

УДК 517.926

ХАОТИЧЕСКАЯ БУФЕРНОСТЬ И ЕЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ*

А. Ю. Колесов

Ярослав. ун-т, Россия

Е. Ф. Мищенко

*Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, 8
e-mail: mishch@mi.ras.ru*

Н. Х. Розов

*Моск. ун-т
Россия, 119899, Москва, Воробьевы горы
e-mail: rozov@rozov.mccme.ru*

We propose a general idea for obtaining different chains of connected oscillators that have a chaotic buffering. As examples, we consider chains of diffusionally connected generalized cubic Schrödinger equations and nonlinear telegraph equations. We also give an example of a system that has an infinite dimensional chaotic attractor.

Запропоновано загальну ідею, за допомогою якої можна отримувати різні ланцюжки зв'язаних осциляторів із хаотичною буферністю. Як конкретні приклади розглянуто ланцюжки дифузійно зв'язаних узагальнених кубічних рівнянь Шредінгера та нелінійних телеграфних рівнянь. Наведено також приклади систем, що мають нескінченновимірний хаотичний аттрактор.

1. Постановка задачи. Будем говорить о явлении *буферности*, если в некоторой эволюционирующей во времени нелинейной системе при подходящем выборе параметров можно добиться сосуществования любого наперед заданного конечного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.). В случае же, когда имеем дело с хаотическими аттракторами, соответствующий феномен назовем *хаотической буферностью*. Как известно, цепочки и решетки связанных генераторов с сосредоточенными параметрами являются полезными физически содержательными моделями, позволяющими выяснить ряд закономерностей развития пространственно-временного хаоса в сплошных средах [1–3]. При этом, как правило, в качестве отдельно взятого звена цепочки (парциальной системы) рассматривается генератор, описывающийся системой обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным устойчивым циклом. Например, в работах [1–3] использована одна и та же парциальная система

$$\dot{u} = u - d|u|^2u, \quad d = 1 + ic_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

* Выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004) и целевой программы „Развитие научного потенциала высшей школы” (проект РНП.2.1.1.630).

где u — комплекснозначная функция, но рассмотрены различные соответствующие ей цепочки. А именно, в [1, 2] изучалась цепочка однонаправленно связанных генераторов (1), т. е. система вида

$$\dot{u}_j + \alpha(u_j - u_{j-1}) = u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

а в [3] — аналогичная цепочка диффузионно связанных генераторов

$$\dot{u}_j = \alpha(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

где $u_0 = u_N$, $u_{N+1} = u_1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Было установлено, что в обоих случаях при достаточно большом количестве звеньев в соответствующей системе может наблюдаться хаотическое поведение, обусловленное коллективным взаимодействием парциальных осцилляторов.

Предположим теперь, что в цепочках (2), (3) или в какой-либо аналогичной цепочке каждое звено заменено генератором с распределенными параметрами, в котором реализуется феномен буферности в простейшем его варианте, когда речь идет о циклах. В итоге получим систему, имеющую (при определенных дополнительных условиях) достаточно большое число сосуществующих хаотических аттракторов. Как будет показано ниже при рассмотрении конкретных примеров, для того чтобы добиться требуемого эффекта, вовсе не обязательно использовать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно происходит в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством.

Перейдем к математическому описанию проблемы. В качестве парциальной системы при построении интересующей нас цепочки осцилляторов используем обобщенное кубическое уравнение Шредингера и дополним его граничными условиями 2π -периодичности. В итоге получим краевую задачу

$$u_t + i\sigma_0 u_{xx} = u - d|u|^2 u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (4)$$

где $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция, $d = 1 + ic_0$, а c_0, σ_0 — положительные параметры, связанные неравенством

$$\sigma_0 > 2c_0. \quad (5)$$

Приведенную задачу будем рассматривать как эволюционную систему в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, где E — гильбертово пространство 2π -периодических функций класса W_2^2 . Заметим, что выбранная таким способом парциальная система имеет требуемое свойство буферности. Действительно, как показывает несложная проверка, краевая задача (4) имеет счетное число автомодельных циклов (бегущих волн)

$$u = \exp[i(\sigma_0 n^2 - c_0)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

которые являются устойчивыми (в метрике $E \times E$) при условии (5) и неустойчивыми при выполнении строго противоположного неравенства.

Рассмотрим, далее, цепочку диффузионно связанных осцилляторов (4), т. е. систему вида

$$u_t + i\sigma_0 u_{xx} + i\mu\Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (7)$$

где $u = \text{colon}(u_1, \dots, u_N)$, $|u|^2 = \text{colon}(|u_1|^2, \dots, |u_N|^2)$; $u_j = u_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$, — комплекснозначные функции; натуральное $N \geq 5$ произвольно фиксировано; $\mu > 0$ — малый параметр; $*$ — операция покомпонентного умножения векторов, а матрица связи Λ размера $N \times N$ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как будет установлено ниже, при выполнении условия (5) эта система имеет счетное число устойчивых N -мерных торов, причем при некоторых дополнительных ограничениях на параметр c_0 каждый из них является носителем хаотического аттрактора.

2. Основной результат. Рассмотрим сначала соответствующую задаче (7) точечную модель, т. е. систему

$$\dot{u} + i\mu\Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad (8)$$

и убедимся, что при всех достаточно малых $\mu > 0$ она имеет глобально экспоненциально устойчивый N -мерный инвариантный тор. С этой целью сначала выполним в ней замену $u_j = \rho_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, \dots, N$, где $\rho_j > 0$, $0 \leq \tau_j \leq 2\pi \pmod{2\pi}$. В результате она преобразуется к виду

$$\dot{\rho}_j = \rho_j - \rho_j^3 + \mu[\rho_{j+1} \sin \alpha_j - \rho_{j-1} \sin \alpha_{j-1}], \quad j = 1, \dots, N, \quad (9)$$

$$\dot{\alpha}_j = -c_0(\rho_{j+1}^2 - \rho_j^2) - \mu \left[\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \cos \alpha_{j+1} + \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} - \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \cos \alpha_j - \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \cos \alpha_{j-1} \right], \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (10)$$

$$\dot{\tau}_N = -c_0 \rho_N^2 - \mu \left[\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} \cos \alpha_{N-1} - 1 \right], \quad (11)$$

где $\tau_0 = \tau_1$, $\tau_{N+1} = \tau_N$, $\rho_0 = \rho_1$, $\rho_{N+1} = \rho_N$, $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Нетрудно заметить, что интересующий нас глобально устойчивый инвариантный тор заведомо существует у системы (9)–(11) при $\mu = 0$. Действительно, в этом случае он задается равенствами $\rho_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, а поведение траекторий на нем описывают уравнения $\dot{\alpha}_j = 0$, $j = 1, \dots, N-1$, $\dot{\tau}_N = -c_0$. Далее, из общих результатов монографии

