УДК 517.9

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Н. А. Богай

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We obtain sufficient conditions for existence and uniqueness of continuous N-periodic solutions (N is a positive integer) of a certain class of systems of nonlinear difference equations with continuous argument, and study properties of such solutions.

Получены достаточные условия существования и единственности непрерывных N-периодических решений (N — целое положительное число) одного класса систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом и исследованы их свойства.

Системи різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = F(t, x(t), x(t-1), \ldots, x(t-k)), \tag{1}$$

де $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $k \geq 1$, $F : R^+ \times R^n \times \ldots \times R^n \to R^n$, $x(t)$ — невідома вектор-функція розмірності n, були об'єктом дослідження багатьох математиків (див. роботи [1–4] і наведену в них літературу), і тому ряд питань їх теорії достатньо добре вивчено. Особливо це стосується питань існування неперервних і неперервних N-періодичних (N — ціле додатне число) розв'язків таких рівнянь. Зокрема, в [5, 6] отримано досить загальні достатні умови існування неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь вигляду (1) і досліджено їх структуру, в [7] встановлено умови існування й єдиності неперервних N-періодичних розв'язків деяких класів нелінійних рівнянь вигляду (1) у випадку, коли $F(t, x, x_1, \ldots, x_k) \equiv F(t, x)$, і розроблено метод їх побудови. В даній роботі продовжено дослідження неперервних розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь вигляду (1). Основна мета — встановлення достатніх умов існування й єдиності неперервних, неперервних N-періодичних розв'язків таких рівнянь і дослідження їх властивостей. При цьому під розв'язком системи рівнянь (1) будемо розуміти вектор-функцію $x(t)$, яка є однозначно визначеною при $t \geq -k$ і перетворює її в тотожність при підстановці.

1. Дослідимо питання про існування неперервних при $t \geq -k$ розв'язків.

Припустимо, що виконується така умова:

1) всі елементи вектора $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ є неперервними при $t \in R^+$, $x_i \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, функціями.

Тоді розв'язок $x(t)$ системи рівнянь (1) побудуємо таким чином. Оскільки для довільного $t \in R^+$ виконується співвідношення $t - [t] = \tau \in [0, 1)$, де $[t]$ — ціла частина t, то покладаючи

$$x(\tau - i) = x_{-i}(\tau - i), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{2}$$

де $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, — довільні неперервні при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функції, безпосередньо з (1) послідовно отримуємо

$$
\begin{aligned}
x(\tau+1) &= F(\tau, x(\tau), x(\tau-1), \ldots, x(\tau-k)) = F^1(\tau, x_0(\tau), x_{-1}(\tau-1), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), \\
x(\tau+2) &= F(\tau+1, x(\tau+1), x(\tau), x(\tau-1), \ldots, x(\tau-k+1)) = \\
&= F(\tau+1, F^1(\tau, x_0(\tau), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), x_0(\tau), \ldots, x_{-(k-1)}(\tau-k+1)) = \\
&= F^2(\tau+1, x_0(\tau), x_{-1}(\tau-1), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(\tau+k+1) &= F(\tau+k, x(\tau+k), \ldots, x(\tau)) = \\
&= F(\tau+k, F^k(\tau+k-1, x_0(\tau), x_{-1}(\tau-1), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), \ldots \\
&\quad \ldots, F^1(\tau, x_0(\tau), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), x_0(\tau)) = \\
&= F^{k+1}(\tau+k, x_0(\tau), x_{-1}(\tau-1), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), \qquad (3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x(t) &= x(\tau+[t]) = F(\tau+[t]-1, x(\tau+[t]-1), \ldots, x(\tau+[t]-k-1)) = \\
&= F(\tau+[t]-1, F^{[t]-1}(\tau+[t]-2, x_0(\tau), \ldots, x_{-k}(\tau-k)), \ldots \\
&\quad \ldots, F^{[t]-k-1}(\tau+[t]-k-2, x_0(\tau), \ldots, x_{-k}(\tau-k))) = \\
&= F^{[t]}(\tau+[t]-1, x_0(\tau), \ldots, x_{-k}(\tau-k)).
\end{aligned}
$$

