УДК 531.36

©2012. **А.М. Ковалев**

ДИНАМИКА АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

С использованием метода функций Ляпунова и метода дополнительных функций исследуются вопросы неустойчивости в динамических системах. В рамках координатного подхода рассмотрена задача выделения неустойчивых координат и введено понятие ограниченной неустойчивости, играющее важную роль при анализе частичной устойчивости. Обсуждается вопрос о применимости теорем Ляпунова об устойчивости по линейному приближению в задачах частичной устойчивости.

Ключевые слова: *неограниченная неустойчивость, ограниченная неустойчивость, координатный подход.*

Введение. Широкое применение математических моделей для описания различных процессов живой и неживой природы привело к изменению методов их исследования. Основной чертой современных разработок является переход от полного изучения модели к анализу некоторых ее параметров. Этот подход коснулся и такой важной области как исследование вопросов устойчивости [1], что выразилось в создании теории частичной устойчивости [2]. В последнее время это направление получило дальнейшее развитие, результатом которого явилось введение координатного подхода в теорию устойчивости. При этом выяснилось, что для решения новых задач в случае устойчивых систем достаточно методов частичной устойчивости [2] совместно с методом дополнительных функций [3]. Сложнее оказалась ситуация для неустойчивых систем. Появились новые задачи, требующие новых постановок и методов в таком объеме, что они составили самостоятельное направление, получившее название теории неустойчивости [4]. Начальные шаги построения этой теории рассмотрены в данной статье.

1. Постановка задачи. Рассматриваются задачи устойчивости нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x \in D \subset R^n, \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D – некоторая окрестность нуля; функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $V(x)$ в силу системы (1): $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ – оператор дифференцирования, в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции – матрицу Якоби; символ $\langle \, , \, \rangle$ означает скалярное произведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАНУ и РФФИ (рег. № 0112U003346).

Прежде, чем ввести необходимые определения, стоит отметить отличие определений устойчивости и асимптотической устойчивости от неустойчивости, которое состоит в том, что для определения двух первых свойств рассматриваются все решения, начинающиеся в окрестности нулевого решения, а для определения неустойчивости – лишь некоторое множество решений из этой окрестности. Также широко распространен подход, при котором неустойчивыми называют решения, которые не являются устойчивыми (и асимптотически устойчивыми, хотя об этом явно не упоминается). В частности, такое определение дал и А.М. Ляпунов в своей монографии [1] и многие авторы современных монографий. Указанная особенность отражает существо явления и была замечена А.М. Ляпуновым. На первых страницах своей монографии [1], комментируя определение устойчивости (включающее и неустойчивость), А.М. Ляпунов приходит к заключению, что "для движений неустойчивых можно будет рассуждать об условной устойчивости".

Развитие теории устойчивости показывает, что при решении задач, связанных с неустойчивостью, в основном применяются следующие два определения.

Определение 1. Движение $x = 0$ называется неустойчивым, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точка x_* с $\|x_*\| < \delta$ и момент времени $t_* > t_0$, для которых $\|x(t_*; t_0, x_*)\| \geq \varepsilon$. Здесь и далее принято $x(t_0; t_0, x_*) = x_*$.

Определение 2 [2]. Движение $x = 0$ называется y-неустойчивым, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точка x_* с $\|x_*\| < \delta$ и момент времени $t_* > t_0$, для которых $\|y(t_*; t_0, x_*)\| \geq \varepsilon$. Здесь y является подвектором вектора $x^T = (y^T, z^T)$.

Определение 1 применяется при изучении неустойчивости решений. Определение 2 относится к задаче y-неустойчивости, которая является одной из задач частичной устойчивости. В ней, как и в задаче устойчивости (по всем переменным), наряду с определением 2, y-неустойчивым движением называется такое движение, для которого не выполняются условия определения частично устойчивого движения [2]. Такое определение было предложено и А.М. Ляпуновым, при этом движения рассматривались в малой окрестности нуля, как и в случае с обычной устойчивостью. В.В. Румянцев [2] расширил область рассмотрения движений в задаче частичной устойчивости:

$$D_R = \{x : \|y\| < H, \quad \|z\| < \infty\}, \tag{2}$$

где H – достаточно малое положительное число. Введение области (2) меняет подход к частичной устойчивости, особенно в неустойчивом случае, по сравнению с обычной, классической устойчивостью.