[4] следует, что указанный тор сохраняется у системы (9)–(11) и при всех малых $\mu > 0$, причем теперь он имеет вид

$$\rho_j = 1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где достаточно гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по $\alpha_k, k = 1, \dots, N - 1$, функции ψ_j таковы, что

$$\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = \frac{1}{2} (\sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Что же касается движений на данном торе, то они описываются системой

$$\dot{\alpha}_j = \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad \dot{\tau}_N = -c_0 + \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (14)$$

получающейся из (10), (11) при учете соотношений (12). Отметим еще вытекающие из (13) равенства

$$\begin{aligned} \Phi_j|_{\mu=0} &= -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N - 1, \\ \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) &= c_0 \sin \alpha_{N-1} - \cos \alpha_{N-1} + 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Лемма 1. *Найдется такое достаточно малое число $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (7) имеет пространственно однородный (не зависящий от x) инвариантный тор*

$$u_j = \exp(i\tau_j)[1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)], \quad j = 1, \dots, N, \quad (16)$$

движения на котором задаются системой (14). Данный тор экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) в метрике фазового пространства $E^{2N} = E \times \dots \times E$ при $\sigma_0 - 2c_0 > 0$ (< 0).

В части существования лемма уже доказана, поскольку найденный выше инвариантный тор (16) системы (8) является одновременно и пространственно однородным тором задачи (7). Для исследования же его свойств устойчивости достаточно положить $\mu = 0$. Действительно, в этом случае рассматриваемый тор представляет собой прямое произведение N независимых циклов $u_j = \exp(-ic_0 t), j = 1, \dots, N$, каждый из которых устойчив в своей парциальной системе

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad u_j(t, x + 2\pi) \equiv u_j(t, x)$$

при выполнении условия (5) и неустойчив при строгом его нарушении.

Проблему нахождения других аттракторов задачи (7), отличных от однородного тора (16), существенно облегчает так называемый принцип самоподобия [5]. Суть этого принципа заключается в следующем. Выполним в (7) замену $u(t, x) = T_n[v(t, x)]$, где

$$T_n[v(t, x)] = v(t, 2\sigma_0 n t + x) \exp[i(\sigma_0 n^2 t + n x)], \quad (17)$$

n — произвольное целое число, а затем перейдем к новой пространственной переменной $\varphi = 2\sigma_0 n t + x$. В результате для функции $v = v(t, \varphi)$ с точностью до обозначений получим прежнюю краевую задачу

$$v_t + i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + i\mu\Lambda v = v - d|v|^2 * v, \quad v(t, \varphi + 2\pi) \equiv v(t, \varphi).$$

Иными словами, оператор (17) переводит решение $u(t, x)$ задачи (7) в решение $T_n[u(t, x)]$ той же самой краевой задачи.

Из принципа самоподобия вытекают два важных следствия. Во-первых, пусть в фазовом пространстве E^{2N} краевой задачи (7) имеется компактное множество A , инвариантное относительно ее траекторий

$$(\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) : \operatorname{Re} u = (\operatorname{Re} u_1, \dots, \operatorname{Re} u_N), \quad \operatorname{Im} u = (\operatorname{Im} u_1, \dots, \operatorname{Im} u_N) \quad (18)$$

(как обычно, это означает, что если $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in A$ при $t = 0$, то аналогичное включение справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$). Тогда, применяя к каждой траектории (18) из A оператор

$$\widetilde{T}_n : (\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) \rightarrow (\operatorname{Re} T_n[u(t, x)], \operatorname{Im} T_n[u(t, x)]), \quad (19)$$

получаем серию множеств

$$A_n = \widetilde{T}_n(A), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (20)$$

также инвариантных для траекторий задачи (7). Во-вторых, если в предыдущем случае A — аттрактор краевой задачи (7), то ее аттракторами будут и все множества (20). Таким образом, если известен какой-либо один из аттракторов A задачи (7), то „тиражируя” его с помощью оператора (19), получаем счетное их число.

Возвратившись к интересующей нас проблеме, в качестве множества A возьмем инвариантный тор (16) задачи (7) и применим к нему описанный выше принцип самоподобия. В результате получим следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условия (5) существует такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при каждом $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (7) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых инвариантных торов*

$$A_n : \{u_j = \exp[i(\tau_j + nx)](1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), j = 1, \dots, N\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (21)$$

движения на которых описываются системами

$$\dot{\alpha}_j = \mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad \dot{\tau}_N = \sigma_0 n^2 - c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (22)$$

где функции ψ_j, Φ_j, Ψ те же, что и в (12), (14).

Убедимся, наконец, что при определенном выборе параметра c_0 каждый тор (21) является носителем хаотического аттрактора. С этой целью рассмотрим отщепляющуюся от (22) систему для $\alpha_j, j = 1, \dots, N-1$, выполним в ней замену времени $\mu t \rightarrow t$ и опустим в правых частях получившейся системы слагаемые порядка малости μ и выше. В результате с учетом равенств (15) она преобразуется к виду

$$\dot{\alpha}_j = -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$.

Вычисления, выполненные с помощью программы Д. С. Глызина (<http://tracer3.narod.ru>), показали, что, например, при $c_0 = 0,6$, $N = 5$ система (23) имеет хаотический аттрактор с показателями Ляпунова $\lambda_1 \approx 0,194$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -0,08$, $\lambda_4 \approx -1,507$, а при $c_0 = 0,6$, $N = 6$ — аттрактор с показателями $\lambda_1 \approx 0,247$, $\lambda_2 \approx 0,055$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 \approx -0,202$, $\lambda_5 \approx -1,579$. Аналогичное справедливо и при других значениях c_0 . Более того, как установлено в [6], с ростом N размерность Ляпунова d_L хаотического аттрактора системы (23) неограниченно возрастает примерно по линейному закону. Действительно, при $c_0 = 0,6$ получаются следующие наборы данных:

$$N = 7 : \lambda_1 = 0,288, \lambda_2 = 0,096, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -0,03, \lambda_5 = -0,384, \\ \lambda_6 = -1,589, d_L = 4,926;$$

$$N = 8 : \lambda_1 = 0,305, \lambda_2 = 0,138, \lambda_3 = 0,019, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = -0,163, \lambda_6 = -0,52, \\ \lambda_7 = -1,597, d_L = 5,574;$$

$$N = 9 : \lambda_1 = 0,322, \lambda_2 = 0,164, \lambda_3 = 0,051, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = -0,078, \lambda_6 = -0,266, \\ \lambda_7 = -0,597, \lambda_8 = 1,616, d_L = 6,324;$$

$$N = 10 : \lambda_1 = 0,318, \lambda_2 = 0,19, \lambda_3 = 0,075, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = -0,024, \lambda_6 = -0,167, \\ \lambda_7 = -0,356, \lambda_8 = -0,656, \lambda_9 = -1,653, d_L = 7,055;$$

$$N = 11 : \lambda_1 = 0,32, \lambda_2 = 0,192, \lambda_3 = 0,092, \lambda_4 = 0,013, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = -0,094, \\ \lambda_7 = -0,229, \lambda_8 = -0,399, \lambda_9 = -0,695, \lambda_{10} = -1,642, d_L = 7,735.$$

Таким образом, справедлива приближенная формула $d_L \simeq 0,763N - 0,568$.