Таким чином, ми побудували сім'ю розв'язків, яка залежить від $k+1$ довільних неперервних при $\tau \in [0,1)$ вектор-функцій $x_{-i}(\tau-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Кожен розв'язок цієї сім'ї є, взагалі кажучи, кусково-неперервним (розриви можуть виникати в точках $t = -k+1, -k+2, \ldots$). Щоб ці розв'язки були неперервними при всіх $t \geq -k$, необхідно, очевидно, встановити деякі додаткові умови, які повинні задовольняти довільні функції $x_{-i}(\tau-i), i = 0, 1, \ldots, k$. Зокрема, якщо неперервні при $\tau \in [0,1)$ вектор-функції $x_{-i}(\tau-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, задовольняють умови

$$\lim_{\tau \to 1-0} x_{-i}(\tau-i) = x^1_{-i} \neq \pm\infty, \quad i = 0, 1, \ldots, k, \qquad (4)$$

і виконуються рівності

$$x_{-i}^1 = x_{-i+1}(-i+1), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$x_0^1 = F(0, x_0(0), x_{-1}(-1), \ldots, x_{-k}(-k)), \tag{5}$$

то можна переконатися, що кожен розв'язок системи рівнянь (1), який визначається за допомогою співвідношення (3), є неперервним при всіх $t \geq -k$.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо вектор-функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ задовольняє умову 1, то система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \geq -k$ розв'язків (3), яка залежить від $k+1$ довільних неперервних при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функцій $x_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, що задовольняють умови (4), (5).*

2. Дослідимо тепер питання про існування неперервних N-періодичних (N — ціле додатне число) розв'язків системи рівнянь (1). При цьому будемо припускати, що для неї виконуються такі умови:

2) вектор-функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ є неперервною при $t \in R$, $x_i \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, і N-періодичною відносно t;

3) вектор-функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|F(t, x_0', x_1', \ldots, x_k') - F(t, x_0'', x_1'', \ldots, x_k'')| \leq L \sum_{i=0}^{k} |x_i' - x_i''|,$$

де $t \in R$, $x_i', x_i'' \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $0 < L < 1$, $|x| = \max\limits_{0 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 2, 3, то система рівнянь (1) має єдиний неперервний N-періодичний розв'язок.*

Доведення теореми проведемо за допомогою методу послідовних наближень. Послідовні наближення $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначимо співвідношеннями

$$\begin{aligned} &x_0(t) = 0, \\ &x_m(t) = F(t-1, x_{m-1}(t-1), x_{m-1}(t-2), \ldots, x_{m-1}(t-k-1)), \quad m = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Беручи до уваги умови теореми, неважко показати, що всі вектор-функції $x_m(t)$, $m \geq 0$, є неперервними при $t \in R$ N-періодичними вектор-функціями.

Покажемо, що при $t \in R$ і всіх $m \geq 0$ виконуються оцінки

$$\big| x_m(t) - x_{m-1}(t) \big| \leq M\Theta^{m-1}, \tag{7}$$

де $M = \max\limits_t \big|F(t, 0, \ldots, 0)\big|$, $\Theta = L(k+1) < 1$.

Дійсно, на підставі (6) і умови 2 маємо

$$\big|x_1(t) - x_0(t)\big| = \big|F(t-1, 0, \ldots, 0)\big| \leq M,$$

тобто оцінка (7) виконується при $m = 1$. Припустимо, що вона виконується для деякого $m \geq 1$. Тоді, враховуючи умови теореми, співвідношення (6) і оцінки (7), знаходимо

$$\left|x_{m+1}(t) - x_m(t)\right| = \left|F(t-1, x_m(t-1), x_m(t-2), \ldots, x_m(t-k-1)) - \right.$$

$$\left. - F(t-1, x_{m-1}(t-1), x_{m-1}(t-2), \ldots, x_{m-1}(t-k-1))\right| \leq$$

$$\leq L \sum_{j=1}^{k+1} \left|x_m(t-j) - x_{m-1}(t-j)\right| \leq LM\Theta^{m-1}(k+1) = M\Theta^m.$$