Применив определения частичной устойчивости к одной координате, придем к понятиям устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых координат. Это позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача 1. Выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные для системы (1).

Для теории и практики представляет интерес решение задачи 1 в двух вариантах. В первом варианте необходимо разделить заданные переменные x_i на указанные три группы. Во втором варианте требуется выделить три группы переменных $y_i = g_i(x)$ таким образом, что количество устойчивых y_1 и неустойчивых y_3 координат не может быть уменьшено, а количество асимптотически устойчивых y_2 координат не может быть увеличено при любых допустимых заменах $z_i = \theta_i(x)$. Здесь $g_i(0) = 0,\ \theta_i(0) = 0$, отображения $(g_1(x), g_2(x), g_3(x)),\ (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x))$ в нуле обратимы.

Задача 1 составляет основу координатного подхода в теории устойчивости, результаты которого важны для качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, а также для теории управления при разработке специальных алгоритмов управления и стабилизации процессов самой различной природы.

2. Решение задачи методом функций Ляпунова. Используем определения 1, 2 для анализа задач неустойчивости методом функций Ляпунова. Большинство исследователей при рассмотрении неустойчивых движений применяли определение 1, т.е. решали задачу в начальной постановке. Трудности задачи подчеркивает тот факт, что в дополнение к результатам А.М. Ляпунова были получены всего две теоремы: это теоремы Н.Г. Четаева и Н.Н. Красовского. При этом вопрос о решении задачи неустойчивости методом функций Ляпунова в полном объеме остался незавершенным. Полностью закрыть вопрос об использовании функций со знакопостоянной производной в задачах неустойчивости (как и в задачах устойчивости) позволил метод дополнительных функций, при разработке которого была использована следующая теорема П.В. Харламова.

Теорема 1. Порождаемое инвариантным соотношением $\varphi(x) = 0$ инвариантное множество G системы (1) определяется уравнениями

$$\varphi^{(i)}(x) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots l-1),$$

где l – число независимых функций в последовательности

$$\varphi(x), \dot{\varphi}(x), \ddot{\varphi}(x), \dots, \tag{3}$$

при этом $\nabla\varphi(x) \neq 0$ для $x \in G$.

Приведем два типа дополнительных функций, применяемых для преобразования функции Ляпунова. В простейшем случае, когда множество M обращения в нуль производной $\dot{V}(x)$ описывается одной функцией $\varphi(x)$: $M = \{x : \varphi(x) = 0, \nabla\varphi(x) \neq 0\}$ и задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3), в качестве дополнительной функции принимается функция

$$V_a = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \langle\langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\rangle. \tag{4}$$

Функция типа

$$V_{ai} = \langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle^{2m} \langle\langle \nabla\varphi_i(x), f(x)\rangle, \varphi_i(x)\rangle \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{s} \varphi_j^2(x)$$

принимается в качестве дополнительной функции для множества M_i в случае, когда множество M состоит из нескольких множеств $M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} M_i$, для каждого из которых задача существования инвариантного множества решается первыми двумя членами последовательности (3).

С целью рассмотрения всего круга задач устойчивости (включая и неустойчивость) ставится вопрос о максимальном расширении области знакоопределенности производной для известной функции со знакопостоянной производной, не обращая при этом внимания на значения самой функции. Используя метод дополнительных функций, получаем следующий результат.

Теорема 2 [3]. Пусть для системы (1) известна функция $V(x)$ со знакопостоянной производной $\dot{V}(x)$. Тогда добавлением конечного числа дополнительных функций строится функция $V_f(x)$, производная которой $\dot{V}_f(x)$ является знакопостоянной функцией, при этом множество ее обращения в нуль является инвариантным множеством.

Воспользуемся методом дополнительных функций и теоремой 2 для получения обобщающей теоремы о неустойчивости. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3 [3]. Пусть для системы (1) существует функция $V(x)$ производная которой $\dot{V}(x)$ является функцией знакопостоянной и представима в форме знакоопределенной функции $\dot{V}(y)$ меньшего числа переменных $y_1, \ldots, y_k \quad (k < n)$, причем множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ является инвариантным. При этом в любой сколь угодно малой окрестности B нуля существуют точки $x \in B \setminus M$, в которых функция $V(x)$ принимает значения того же знака, что и $\dot{V}(x)$. Тогда нулевое решение неустойчиво.