3. Случай граничных условий Неймана. В этом пункте придадим полученным выше результатам некоторую общность. А именно, проиллюстрируем реализуемость феномена хаотической буферности в рамках краевой задачи

$$u_t + iu_{xx} + i\varepsilon\mu\Lambda u = \varepsilon[u - d|u|^2 * u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (24)$$

где $\varepsilon = 1/\sigma_0$, получающейся из (7) после нормировки времени $\sigma_0 t \rightarrow t$ и замены граничных условий.

Наиболее просто динамические свойства краевой задачи (24) выявляются при дополнительном предположении о малости ε , которое всюду ниже считаем выполненным. Действительно, рассмотрим сначала соответствующую цепочке (24) парциальную систему, т. е. краевую задачу

$$u_t + iu_{xx} = \varepsilon[u - d|u|^2 u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \quad (25)$$

в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, $E = \overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Как установлено в монографии [7], при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ краевая задача (25) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых (в метрике $E \times E$) автомодельных циклов

$$u_n(t, x, \varepsilon) = u_n(x, \varepsilon) \exp[i\omega_n(\varepsilon)t], \quad n \geq 1, \quad \omega_n \in \mathbb{R}, \quad (26)$$

где достаточно гладкие по своим переменным функции u_n , ω_n таковы, что равномерно по $n \geq 1$, $x \in [0, \pi]$

$$u_n(x, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos nx + O(\varepsilon), \quad \omega_n(\varepsilon) = n^2 - c_0\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (27)$$

Циклы (26), (27) играют здесь ту же роль, что и бегущие волны (6) в случае краевой задачи (7). А именно, как будет показано ниже, устойчивые циклы $u_j = u_n(t, x, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, N$, с одинаковыми номерами n , существующие при $\mu = 0$ в парциальных системах

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \varepsilon[u_j - d|u_j|^2 u_j], \quad \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_j}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0,$$

при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы. При этом, что самое главное, количество таких торов счетно, и при надлежащем выборе параметра c_0 каждый из них содержит хаотический аттрактор.

Последовательность дальнейших действий аналогична изложенному в п. 2: сначала устанавливается существование одного иницирующего инвариантного тора, а после этого осуществляется его „тиражирование” с помощью некоторого аналога описанного выше принципа самоподобия.

Остановимся сначала на алгоритмической части проблемы. Точнее говоря, убедимся, что система (24) имеет формальное интегральное многообразие вида

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \varepsilon^2 v_2(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \dots, \quad (28)$$

где $\xi = \operatorname{colon} (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\bar{\xi} = \operatorname{colon} (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N)$, а комплексные параметры ξ_j , $j = 1, \dots, N$, на многообразии эволюционируют во времени по закону

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon \Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \varepsilon^2 \Delta_2(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \dots. \quad (29)$$

Предполагаем еще, что вектор-функции v_k , Δ_k , $k \geq 1$, удовлетворяют при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ дополнительным требованиям

$$v_k(x, \mu, \exp(i\alpha) \xi, \exp(-i\alpha) \bar{\xi}) = \exp(i\alpha) v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (30)$$

$$\Delta_k(\exp(i\alpha) \xi, \exp(-i\alpha) \bar{\xi}, \mu) = \exp(i\alpha) \Delta_k(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (31)$$

а также условию

$$\int_0^\pi v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) \cos x dx = 0. \quad (32)$$

Итак, подставим соотношения (28), (29) в (24) и последовательно приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате на первом шаге для отыскания v_1 приходим к краевой задаче

$$i \left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} \right) + i \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (33)$$

Ее анализ основывается на том факте, что фигурирующие в (28) коэффициенты v_k должны удовлетворять равенствам (30). Действительно, дифференцируя указанные равенства по α и полагая затем $\alpha = 0$, убеждаемся, что

$$\frac{\partial v_k}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_k}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} = v_k, \quad k \geq 1. \quad (34)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что краевая задача (33) преобразуется к виду

$$iLv_1 = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \quad \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (35)$$

где $Lv = d^2v/dx^2 + v$, а переменные $\xi, \bar{\xi}$ рассматриваются как параметры.

Исследование задачи (35) уже не вызывает затруднений и проводится по стандартной схеме: сначала из условия ее разрешимости определяем функцию

$$\Delta_1 = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4}d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (36)$$

а затем находим и само решение v_1 , для которого с учетом соответствующего равенства (32) получаем формулу

$$v_1 = -\frac{id}{32} \xi * \bar{\xi} * \xi \cos 3x. \quad (37)$$

Заметим, что функции (36), (37) имеют требуемые свойства (30), (31) и, в частности, для v_1 справедливо соотношение (34) при $k = 1$. Поэтому выполненный выше переход от задачи (33) к (35), имевший условный характер, правомерен. Отметим также, что хотя продолжение алгоритма нахождения коэффициентов рядов (28), (29) не вызывает затруднений, но для наших целей достаточно уже имеющейся информации.

На следующем этапе используем построенную выше систему первого приближения

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon\Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu)$$

на многообразии (28) и выполним в ней последовательно замены $\xi \exp(-it) \rightarrow \xi$, $\bar{\xi} \exp(it) \rightarrow \bar{\xi}$ и $\varepsilon t \rightarrow t$. В результате получим систему

$$\dot{\xi} = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4}d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (38)$$

которая с точностью до нормировок и переобозначений совпадает с (8). Отсюда и из содержащегося в п. 2 анализа заключаем, что система (38) имеет глобально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\xi_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j)(1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (39)$$

где функции ψ_j те же, что и в (12).

Подведем некоторый итог. Из выполненных построений следует, что равенством

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (40)$$

в котором учтены соотношения (39), задается приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной задачи (24), а система уравнений на этом торе имеет вид

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad \dot{\tau}_N = 1 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (41)$$

где функции Φ_j, Ψ взяты из (14). Существование соответствующего точного инвариантного тора с главной асимптотикой (39)–(41) вытекает из общих результатов монографии [8]. А именно, справедливо следующее утверждение, являющееся аналогом леммы 1.

Лемма 2. *Найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (24) имеет экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор*

$$u_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos x + \varepsilon H_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu, x) \right], \quad j = 1, \dots, N, \quad (42)$$

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon \mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon G_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu) \right], \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (43)$$

$$\dot{\tau}_N = 1 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon^2 \Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu), \quad (44)$$

где все функции достаточно гладко зависят от своих переменных и являются 2π -периодическими по $\alpha_k, k = 1, \dots, N - 1$.