Тим самим ми показали, що вектор-функції $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, які визначаються співвідношеннями (6), є неперервними N-періодичними і задовольняють при всіх $t \in R$, $m \geq 0$ умову (7). Тоді, очевидно, послідовність вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної N-періодичної функції $\vartheta(t)$, яка задовольняє систему рівнянь

$$\vartheta(t) = F(t-1, \vartheta(t-1), \ldots, \vartheta(t-k-1)). \tag{8}$$

В цьому можна переконатись, якщо в (6) перейти до границі при $m \to +\infty$. Оскільки тотожність (8) має місце при всіх $t \in R$, то

$$\vartheta(t+1) \equiv F(t, \vartheta(t), \ldots, \vartheta(t-k)),$$

тобто вектор-функція $\vartheta(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} x_m(t)$ є неперервним N-періодичним розв'язком системи рівнянь (1).

Доведемо тепер, що побудований вище неперервний N-періодичний розв'язок $\vartheta(t)$ системи рівнянь (1) є єдиним.

Дійсно, нехай існує ще один неперервний N-періодичний розв'язок $w(t)$ системи рівнянь (1) такий, що $\vartheta(t) \neq w(t)$. Тоді на підставі умов теореми і тотожностей

$$\vartheta(t) = F(t-1, \vartheta(t-1), \ldots, \vartheta(t-k-1)),$$

$$w(t) = F(t-1, w(t-1), \ldots, w(t-k-1))$$

одержуємо

$$|\vartheta(t) - w(t)| \leq L \sum_{j=1}^{k+1} |\vartheta(t-j) - w(t-j)| \leq L(k+1)\|\vartheta(t) - w(t)\|,$$

або

$$\|\vartheta(t) - w(t)\| \leq \Theta\|\vartheta(t) - w(t)\|,$$

де $\|\vartheta(t) - w(t)\| = \max\limits_t |\vartheta(t) - w(t)|$. Із останнього співвідношення випливає $\vartheta(t) \equiv w(t)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

3. Дослідимо неперервні асимптотично періодичні розв'язки.

Продовжимо дослідження системи рівнянь (1) у припущенні, що виконуються умови 2, 3. Згідно з теоремою 2 система рівнянь (1) має в цьому випадку єдиний неперервний N-періодичний розв'язок $\vartheta(t) = \lim\limits_{m\to+\infty} x_m(t)$, де вектор-функції $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначаються співвідношеннями (6). Тоді за допомогою взаємно однозначної заміни змінних

$$x(t) = y(t) + \vartheta(t) \tag{9}$$

дослідження системи рівнянь (1) можна звести до дослідження системи

$$y(t+1) = \tilde{F}(t, y(t), y(t-1), \ldots, y(t-k)), \tag{10}$$

де

$$\tilde{F}(t, y(t), y(t-1), \ldots, y(t-k)) = F(t, y(t) + \vartheta(t), y(t-1) + \vartheta(t-1), \ldots, y(t-k)+$$

$$+\vartheta(t-k)) - F(t, \vartheta(t), \vartheta(t-1), \ldots, \vartheta(t-k)).$$

Беручи до уваги умови 2, 3, легко переконатися, що вектор-функція $\tilde{F}(t, y_0, y_1, \ldots, y_k)$ є неперервною при $t \in R$, $y_i \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $\tilde{F}(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ і задовольняє умову

$$|\tilde{F}(t, y_0^{'}, y_1^{'}, \ldots, y_k^{'}) - \tilde{F}(t, y_0^{''}, y_1^{''}, \ldots, y_k^{''})| \le L \sum_{i=0}^{k} |y_i^{'} - y_i^{''}|. \tag{11}$$