Доказательство теоремы проводится по схеме, созданной А.М. Ляпуновым при доказательстве первой теоремы о неустойчивости. Необходимо отметить, что теорема 3 дает необходимые и достаточные условия неустойчивости при использовании функций Ляпунова. При этом первая теорема Ляпунова о неустойчивости и теорема Красовского о неустойчивости получаются из нее как частные случаи.

Подводя итог, заключаем, что вопрос о неустойчивости решений в смысле определения 1 и с использованием функций Ляпунова решен теоремой 3 полностью, и эта теорема становится в один ряд со второй теоремой Ляпунова о неустойчивости и теоремой Четаева, также представляющими необходимые и достаточные условия неустойчивости. Теперь представляется возможным перейти к рассмотрению задач y-неустойчивости (в смысле определения 2).

3. Выделение неустойчивых переменных. Для выделения неустойчивых переменных естественно применить теоремы о частичной неустойчивости. Такие теоремы имеются. Однако необходимо отметить, что многие из имеющихся теорем содержат либо трудно выполнимые условия, либо неточности, приводящие к противоречиям. В качестве примера приведем теорему 7.2 монографии [2], использование которой затруднено из-за требования ограниченности функции $V(x)$ в области D_R. Невыполнение этого требования приводит к неверному результату. Поэтому для выделения неустойчивых координат воспользуемся подходом, основанным на определении неустойчивости, восходящим к А.М. Ляпунову и определяющим неустойчивыми координаты, которые не являются устойчивыми, либо асимптотически устойчивыми. Кроме того, применим качественный анализ с использованием общего решения дифференциальных уравнений. Для прояснения ситуации рассмотрим два примера.

Пример 1. Выделим неустойчивые переменные в системе

$$\dot{x}_1 = ax_2, \qquad \dot{x}_2 = -bx_1, \qquad \dot{x}_3 = -bx_1^2 \quad (a > 0, b > 0). \tag{5}$$

В качестве функции Ляпунова примем

$$V_1 = x_1 x_2 - x_3. \tag{6}$$

Производная функции (6) $\dot{V}_1 = ax_2^2$ является функцией положительно постоянной и обращется в нуль на множестве $M = \{x : x_2 = 0\}$. По формуле (4) получаем дополнительную функцию $V_a = -(bx_1)^{2m+1}x_2$. Добавляя ее к функции (6), имеем

$$V_{1f} = V_1 + \alpha V_a = x_1 x_2 - x_3 - \alpha(bx_1)^{2m+1}x_2. \tag{7}$$

Производная функции (7)

$$\dot{V}_{1f} = \alpha(bx_1)^{2m+2} + ax_2^2(1 - \alpha(2m+1)b^{2m+1}x_1^{2m})$$

при достаточно малом $\alpha > 0$ и $m \geq 0$ будет функцией положительно постоянной (положительно определенной относительно x_1, x_2) и множество обращения ее в нуль $M_1 = \{x : x_1 = 0, x_2 = 0\}$ является инвариантным. Функция (7) удовлетворяет теореме 3 и нулевое решение системы (5) неустойчиво. С целью дальнейшего исследования рассмотрим функцию $V_2 = bx_1^2 + ax_2^2$. Имеем $\dot{V}_2 = 0$ и по теореме Румянцева [2] получаем, что нулевое решение системы (5) устойчиво относительно переменных x_1, x_2. Отсюда следует, что переменные x_1, x_2 являются устойчивыми. В силу доказанной неустойчивости нулевого решения заключаем, что переменная x_3 не является устойчивой либо асимптотически устойчивой, т.е. переменная x_3 – неустойчива. Таким образом, переменные системы (5) полностью разделены.

Полученный результат есть решение задачи 1 для системы (5), причем как в первом, так и во втором вариантах, т.е. имеем случай, когда решение задачи 1 для первого и второго вариантов совпадают. При исследовании использован подход, когда неустойчивыми определяются координаты, которые не могут быть устойчивыми либо асимптотически устойчивыми. Этот пример также демонстрирует трудности выделения неустойчивых переменных. Так, функции (6), (7) удовлетворяют теореме 7.2 [2], кроме условия их ограниченности в области D_R, и поэтому вытекающие из нее заключения относительно x_2-неустойчивости и (x_1, x_2)-неустойчивости являются неверными.

Перейдем к рассмотрению следующего примера, который выявляет сложности при решении задачи 1 в двух вариантах.