Сформулированная лемма нуждается в некоторых пояснениях. Отметим, во-первых, что система (24) не меняется при замене $\exp(i\alpha)u \rightarrow u, \alpha \in \mathbb{R}$. Именно поэтому правые части формул (42) пропорциональны $\exp(i\tau_j)$, а все остальные фигурирующие в (42)–(44) функции зависят не от самих фазовых переменных $\tau_j, j = 1, \dots, N$, а от их разностей $\alpha_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Во-вторых, при $\mu = 0$ тор (42)–(44) представляет собой прямое произведение N одинаковых устойчивых циклов $u_j = u_1(t, x, \varepsilon), j = 1, \dots, N$ (см. (26), (27) при $n = 1$), т. е. записывается в виде

$$u_j = u_1(\tau_j, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau}_j = \omega_1(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N. \quad (45)$$

Тем самым становится понятной причина его устойчивости при малых $\mu > 0$, а также проясняется происхождение множителя μ в правых частях системы (43).

Инвариантный тор, доставляемый леммой 2, является искомым иницирующим тором. Процедура же его „тиражирования” в данном случае такова. Пусть $u = u(t, x, \varepsilon)$ — произвольное решение краевой задачи (24). Продолжим его по переменной x сначала на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, при любом натуральном n функция $u(n^2t, nx, \varepsilon/n^2)$ также будет решением задачи (24). Применяя, далее, эту процедуру при каждом n ко всем решениям, лежащим на торе (42)–(44), получаем счетное число N -мерных инвариантных торов. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *При всех достаточно малых независимых $\varepsilon, \mu > 0$ краевая задача (24) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых N -мерных инвариантных торов*

$$u_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos nx + \frac{\varepsilon}{n^2} H_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu, nx) \right], \quad j = 1, \dots, N, \quad (46)$$

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon \mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon}{n^2} G_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu) \right], \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (47)$$

$$\dot{\tau}_N = n^2 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon^2}{n^2} \Omega \left(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu \right), \quad (48)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а функции $\psi_j, H_j, \Phi_j, G_j, \Psi, \Omega$ взяты из (42)–(44).

Причина, по которой все торы (46)–(48) устойчивы, та же, что и в случае тора (42), (43). Действительно, при $\mu = 0$ эти торы принимают аналогичный (45) вид

$$u_j = u_n(\tau_j, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau}_j = \omega_n(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N,$$

где функции $u_n, \omega_n, n \geq 1$, взяты из (26). Далее, как показано в [7], циклы (26) краевой задачи (25) имеют свойство равномерной устойчивости, т. е. существует такая не зависящая от ε и $n \geq 1$ постоянная $\gamma_0 > 0$, что все характеристические показатели этих циклов (за исключением, естественно, простых нулевых) лежат в комплексной полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 \varepsilon\}$. И наконец, опираясь на развитую в [7] методику, можно показать, что свойство равномерной устойчивости, имеющее место для торов (46)–(48) при $\mu = 0$, сохраняется и при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Из проведенного анализа следует, что краевая задача (24) имеет свойство хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к системе (47), выполним в ней замену $\varepsilon \mu t \rightarrow t$ и опустим асимптотически малые (равномерно по $n \geq 1$) слагаемые. В итоге она примет вид (23). Таким образом, остается сослаться на результаты численного счета, упомянутые в п. 2.

4. Случай однонаправленно связанных осцилляторов. Рассмотренные выше примеры представляют собой цепочки диффузионно связанных генераторов. Однако феномен

хаотической буферности может наблюдаться и при другом характере связи. В качестве примера приведем систему из трех обобщенных кубических уравнений Шредингера, однонаправленно связанных в кольцо. Точнее говоря, рассмотрим цепочку

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \varepsilon[iu_{k-1} + d|u_k|^2 u_k] = 0, \quad (49)$$

$$u_k|_{x=0} = u_k|_{x=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (50)$$

где $u_k = u_k(t, x)$ — комплекснозначные функции, причем $u_0(t, x) \equiv u_3(t, x)$. Считаем, что $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $d = 1 + ic_0$, а $c_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma_0 > 0$ — некоторые постоянные порядка единицы. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $\text{Re } u_k(0, x)$, $\text{Im } u_k(0, x)$, $k = 1, 2, 3$) задачи (49), (50) возьмем $E^6 = E \times \dots \times E$, где $E = \dot{W}_2^2(0, \pi)$, а через \dot{W}_2^2 в данном случае обозначено соответствующее соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (50).

Для отыскания возможных автоколебательных режимов системы (49), (50) воспользуемся методикой, изложенной в [8, 9]. А именно, подставим в нее асимптотические ряды по целым степеням ε :

$$u_k = u_{k,0}(t, \tau, x) + \varepsilon u_{k,1}(t, \tau, x) + \dots, \quad k = 1, 2, 3, \quad (51)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $u_{k,j}$, $j \geq 0$, — формальные тригонометрические ряды переменной t , причем

$$u_{k,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\sigma_0 n^2 t) z_{n,k}(\tau) \sin nx, \quad k = 1, 2, 3, \quad (52)$$

а $z_{n,k}$, $n \geq 1$, $k = 1, 2, 3$, — некоторые пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды колебаний. Приравнявая, далее, в (49), (50) коэффициенты при ε , для $u_{k,1}$ получаем линейные неоднородные краевые задачи вида

$$\frac{\partial u_{k,1}}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_{k,1}}{\partial x^2} = g_k(t, \tau, x), \quad u_{k,1}|_{x=0} = u_{k,1}|_{x=\pi} = 0, \quad (53)$$

где $g_k = -\partial u_{k,0}/\partial \tau - [iu_{k-1,0} + d|u_{k,0}|^2 u_{k,0}]$, а переменная τ рассматривается как параметр.

Отметим, что задачи (53) разрешимы в классе формальных тригонометрических рядов в том и только в том случае, когда их правые части g_k не содержат гармоник вида $\exp(i\sigma_0 n^2 t) \sin nx$, $n \geq 1$. Поэтому приравняем коэффициенты при упомянутых гармониках к нулю. В результате для определения фигурирующих в (51), (52) комплексных амплитуд $z_{n,k}$ после нормировок $\sqrt{3} z_{n,k}/2 \rightarrow z_{n,k}$ получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - d \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |z_{m,k}|^2 \right] z_{n,k}, \quad n \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (54)$$

где $z_{n,0} = z_{n,3}$, $n \geq 1$, а точка обозначает дифференцирование по τ .

