изучаемой задачи) поверхности. Для указанных классов подвижного годографа на основе уравнений П.В. Харламова нетрудно указать и уравнения неподвижных годографов рассматриваемого вектора, что позволит получить кинематическое истолкование движения тела. Аналогичный способ можно применить и в выборе неподвижного годографа вектора  $\mathbf{b}(t)$ .

Автор выражает благодарность академику А.М. Ковалеву за обсуждение результатов работы.

1. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – Vd. 1, № 16. – P. 289-336.
2. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 158–159.
3. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 1978. – 294 с.
5. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегриродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 1986. – 296 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Жуковский Н.Е.* О значении геометрического истолкования в теоретической механике // Собр. соч.: в 7 т. – М.;Л.: Гостехиздат, 1950. – Т. 7. – С. 9-15.
8. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – **24**, f. 3–4. – P. 271-281.
9. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – V. 37, H. 2. – S. 153-181.
10. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12-27.

11. *Гашененко И.Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Там же. – 2010. – Вып. 40. – С. 12-20.
12. *Стежлов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, № 1. – С. 1-3.
13. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.
14. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
15. *Горр Г.В.* Методы исследования движений твердого тела и их приложение в классификации движений // Механика твердого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 54–74.

## G.V. Gorr

### About one approach to the application of Poinso theorem of kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point

The approach in the interpretation of the motion of a body with a fixed point which is based on a Poinso theorem is proposed. It is shown that the body motion can be presented by wobbling without sliding of the mobile hodograph of vector which is collinear to the vector of the angular velocity of a body, on the immobile hodograph of this vector which lies in some plane in the space.

**Keywords:** *Poinso theorem, P.V. Kharlamov kinematics equations, kinematic interpretation.*

## Г.В. Горр

### Про один підхід у застосуванні теореми Пуансо кінематичного тлумачення руху тіла з нерухомою точкою

Запропоновано підхід у тлумаченні руху тіла, що має нерухому точку, заснований на теоремі Пуансо. Показано, що рух тіла можна представити коченням без ковзання рухомого годографа вектора, колінеарного вектору кутової швидкості тіла, по нерухомому годографі цього вектора, що лежить у деякій площині у просторі.

**Ключові слова:** *теорема Пуансо, кінематичні рівняння П.В. Харламова, кінематичне тлумачення.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*

Получено 20.06.12

aprlmech@iamm.ac.donetsk.ua