Пример 2. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \qquad \dot{x}_2 = 5x_1 - 3x_2, \qquad \dot{x}_3 = 6x_1 - 4x_3. \tag{8}$$

Функция Ляпунова $V = x_1^2$ имеет производную $\dot{V} = 4x_1^2$ и удовлетворяет теореме 3. На основании этого нулевое решение системы (8) неустойчиво и, более того, переменная x_1 – неустойчива. Сделать заключение относительно переменных x_2, x_3 с использованием функций Ляпунова довольно сложно ввиду трудности их построения. Однако, воспользовавшись формулой общего решения

$$x_1 = c_1 e^{2t}, \;\; x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}, \;\; x_3 = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-4t},$$

получаем, что все переменные x_1, x_2, x_3 являются неустойчивыми. Этот факт кажется удивительным, имея ввиду собственные числа системы (8): $\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = -3, \; \lambda_3 = -4$. Разрешение этой ситуации состоит в том, что это заключение получено при решении задачи 1 в первом варианте, а собственные числа сыграют свою роль при рассмотрении второго варианта решения.

Сделаем в системе (8) замену переменных

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2 - x_1, \qquad y_3 = x_3 - x_1. \tag{9}$$

В переменных (9) система (8) принимает вид

$$\dot{y}_1 = 2y_1, \qquad \dot{y}_2 = -3y_2, \qquad \dot{y}_3 = -4y_3.$$

Нетрудно видеть, что переменная y_1 является неустойчивой, переменные y_2, y_3 являются асимптотически устойчивыми, при этом количество неустойчивых переменных не может быть уменьшено, а количество асимптотически устойчивых переменных не может быть увеличено. Это есть решение задачи 1 для системы (8) во втором варианте.

Отметим, что теорем с использованием функций Ляпунова для выделения неустойчивых переменных нет, и для решения этой задачи в примере 2 пришлось находить общее решение и специальную замену координат, что не всегда возможно, особенно в нелинейных системах. Представляется перспективным прием, примененный в примере 1, связанный с выделением устойчивых и асимптотически устойчивых переменных, что может быть выполнено с применением функций Ляпунова и дополнительных функций. Разработка этого направления близка к завершению.

4. Частичная устойчивость при наличии неустойчивых переменных. Наличие неустойчивых переменных оказывает сильное влияние на поведение динамической системы. Покажем на примере конкретных систем, какие новые эффекты с этим связаны и к каким новым требованиям и ограничениям это приводит при исследовании вопросов устойчивости таких систем.

Пример 3. Рассмотрим устойчивость системы

$$\dot{x} = -x(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_k y^k), \qquad \dot{y} = y. \tag{10}$$

Переменная y является неустойчивой и $y \underset{t\to\infty}{\to} \infty$. Система (10) рассматривается в неограниченной области $D_R = \{(x, y) : |x| < \delta, \; -\infty < y < \infty\}$, где δ – достаточно малое положительное число. Для переменной x получаем, что при $k = 2m + 1, a_k \neq 0$ переменная x неустойчива. Это следует из того, что, выбирая $y_0 = y(t_0)$ из условия $y_0 a_k < 0$, получаем, что при любом достаточно малом y_0 для достаточно большого t_* выполняется условие $1 + a_1 y(t) + a_2 y^2(t) + \ldots + a_k y^k(t) < 0$ для всех $t \geq t_*$. Это приводит к тому, что, начиная с этого момента, x возрастает и $x \underset{t\to\infty}{\to} \infty$. Применяя аналогичные рассуждения, получаем следующий результат: при $k = 2m,\ a_k < 0$ переменная x неустойчива, а при $k = 2m,\ a_k > 0$, $1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_k y^k > 0$ $(-\infty < y < \infty)$ переменная x асимптотически устойчива. Таким образом, при конечном значении k в зависимости от значений a_k переменная x в системе (10) будет либо неустойчивой, либо асимптотически устойчивой.