Систему (54) будем рассматривать в дальнейшем как самостоятельный объект исследования. Точнее говоря, поставим вопрос об аттракторах этой системы в фазовом пространстве \mathbb{Z} (над полем действительных чисел), состоящем из бесконечномерных векторов

$$z = (z_{1,1}, \bar{z}_{1,1}, z_{1,2}, \bar{z}_{1,2}, z_{1,3}, \bar{z}_{1,3}, \dots, z_{n,1}, \bar{z}_{n,1}, z_{n,2}, \bar{z}_{n,2}, z_{n,3}, \bar{z}_{n,3}, \dots) \quad (55)$$

с комплексными координатами, для которых конечна норма

$$\|z\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 |z_{n,k}|^2 \right)^{1/2} \quad (56)$$

(в этом случае построенная по вектору (55) функция (52) принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$ по переменной x). Заметим, что поскольку система (54) порождает эволюционное уравнение в пространстве \mathbb{Z} с ограниченной и гладкой по Фреше правой частью, локальная однозначная разрешимость для нее задачи Коши с произвольным начальным условием из \mathbb{Z} вытекает из результатов монографии [10].

В первую очередь будем интересоваться существованием у системы (54) так называемых одномодовых аттракторов. В связи с этим зафиксируем произвольно натуральное n и обозначим через Ω_n ее инвариантное множество, задающееся равенством

$$\Omega_n = \{ z \in \mathbb{Z} : z_{m,k} = 0, k = 1, 2, 3 \text{ при всех } m \neq n; \\ (z_{n,1}, z_{n,2}, z_{n,3}) = (v_1, v_2, v_3) \in \Omega \}, \quad (57)$$

где Ω — некоторый аттрактор шестимерной системы

$$\dot{v}_k = -iv_{k-1} - d|v_k|^2 v_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (58)$$

в которой $v_0 = v_3$. Заметим, что в силу диссипативности системы (58) совокупность ее возможных аттракторов Ω заведомо не пуста.

Перейдем к вопросу об устойчивости одномодовых инвариантных множеств (58) по „дополнительным” направлениям $z_{m,k}$, $m \neq n$. Проводя линеаризацию системы (54) на произвольной траектории $\{z_{m,k} = 0, z_{n,k} = v_k(\tau), k = 1, 2, 3\}$ из Ω_n , получаем счетное число одинаковых шестимерных линейных систем

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3}d|v_k(\tau)|^2 h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (59)$$

где $h_k = z_{m,k}$, $m \neq n$. Таким образом, вся счетная совокупность инвариантных множеств Ω_n , $n \geq 1$, устойчива или неустойчива одновременно и в случае устойчивости эти множества будем называть одномодовыми аттракторами.

Простейшими одномодовыми инвариантными множествами являются так называемые автомодельные циклы

$$\{z \in \mathbb{Z} : z_{m,k} = 0 \text{ при } m \neq n, z_{n,k} = v_k^0 \exp(i\omega_0 \tau), k = 1, 2, 3\}, \quad n \geq 1, \quad (60)$$

где

$$v_1^0 = -\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \quad v_2^0 = -\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \quad v_3^0 = \xi_0,$$

$$\xi_0 = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2} - c_0\xi_0^2.$$

Что же касается устойчивости этих циклов, то справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Автомодельные циклы (60) системы (54) экспоненциально орбитально устойчивы при условии $c_0 \in (c_-, c_+)$, где*

$$c_- = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{23} \approx -3,19455,$$

$$c_+ = 12\sqrt{3} + 5\sqrt{23} \approx 44,7638,$$
(61)

и неустойчивы в случае $c_0 \in \mathbb{R} \setminus [c_-, c_+]$.

Для доказательства заметим, что циклам (60) соответствует система (59) с постоянной матрицей, собственные значения которой всегда имеют отрицательные действительные части. Таким образом, проблема сводится к исследованию устойчивости автомодельного цикла

$$v_k = v_k^0 \exp(i\omega_0\tau), \quad k = 1, 2, 3, \tag{62}$$

вспомогательной системы (58). При анализе последней удобно перейти к полярным координатам $v_k = \xi_k \exp(i\varphi_k)$, $\xi_k > 0$, $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$, $k = 1, 2, 3$, поскольку от получающейся в итоге шестимерной системы для ξ_k, φ_k , $k = 1, 2, 3$, отщепляется пятимерная система для $\xi_j, j = 1, 2, 3$, $\psi_1 = \varphi_3 - \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, имеющая вид

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3 \sin \psi_1 - \xi_1^3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 \sin \psi_2 - \xi_2^3, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) - \xi_3^3,$$

$$\dot{\psi}_1 = c_0 (\xi_1^2 - \xi_3^2) + \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} \cos(\psi_1 + \psi_2), \tag{63}$$

$$\dot{\psi}_2 = c_0 (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \cos \psi_2 - \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1.$$

Остается добавить, что циклу (62) в системе (63) соответствует положение равновесия

$$O = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0) : \xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}, \quad \psi_1^0 = \psi_2^0 = \frac{2\pi}{3} \tag{64}$$

с требуемыми в теореме свойствами устойчивости.

Дальнейший анализ системы (54) проведем сначала для случая $c_0 \geq 0$. Из установленной выше теоремы следует, что при $0 \leq c_0 < c_+$ она имеет счетное число устойчивых автомодельных циклов (60), а при последующем увеличении параметра c_0 все эти циклы теряют устойчивость. На вопрос же о том, что происходит в ней при $c_0 > c_+$, позволяет

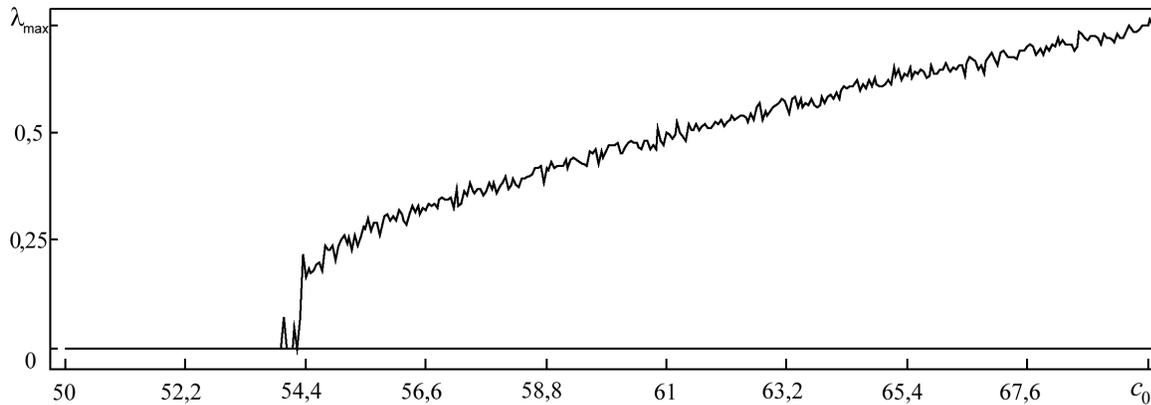


Рис. 1

ответить численное интегрирование вспомогательной системы (63). Было обнаружено, что при увеличении параметра c_0 в упомянутой системе наблюдаются следующие фазовые перестройки.