Покажемо, що система рівнянь (10) має сім'ю неперервних при $t \ge -k$ розв'язків $y(t) = y(t, y_0(\tau), \ldots, y_{-k}(\tau-k))$ ($y_{-i}(\tau-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, — довільні неперервні вектор-функції), які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0. \tag{12}$$

Дійсно, покладемо

$$y(\tau - i) = y_{-i}(\tau - i), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{13}$$

де $y_{-i}(\tau-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, — довільні неперервні при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функції, що задовольняють умови

$$\lim_{\tau\to 1-0} y_{-i}(\tau - i) = y_{-i}^1 \ne \pm\infty, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

$$y_{-i}^1 = y_{-i+1}(-i+1), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{14}$$

$$y_0^1 = \tilde{F}(0, y_0(0), y_{-1}(-1), \ldots, y_{-k}(-k)).$$

Тоді безпосередньо із (10) послідовно отримуємо

$$y(\tau+1) = \tilde{F}(\tau, y_0(\tau), y_{-1}(\tau-1), \ldots, y_{-k}(\tau-k)),$$

$$y(\tau+2) = \tilde{F}(\tau+1, y(\tau+1), y_0(\tau), \ldots, y_{-k+1}(\tau-k+1)),$$

$$y(\tau+k+1) = \tilde{F}(\tau+k, y(\tau+k), \ldots, y(\tau)), \tag{15}$$

$$y(\tau+k+2) = \tilde{F}(\tau+k+1, y(\tau+k+1), \ldots, y(\tau+1)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y(t) = y(\tau+[t]) = \tilde{F}(\tau+[t]-1, y(\tau+[t]-1), \ldots, y(\tau+[t]-k-1)).$$

Всі розв'язки, що визначаються співвідношеннями (15), є, очевидно, неперервними при всіх $t \geq -k$ (випливає із (13), (14)). Крім цього, на підставі (11), (15) одержуємо

$$\big|y(\tau+1)\big| \leq \tilde{M}L(k+1) = \tilde{M}\Theta,$$

$$\big|y(\tau+2)\big| \leq L(\tilde{M}\Theta + \tilde{M} + \ldots + \tilde{M}) \leq \tilde{M}L(k+1) = \tilde{M}\Theta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\big|y(\tau+k+1)\big| \leq \tilde{M}\Theta,$$

$$\big|y(\tau+k+2)\big| \leq L(\tilde{M}\Theta + \ldots + \tilde{M}\Theta) = \tilde{M}\Theta L(k+1) = \tilde{M}\Theta^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\big|y(\tau+2k+2)\big| \leq \tilde{M}\Theta^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\big|y(\tau+jk+i)\big| \leq \tilde{M}\Theta^{j+1}, \quad j \geq 0, \quad i = j+1, j+2, \ldots, j+k+1,$$

де $\tilde{M} = \max\big\{\max\limits_{\tau}\big|y_{-i}(\tau-i), i = 0, 1, \ldots, k\big\}$. Оскільки $0 < \Theta < 1$, то з останніх співвідношень випливає, що довільний розв'язок, який визначається за допомогою (15), задовольняє умову (12). Звідси і з (9) випливає наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 2, 3, то система рівнянь (1) має сім'ю неперервних при $t \geq -k$ розв'язків $x(t) = \vartheta(t) + y(t)$, де $\vartheta(t)$ — неперервний N-періодичний розв'язок цієї системи, а $y(t) = y(t, y_0(\tau), \ldots, y_{-k}(\tau-k))$ визначається формулами (15), в яких функції $y_i(\tau-i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, задовольняють умови (13), (14), для яких має місце співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty}[x(t) - \vartheta(t)] = 0$.*

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**, № 2. — P. 242–284.

2. *Guldberg A., Wallenberg G.* Theorie der linearen Differenzengleichungen. — Berlin, 1911. — 288 S.

3. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.

4. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 127 с.

5. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 351–359.

6. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН РАН. — 1994. — **336**, № 4. — С. 451–452.

7. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1626–1633.

Одержано 29.05.2006