Интересный результат получается, если вместо конечной суммы рассмотреть ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k}$, здесь $a_{2k+1} = 0,\ \ a_{2k} = (-1)^k$:

$$\dot{x} = -x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k}, \qquad \dot{y} = y. \tag{11}$$

Данный ряд при $|y| < 1$ сходится: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k} = (1 + y^2)^{-1}$, и, подставив данное выражение в систему (11), получаем известный пример В.В. Румянцева, А.С. Озиранера [2]:

$$\dot{x} = -\frac{x}{1 + y^2}, \qquad \dot{y} = y. \tag{12}$$

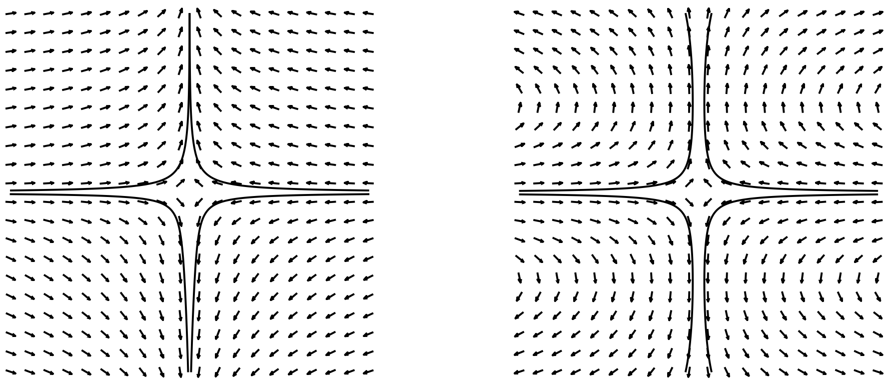
Не связывая получение системы (12) из системы (10) путем использования ряда и ограничения $|y| < 1$, рассмотрим вопросы устойчивости системы (12) в неограниченной области $D_R = \{(x, y) : |x| < \delta,\ -\infty < y < \infty\}$. В монографии [2] непосредственным интегрированием для нахождения $x(t)$ показано, что переменная x является устойчивой. В какой-то мере это согласуется со вторым случаем $(k = 2m)$ в системе (10), когда с последовательным увеличением k переменная x становится асимптотически устойчивой, затем неустойчивой, снова асимптотически устойчивой и т.д. В пределе (система (11)) она становится ни той, ни другой, а устойчивой. Своего рода критический случай в частичной устойчивости.

Фазовые портреты системы (10) с x-асимптотически устойчивой переменной $(a_1 = a_2 = 1,\ k = 2)$, x-неустойчивой переменной $(a_1 = 0,\ a_2 = -1,\ k = 2)$ и системы (12) с x-устойчивой переменной показаны на рис. 1 *a*, *b*, 2 *a*.

Рассмотренная система представляет пример неограниченной неустойчивости $\big(y(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty\big)$. Ситуация несколько меняется, когда неустойчивость является ограниченной $(|y(t)| < a,\ \forall t \geq t_0)$. Видоизменим несколько систему (10) и выясним, к чему это приведет.

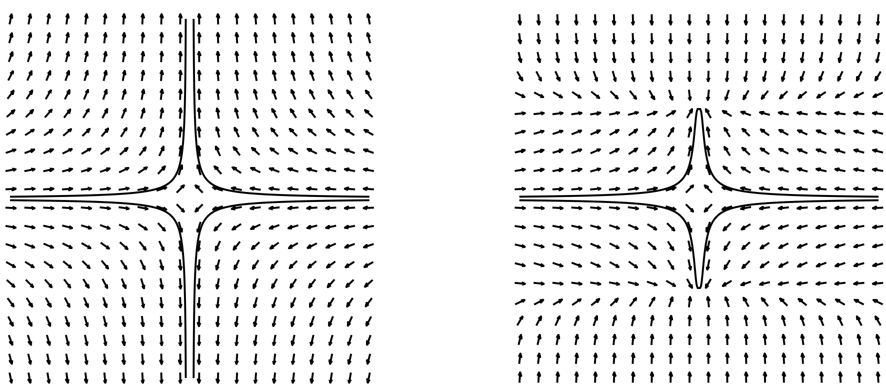
Пример 4. Рассмотрим устойчивость системы

$$\dot{x} = -x(1 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_k y^k), \qquad \dot{y} = y(1 - y^2). \tag{13}$$



a) $a_1 = a_2 = 1$, $k = 2$ *b*) $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $k = 2$

Рис. 1. Фазовый портрет системы (10).



a) *b*)

Рис. 2. Фазовые портреты систем (12),(14).