1. При $0 \leq c_0 < c_{0,1}^+$, где $c_{0,1}^+ = c_+$ (см. (61)), система (63) имеет единственное экспоненциально устойчивое состояние равновесия (64), которое при прохождении c_0 через критическое значение $c_{0,1}^+$ мягко теряет устойчивость с последующим рождением устойчивого предельного цикла C_0 .

2. При $c_{0,1}^+ < c_0 < c_{0,2}^+$, где $c_{0,2}^+ \approx 48, 57$, цикл C_0 является единственным аттрактором рассматриваемой системы.

3. При $c_0 = c_{0,2}^+$ происходит бифуркация удвоения периода: цикл C_0 становится неустойчивым и от него ответвляется устойчивый цикл C_1 условно двойного по отношению к C_0 периода. Этот цикл сохраняет устойчивость на интервале $c_{0,2}^+ < c < c_{0,4}^+$, где $c_{0,4}^+ \approx 54, 42$, а при прохождении c_0 через значение $c_{0,4}^+$ теряет ее жестко (т. е. не порождает других аттракторов при $c_0 > c_{0,4}^+$).

4. Первый хаотический аттрактор возникает нелокально при $c_0 = c_{0,3}^+$, где $c_{0,3}^+ \approx 54, 37$, и на интервале $c_{0,3}^+ < c_0 < c_{0,4}^+$ сосуществует с устойчивым циклом C_1 .

Приведенные факты иллюстрирует показанный на рис. 1 график старшего показателя Ляпунова $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(c_0)$ аттрактора системы (63), построенный на отрезке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом h , равным 0,05 (в случае $c_{0,3}^+ < c_0 < c_{0,4}^+$ этот показатель вычислялся, естественно, для хаотического аттрактора). Из рисунка видно, что показатель $\lambda_{\max}(c_0)$ с увеличением c_0 растет, хотя и немонотонно, и при всех $c_0 \geq 54, 7$ заведомо отделен от нуля (последний вывод сделан на основе контрольных расчетов, выполненных при

$$c_0 \in [54, 7; 55, 2], [54, 803; 54, 807], [54, 8037; 54, 8039], [54, 9; 55, 1]$$

с шагами h по c_0 , равными соответственно 0,0025; 0,0001; 0,00002 и 0,001).

Возвращаясь к исходной системе (54), заметим следующее. Любому аттрактору Ω_0 системы (63) соответствует аттрактор Ω системы (58) на единицу большей размерности, а значит, и счетное число одномерных инвариантных множеств (57) системы (54). Напомним, далее, что за устойчивость всей совокупности этих множеств отвечает одна и та

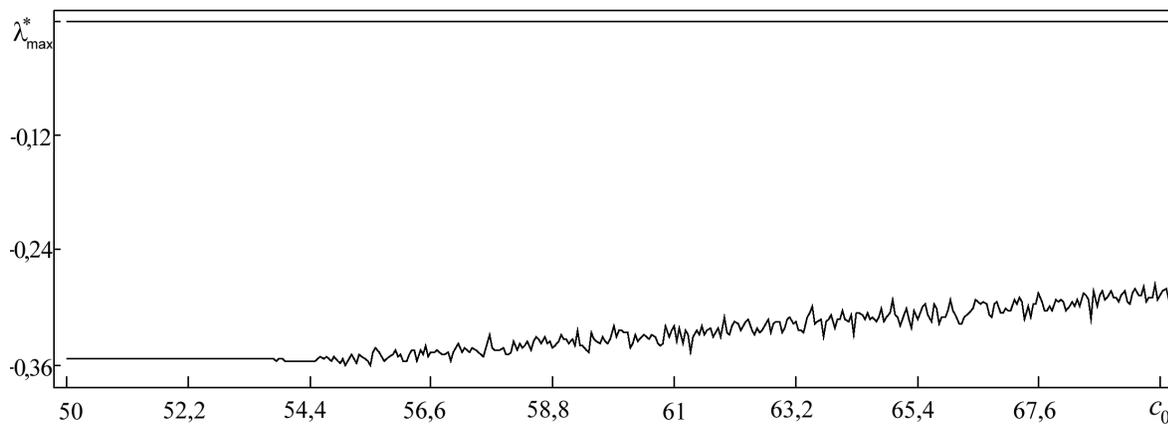


Рис. 2

же линейная система (см. (59))

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3} d\xi_k^2(\tau)h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (65)$$

где $h_0 = h_3$, а $(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_3(\tau))$ — произвольная траектория из Ω_0 .

Как показывает численный анализ, при всех рассмотренных выше значениях параметра c_0 старший показатель Ляпунова $\lambda_{\max}^*(c_0)$ системы (65) оказывается отрицательным (см. рис. 2, где построен его график на промежутке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом $h = 0,05$). Таким образом, по крайней мере при $54,7 \leq c_0 \leq 70$ исходная система (54) имеет счетное число одномодовых хаотических аттракторов (57), а значит, в ней реализуется требуемый феномен хаотической буферности.

Перейдем теперь к случаю $c_0 < 0$. Здесь у вспомогательной системы (63) удалось выявить следующие фазовые перестройки.

1. При $c_{0,1}^- < c_0 < 0$, где $c_{0,1}^- = c_-$ (см. (61)), как и в предыдущем случае, система (63) имеет единственное устойчивое состояние равновесия (64).

2. При $c_{0,2}^- < c_0 < c_{0,1}^-$, где $c_{0,2}^- \approx -9,84$, аттрактором системы (63) является устойчивый цикл, ответвившийся от состояния равновесия (64) при $c_0 = c_{0,1}^-$.

3. При $c_0 = c_{0,2}^-$ упомянутый выше цикл претерпевает первую бифуркацию удвоения, при $c_0 = c_{0,3}^- \approx -10,56$ — вторую и т. д. В результате при $c_0 \approx -10,95$ по фейгенбаумовскому сценарию возникает первый хаотический аттрактор.

4. При последующем уменьшении c_0 порядок и хаос многократно сменяют друг друга. В частности, здесь имеется так называемая зона „дышащего” хаоса $-52,48 \leq c_0 \leq -11$, в которой существует достаточно большое (возможно, счетное) число „окон” периодичности, т. е. промежутков, в которых хаос сменяется устойчивым циклом. Стабильный же хаос, когда старший показатель Ляпунова положителен и отделен от нуля, наступает при всех $c_0 \leq -52,6$.

