УДК 519.8

Ф.А. ШАРИФОВ

СОВЕРШЕННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ И РАСШИРЕННЫЙ ПОЛИМАТРОИД[1]

Ключевые слова: *совершенное паросочетание, двудольный граф, расширенный полиматроид.*

ВВЕДЕНИЕ

Подмножество множества ребер графа называется паросочетанием, если в этом подмножестве произвольная пара ребер не имеет общих вершин. Паросочетание с максимальным числом ребер называется наибольшим. Считают, что паросочетание покрывает данную вершину, если эта вершина инцидентна некоторому его ребру. Если паросочетание покрывает все вершины графа, то оно называется совершенным паросочетанием. Задача нахождения совершенного и максимального паросочетания часто возникает при определении верхней оценки для оптимального значения задачи синтеза сети при условии, что после удаления произвольного ребра из сети в полученном подграфе должен существовать хотя бы один путь, соединяющий произвольную пару терминальных узлов. Предложен ряд эффективных алгоритмов для нахождения максимального паросочетания в двудольном графе $G=(U,V,E)$. Наилучшим по временной сложности является алгоритм с трудоемкостью $O(n^{1.5}\sqrt{m/\log n})$ в [1, 2], где $|E|=m$ и $|U|=|V|=n$.

В работе [3] предложен метод сигнатуры (the signature method) для решения задачи назначения. С его помощью находится решение двойственной задачи к задаче назначения. При этом, если множество ребер, относительно которых выполняются условия дополняющей нежесткости, образуют остовное дерево T полного двудольного графа, а степени вершин этого дерева — произвольный вектор (с n компонентами) вида (2,2,...,1,2,...,2), то данный метод завершает работу и таким образом находятся решения двойственной и прямой задачи. В работе [3] подобные векторы названы сигнатурой дерева T. Показано, что любое остовное дерево с такой сигнатурой содержит совершенное паросочетание. Обычно в процессе решения задачи назначения множество ребер, относительно которых выполняются условия дополняющей нежесткости, образуют некоторый остовный подграф G полного двудольного графа, и часто либо этот подграф не содержит дерева T с указанной сигнатурой, либо он является остовным деревом полного двудольного графа. Несмотря на то что сигнатура дерева (вектор с компонентами—степенями вершин) отличается от вектора (2,2,...,1,2,...,2), оно содержит совершенное паросочетание, т.е. допустимое решение задачи назначения.

Пусть G — некоторый граф, d_{u_i}, d_{v_i} — степени вершин u_i, v_i в G и $b_{u_i}=d_{u_i}-1$, $b_{v_i}=d_{v_i}-1$ для всех $u_i\in U$, $v_i\in V$. Покажем, что граф G содержит совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда вектор $\sigma=(-b_{u_1},\ldots,-b_{u_n},b_{v_1},\ldots,b_{v_n})$ является базой расширенного полиматроида (определение см. ниже). Исходя из этого σ называется сигнатурой графа G. В [4] предложен алгоритм трудоемкостью $O(mn)$ для решения задачи нахождения минимального разреза в сети, к которой сводится задача принадлежности заданного

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS, грант 06–1000017–8909.

© Ф.А. Шарифов, 2008

вектора к расширенному полиматроиду. Учитывая, что G — двудольный граф, покажем, что задача принадлежности сигнатуры σ к расширенному полиматроиду эквивалентна специальной транспортной задаче на графе G.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Для удобства множество вершин заданного двудольного графа $G=(U,V,E)$ обозначим как UV, т.е. $UV = U \cup V$. Для $S \subseteq UV$ обозначим $\chi(S)$ и $\delta(S)$ множества, которые содержат ребра с двумя конечными вершинами в S и одной конечной вершиной в S соответственно. Множество ребер $\delta(S)$ называется разрезом в графе G для $\varnothing \neq S \subset UV$. Из определения множеств $\chi(S)$ и $\delta(S)$ следует, что $\chi(S) \cup \delta(S)$ — множество ребер хотя бы с одной конечной вершиной в S. Для $S=\varnothing$ предполагаем, что $\chi(S)=\varnothing$ и $\delta(S)=\varnothing$.

Будем говорить, что подграф F определяется множеством вершин S, если S — множество вершин подграфа F и все ребра с конечными вершинами из S являются его ребрами. Подграф F с множеством ребер $\delta(w)$ ($\delta(\{w\})$) называется звездой. Положим $\mu(S)=\chi(S)\cup\delta(S)$ и определим функции $f(S)=|\chi(S)|$ и $f^*(S)=|\mu(S)|$ для всех $S \subseteq UV$.