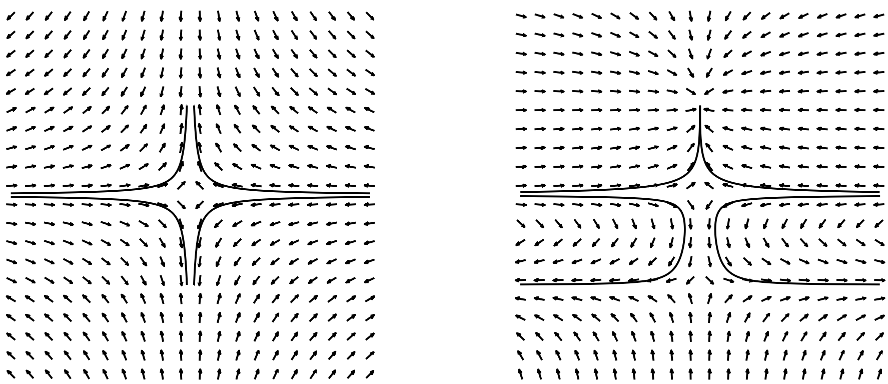
Переменная y является неустойчивой, и для y_0 из окрестности $|y| < 1$ имеем $|y(t; t_0, y_0)| \underset{t\to\infty}{\to} 1$ (здесь $y(t; t_0, y_0) = y_0$) т.е. имеем случай ограниченной неустойчивости. Поэтому система (13) рассматривается в ограниченной области $D_R = \{(x, y) : |x| < \delta, |y| < 1\}$, где δ – достаточно малое положительное число. В отличие от примера 3, получить полное решение в зависимости от коэффициентов a_k довольно сложно. Для упрощенного варианта решения введем функцию $\alpha_k = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_k y^k$. Результат можно сформулировать следующим образом. Переменная x является асимптотически устойчивой, если $\exists\, t^*$ такое, что при $t > t^*$ имеем $\alpha(t) > 0$, и является неустойчивой, если $\alpha(t) < 0$. Для заданных значений a_i такая проверка выполняется достаточно просто, например, с применением компьютера. Отметим, что, если в системе (10) все зависит от значения старшего коэффициента a_k, то в системе (13) при любых заданных коэффициентах $a_1, a_2, ..., a_{s-1}, a_{s+1}, ..., a_k$ нетрудно подобрать коэффициенты $a_s^{(1)}$, $a_s^{(2)}$ таким образом, чтобы переменная x была асимптотически устойчивой при $a_s^{(1)}$ и неустойчивой при $a_s^{(2)}$. Возможны случаи, когда переменная x является устойчивой. В частности, это происходит, когда у системы в дополнение к нулевой точке имеется одномерное множество особых точек, что имеет место, например, для системы $\dot{x} = -x(1-y^2)$, $\dot{y} = y(1-y^2)$, фазовый портрет которой представлен на рис. 3 *a*.

Как и в примере 3, вместо конечной суммы используем в уравнениях (13) уже употреблявшийся в примере 3 ряд. Тогда вместо системы (12) получим следующую систему

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+y^2}, \qquad \dot{y} = y(1-y^2). \tag{14}$$

Поскольку в данном случае $|y| < 1$, то отсюда сразу следует, что x является асимптотически устойчивой переменной, а y – по-прежнему неустойчивой. В отличие от примера 3, использование ряда ничего нового в систему не принесло.

Фазовые портреты системы (13) с x-устойчивой переменной $(a_1 = 0, a_2 = -1, k = 2)$, x-неустойчивой переменной $(a_1 = 3, a_2 = 1, k = 2)$ и системы (14) с x-асимптотически устойчивой переменной показаны на рис. 3 *a*, *b*; 2 *b*.



a) $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $k = 2$ *b*) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $k = 2$

Рис. 3. Фазовый портрет системы (13).

Первые выводы, которые можно сделать на основе примеров 3, 4, связаны с установлением зависимости свойств устойчивости и асимптотической устойчивости от наличия особых точек. В случае ограниченной неустойчивости наличие дополнительной (отличной от нулевой точки) особой точки, асимптотически устойчивой по (x, y), приводит к x-асимптотической устойчивости, наличие одномерного множества (не проходящего через нуль) особых точек, устойчивых по x и асимптотически устойчивых по y, приводит к

x-устойчивости нулевого решения. Отсутствие дополнительных особых точек влечет неограниченную y-неустойчивость, влияние которой на устойчивость системы достаточно простое.