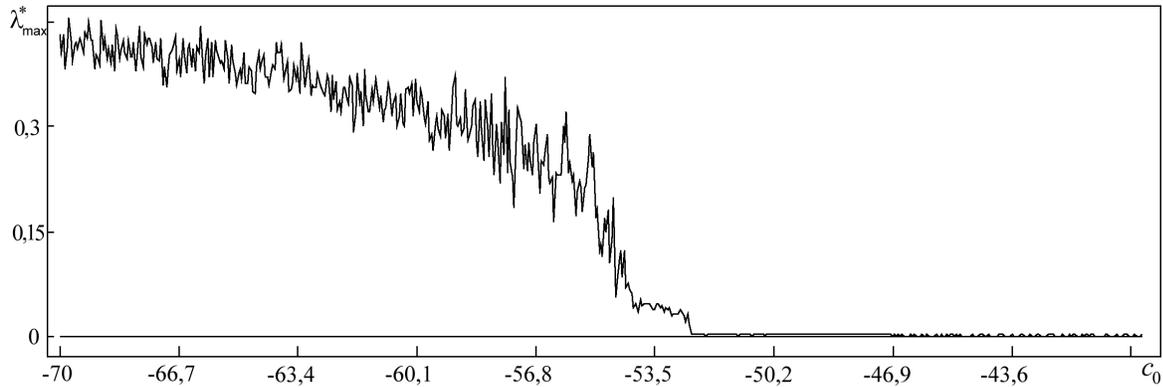


Рис. 3

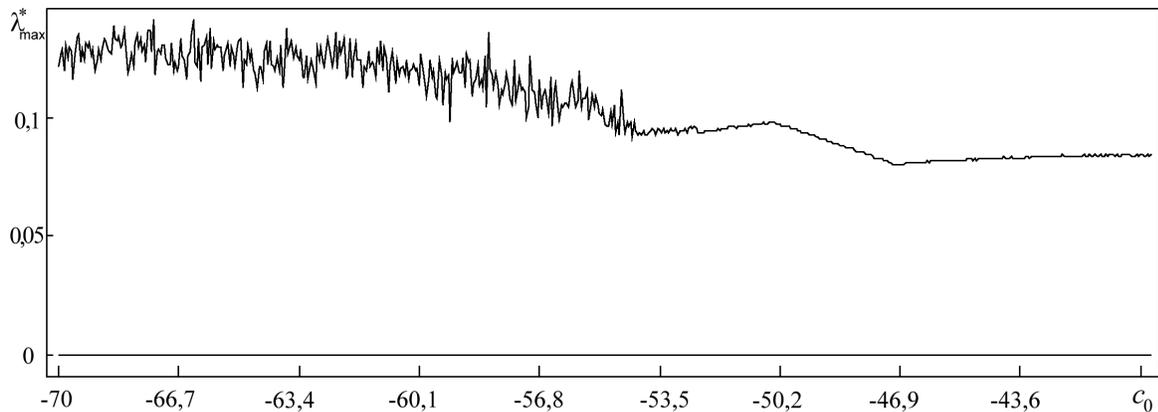


Рис. 4

Наглядное представление о перечисленных выше особенностях динамики дают графики старшего показателя Ляпунова $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(c_0)$ аттрактора системы (63) и старшего показателя Ляпунова $\lambda_{\max}^* = \lambda_{\max}^*(c_0)$ системы (65), приведенные на рис. 3 и 4 соответственно (построение данных графиков проводилось на отрезке $-70 \leq c_0 \leq -40$ по точкам с шагом 0,05). Как видно из этих рисунков, при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра c_0 одномерные хаотические инвариантные множества (57) у системы (54) хотя и существуют, но неустойчивы.

5. Существование бесконечномерного хаотического аттрактора. Подытожим полученные в предыдущем пункте результаты. Нетрудно видеть, что при достаточно большом $R > 0$ выполняется неравенство $\dot{V}(z)|_{\|z\|=R} < 0$, где $V(z) = \|z\|^2$, $\|\cdot\|$ — норма (56), $\dot{V}(z)$ — производная в силу системы (54). Это означает, что рассматриваемая система является диссипативной и, следовательно, мы можем определить для нее максимальный аттрактор A_{\max} по формуле

$$A_{\max} = \bigcap_{t>0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{Z} : \|z\| < R\}, \quad (66)$$

где φ^t — фазовый поток, порожденный системой (54) в пространстве \mathbb{Z} . Отметим, что множество (66) заведомо некомпактно, поскольку содержит счетное число инвариантных одномерных подмножеств (57). Напомним, далее, что при достаточно больших c_0 все эти подмножества в свою очередь оказываются аттракторами, причем хаотическими, т. е. наблюдается феномен хаотической буферности.

Для того чтобы выяснить структуру множества (66) в случае отрицательных и достаточно больших по модулю значениях c_0 , рассмотрим конечномерные системы

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - (1 + ic_0) \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |z_{m,k}|^2 \right] z_{n,k},$$

$$1 \leq n \leq N, \quad k = 1, 2, 3, \tag{67}$$

получающиеся из (54) при $z_{m,k} = 0, m \geq N + 1$. Численный анализ, выполненный при $c_0 = -93$, показывает, что системы (67) имеют хаотические аттракторы Σ_N , размерности Ляпунова \mathcal{L}_N которых с ростом N увеличиваются примерно по линейному закону:

$$\mathcal{L}_2 \approx 10, 98, \quad \mathcal{L}_3 \approx 16, 2, \quad \mathcal{L}_4 \approx 21, 37, \quad \mathcal{L}_5 \approx 26, 197,$$

$$\mathcal{L}_6 \approx 30, 58, \quad \mathcal{L}_7 \approx 34, 116, \quad \mathcal{L}_8 \approx 37, 63,$$

$$\mathcal{L}_9 \approx 41, 257, \quad \mathcal{L}_{10} \approx 44, 46, \quad \mathcal{L}_{11} \approx 48, 179, \quad \mathcal{L}_{12} \approx 51, 333$$

и т. д. Далее, для количества l_N положительных характеристических показателей аттрактора Σ_N , начиная с номера $N = 5$, справедливо равенство $l_N = N + 2$, а сумма S_N^+ упомянутых показателей при $N \rightarrow \infty$ имеет предел $S^+ \approx 1, 6$. Для сравнения заметим, что сумма S_N^- всех отрицательных показателей аттрактора Σ_N по модулю неограниченно увеличивается, причем $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^-/N = S^-$, где $S^- \approx -0, 6$. Кроме того, в исходной системе (54) аттракторам Σ_N соответствуют неустойчивые конечномерные инвариантные множества A_N , для которых $z_{m,k} = 0, m \geq N + 1$ (точнее говоря, каждое A_N неустойчиво уже в рамках системы (67) с номером $N + 1$).

Перечисленные факты свидетельствуют в пользу гипотезы о том, что аттрактор (66) при $c_0 = -93$ является хаотическим и бесконечномерным. Действительно, его старший показатель Ляпунова $\lambda_{\max} = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \lambda_{N,\max}$, где $\lambda_{N,\max}$ — старшие показатели инвариантных множеств A_N , положителен и равен примерно 0, 68 (значения $\lambda_{N,\max}$ практически совпадают, начиная с номера $N = 3$). Что же касается всех положительных показателей Ляпунова аттрактора A_{\max} , то их количество счетно, а сумма конечна и равна введенной выше величине S^+ .

Для пояснения свойства бесконечномерности заметим, что справедливо очевидное включение $\bigcup_{N \geq 2} A_N \subset A_{\max}$. Отсюда, в свою очередь, следует, что A_{\max} не может содержать конечномерных подмножеств, также являющихся аттракторами.

6. Заключение. Остановимся еще раз на общей идее конструирования цепочек осцилляторов с хаотической буферностью. Предположим, что в качестве парциальной сис-

темы выбрано некоторое эволюционное уравнение

$$\dot{v} = f(v, \lambda) \quad (68)$$

в вещественном банаховом пространстве V , правая часть которого зависит от вспомогательного параметра λ произвольной природы, принимающего значения в множестве Σ . Предположим, далее, что в уравнении (68) реализуется феномен буферности: сосуществуют различные устойчивые циклы

$$\begin{aligned} v &= v_{(m)}(\tau), & \tau &= \omega_{(m)}t, & \omega_{(m)} &> 0, \\ v_{(m)}(\tau + 2\pi) &\equiv v_{(m)}(\tau), & m &= 1, \dots, m_0, \end{aligned} \quad (69)$$

количество $m_0 = m_0(\lambda)$ которых может быть сделано сколь угодно большим за счет подходящего выбора $\lambda \in \Sigma$. И наконец, рассмотрим, к примеру, цепочку диффузионно связанных осцилляторов (68), т. е. систему вида

$$\dot{v}_j = f(v_j, \lambda) + \mu A(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (70)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $v_0 = v_1$, $v_{N+1} = v_N$, $A : V \rightarrow V$ — ограниченный линейный оператор.

При $\mu = 0$ система (70) имеет, очевидно, устойчивые N -мерные инвариантные торы

$$v_j = v_{(m)}(\tau_j), \quad \dot{\tau}_j = \omega_{(m)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

составленные из одинаковых циклов (69). В случае малых $\mu > 0$ эти торы, естественно, сохраняются, а так как они близки к резонансным, то движения на них описываются некоторыми системами для разностей фаз $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$, подобными системе (23). Как показано выше на конкретных примерах, все эти системы могут одновременно иметь хаотические аттракторы и, более того, количество $m_0 = m_0(\lambda)$ самих инвариантных резонансных торов (носителей хаоса) за счет выбора $\lambda \in \Sigma$ может быть сделано сколь угодно большим или даже счетным. А это как раз и означает, что в системе (70) возможна хаотическая буферность.

Ситуация в случае цепочек осцилляторов (7) и (24) может показаться излишне идеализированной, поскольку соответствующие им парциальные системы имеют счетное число устойчивых циклов. Однако данное свойство не является необходимым для реализации феномена хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве парциальной системы возьмем простейшее нелинейное телеграфное уравнение с граничными условиями Неймана, т. е. краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - \varepsilon u_t + u - a^2 u_{xx} + u^2 u_t - bu^3 &= 0, \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (71)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$; $a, b = \text{const} > 0$.

Из содержащихся в [7] результатов вытекает существование для каждого натурального m_0 такого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача

(71) имеет экспоненциально орбитально устойчивые (в метрике фазового пространства $(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi) \times W_2^1(0, \pi)$) циклы

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_m(\tau, x, \varepsilon), \tag{72}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_m(1 + \varepsilon \delta_m(\varepsilon)), \quad m = 1, 2, \dots, m_0.$$

Здесь $\omega_m = \sqrt{1 + a^2 m^2}$, а достаточно гладкие по своим переменным функции $\delta_m(\varepsilon)$, $u_m(\tau, x, \varepsilon)$, $u_m(\tau + 2\pi, x, \varepsilon) \equiv u_m(\tau, x, \varepsilon)$ удовлетворяют равенствам

$$u_m(\tau, x, 0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \tau \cos mx,$$

$$\delta_m(0) = -\frac{3b}{2\omega_m}.$$

Таким образом, в краевой задаче (71) наблюдается явление буферности, но количество сосуществующих устойчивых циклов (72) здесь заведомо конечно (как следует из [7], оно имеет порядок ε^{-1} при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Рассмотрим, далее, цепочку связанных осцилляторов (71), т. е. систему вида

$$L(u_j) = \varepsilon \mu (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \tag{73}$$

$$\left. \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|_{x=0, x=\pi} = 0,$$

где $j = 1, \dots, N$, через $L(u)$ обозначена левая часть уравнения из (71), $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$, а $\mu > 0$ — вспомогательный малый параметр. Используя развитую выше технику, можно показать, что устойчивые циклы (72) с одинаковыми номерами m , существующие при $\mu = 0$ в соответствующих парциальных системах, при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы, а поведение решений на этих торах в первом приближении описывается системами

$$\dot{\alpha}_j = -c_m(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N - 1, \tag{74}$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $c_m = 3b/(2\omega_m)$.

Заметим, что поскольку нас интересует феномен хаотической буферности, то номер m в (74), в принципе, должен принимать любые сколь угодно большие значения. Поэтому рассмотрим сразу предельный случай $m = \infty$, в котором получается система

$$\dot{\alpha}_j = \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N - 1. \tag{75}$$

Данная система консервативна, так как не меняется при заменах $t \rightarrow -t$, $\alpha_j \rightarrow -\alpha_j$, и, что самое главное, при каждом $N \geq 5$ имеет хаотические движения. Например, при

$N = 5$ посредством численного анализа в ней удалось обнаружить хаотические режимы с показателями Ляпунова $\lambda_0, 0, 0, -\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$ в зависимости от выбора начальных условий может принимать различные значения: 0, 135; 0, 16; 0, 176; 0, 252; 0, 258; 0, 272 и т. д.

При переходе от системы (75) к исходной системе (74) некоторые из упомянутых выше хаотических движений „выживают”. В частности, система (74) при $N = 5$ имеет хаотические аттракторы при любом $c_m \leq 0,02$. Это, в свою очередь, означает, что в цепочке осцилляторов (73) наблюдается феномен хаотической буферности.

1. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Старобинец И. М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. — 1984. — **39**, № 12. — С. 561–564.
2. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
3. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987. — С. 7–44.
4. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
5. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Двухчастотные автоволновые процессы в комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау // Теор. и мат. физика. — 2003. — **143**, № 3. — С. 353–373.
6. Глызин С. Д. Численное обоснование гипотезы Ландау–Колесова о природе турбулентности // Мат. модели в биологии и медицине. — 1989. — Вып. 3. — С. 31–36.
7. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. — М.: Наука, 1998. — 191 с.
8. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. — М.: Физматлит, 2004. — 408 с.
9. Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 432 с.
10. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

Получено 13.09.2006