Продолжая анализ примеров 3,4, отметим, что в линейном приближении все системы (10), (12)–(14) описываются одной системой

$$\dot{x} = -x, \qquad \dot{y} = y,$$

которая не имеет корней характеристического уравнения с нулевой вещественной частью. Если бы в рассматриваемой ситуации были применимы теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению, то для всех систем (10), (12)–(14) имела бы место x-асимптотическая устойчивость и y-неустойчивость. Приведенные результаты показывают, что наличие нелинейных членов может изменить свойство устойчивости в любую сторону. Отсюда делаем заключение, что установленные А.М. Ляпуновым теоремы об устойчивости по линейному приближению не применимы в задачах частичной устойчивости.

Следующее важное наблюдение состоит в том, что при анализе устойчивости требуется рассмотрение всех неустойчивых траекторий (вместо одной при установлении свойства неустойчивости решений) и на всем промежутке времени $t_0 \leq t < \infty$ (вместо ограниченного промежутка $t_0 \leq t \leq t^*$ до момента t^* покидания траекторией заданной окрестности). Такое рассмотрение на примере систем (10), (13) приводит к введению нового свойства – ограниченной неустойчивости, когда неустойчивые траектории остаются в ограниченной области во все время движения. Именно ограниченная неустойчивость приводит к смене x-устойчивости в системе (12) (рис. 2 *a*) на x-асимптотическую устойчивость в системе (14) (рис. 2 *b*) и, наоборот, к смене x-асимптотической устойчивости в системе (10) (рис. 1 *a*) на x-неустойчивость в системе (13) (рис. 3 *b*).

Заключение. Приведем основные выводы, следующие из выполненного исследования.

1. При исследовании задач устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных для систем с неустойчивыми переменными необходимо изучить не одну траекторию, а все семейство неустойчивых траекторий, при этом в области либо ограниченной, либо неограниченной (что отличается от процедуры исследования и формулировки свойства неустойчивости). Понятие неустойчивости разделено на два: неограниченная неустойчивость и ограниченная неустойчивость, влияние которых на свойство устойчивости различно.

2. Выполненное в п.п. 3, 4 исследование вопросов выделения неустойчивых переменных и их влияния на устойчивость показало, что разработанных методов для решения этих задач недостаточно. Выяснилось, что эффективными являются два направления: 1. непосредственное выделение неустойчивых координат; 2. выделение устойчивых и асимптотически устойчивых переменных, а неустойчивые переменные определяются как не входящие в первые две группы. В реальном анализе эти приемы применяются совместно.

3. При изучении свойств устойчивости и асимптотической устойчивости для систем с неустойчивыми переменными установлено, что теоремы Ляпунова об устойчивости (движения) по линейному приближению не работают в задачах частичной устойчивости.

4. Установленные выше новые свойства поведения нелинейных систем с неустойчивыми переменными являются результатом решения задачи 1 о разделении переменных и формируют координатный подход в теории устойчивости. Необходимо отметить важность координатного подхода, а также факт, что координатный подход вполне обоснованно разделил теорию устойчивости на две теории: теорию устойчивости и теорию неустойчивости. Формирование теории неустойчивости, формулировка ее задач и методов – это вопросы ближайшего будущего.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; *Ляпунов А.М.* Собр. соч. – М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
3. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
4. *Ковалев А.М.* Теория неустойчивости: от Ляпунова к Четаеву и до наших дней // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. X Междунар. Четаевской конф. (Казань, 12–16 июня 2012 г.) – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – Т. 5. Пленарные докл. – С. 26–39.

A.M. Kovalev

Dynamics of autonomous systems in the presence of unstable variables

The questions of instability in dynamical systems are investigated using the Lyapunov functions method and method of additional functions. The problem of isolation of unstable coordinates has been considered within the bounds of the coordinate approach, and the conception of a bounded instability playing an important role in the analysis of partial stability has been introduced. The question of applicability of Lyapunov theorems about stability by linear approximation in problems of partial stability has been discussed.

Keywords: *unbounded instability, bounded instability, coordinate approach.*

О.М. Ковальов

Динаміка автономних систем при наявності нестійких змінних

З використанням методу функцій Ляпунова і методу додаткових функцій досліджуються питання нестійкості в динамічних системах. У рамках координатного підходу розглянуто задачу виділення нестійких координат і введено поняття обмеженої нестійкості, що відіграє важливу роль при аналізі часткової стійкості. Обговорюється питання про застосовність теорем Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням у задачах часткової стійкості.

Ключові слова: *необмежена нестійкість, обмежена нестійкість, координатний підхід.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 17.08.12