Функция φ, определенная на подмножествах множества UV, называется супермодулярной (субмодулярной), если для всех $A, B \subseteq UV$ выполняются неравенства

$$\varphi(A)+\varphi(B) \leq (\geq) \varphi(A \cup B)+\varphi(A \cap B).$$

Функция φ — монотонная, если $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ для $A \subseteq B \subseteq UV$. Степени вершин $w \in UV$ обозначим d_w. Для конечного множества T и вектора y ($y \in R^T$), компоненты которого индексированы элементами T, вместо $\sum (y_v,\, v \in S)$ будем писать $y(S)$, где $S \subseteq T$. Следующие утверждения легко доказываются:

1) функция $f(S)$ супермодулярная;
2) функции $f^*(S)$ и $f^*(S)-f(S)$ субмодулярные;
3) $f^*(S)-f(S)=|\delta(S)|$;
4) $f^*(S)-f(S)\geq 0$ для всех $S \subseteq UV$;
5) $f^*(S)-f(S)=f^*(\bar{S})-f(\bar{S})$ для всех $S \subseteq UV$ и $\bar{S}=UV \setminus S$;
6) $f^*(UV)-f(UV)=f^*(\varnothing)-f(\varnothing)=0$;
7) $f^*(S)$ и $f(S)$ — монотонные функции;
8) $f^*(S)-f(S)$ — немонотонная функция;
9) $f^*(S)+f(S)=d(S)$ для всех $S \subseteq UV$.

Будем предполагать, что первые n компонент каждого вектора $y \in R^{UV}$ индексированы элементами множества U, а остальные n компонент — элементами множества V. Многогранник

$$P(\varphi)=\{x \in R^{UV};\ x(S) \leq \varphi(S),\, S \subseteq UV\},$$

определенный монотонной и неотрицательной субмодулярной функцией φ, называется полиматроидом. Если φ — неотрицательная субмодулярная функция, многогранник $P(\varphi)$ называется расширенным полиматроидом [5]. Поэтому $P(f^*-f)$ является расширенным полиматроидом.

Не нарушая общности, можно предположить, что $|U|=|V|$ для произвольного двудольного графа $G=(U,V,E)$. Действительно, допустим, что $|U_0|<|V|$ для графа $G_0=(U_0, V, E_0)$. В этом случае, добавив $|V|-|U_0|$ новых вершин и ребра, соединяющие каждую новую вершину с каждой вершиной из V, получим двудольный граф $G=(U, V, E)$ с $|U|=|V|$ и $U_0 \subset U$. Допустим, что M — максимальное паросочетание в G и M_0 — частичное паросочетание паросочетания M такое, что M_0 содержит только ребра, покрывающие новые вершины.

Утверждение 1. Если M — максимальное паросочетание в графе G, то паросочетание $M \setminus M_0$ — максимальное паросочетание в G_0.

Доказательство. Если M — совершенное паросочетание в G, то доказательство утверждения тривиально. Пусть W_0 — максимальное паросочетание в G_0 и допустим, что $|W_0|>|M \setminus M_0|$. В графе G выделим ребра, соответствующие ребрам W_0. Так как каждая новая вершина соединена с каждой вершиной $v \in V$, к паросочетанию W_0 можно добавить ребра такие, что они образуют паросочетание W_n, которое покрывает все новые вершины. Ясно, что W_n и W_0 не имеют общих вершин. Поэтому $W_n \cup W_0 = W$ — максимальное паросочетание в G. Тогда из $|W_0|>|M \setminus M_0|$ следует, что $|W|>|M|$. Это противоречит тому, что M — максимальное паросочетание в G.

ПАРОСОЧЕТАНИЕ И РАСШИРЕННЫЙ ПОЛИМАТРОИД

Покажем, что в двудольном графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда вектор σ является базой расширенного полиматроида $P(f^*-f)$. Напомним, что вектор $x \in R^{UV}$ является базой $P(f^*-f)$, если $x(UV)=f^*(UV)-f(UV)=0$ и $x(S) \le f^*(S)-f(S)$ для всех $S \subseteq UV$. База $P(f^*-f)$ определяется с помощью гриди-алгоритма следующим образом [5].

Пусть $UV_0=\{w_1, \dots, w_{2n}\}$ — некоторое линейное упорядочение вершин из UV; $L_0=\varnothing$; $L_i=\{w_1, \dots, w_i\}$ для всех $i=1, \dots, 2n$.

Для всех $i=1, \dots, 2n$ положим

$$x_{w_i^0}=f^*(L_i)-f(L_i)-f^*(L_{i-1})+f(L_{i-1}). \tag{1}$$

В [5] доказывается, что вектор x^0 является базой расширенного полиматроида $P(f^*-f)$. Из определения базы x^0 ясно, что различным линейным упорядочениям вершин из UV соответствуют различные базы $P(f^*-f)$, иными словами, векторы, соответствующие различным линейным упорядочениям вершин, являются крайними точками многогранника $P(f^*-f)$. Вектор x^0 назовем базой $P(f^*-f)$ относительно линейного упорядочения UV_0.

В дальнейшем будем предполагать, что G — связный граф. Это предположение естественно, так как в противном случае можем рассмотреть каждую компоненту связности графа G как отдельный граф.

Пусть $UV_1=\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ — линейное упорядочение вершин графа G такое, что $u_i \in U$ и $v_i \in V$ для всех $i=1, \dots, n$. По формуле (1) вектор $x^d=(d_{u_1}, \dots, d_{u_n}, -d_{v_1}, \dots, -d_{v_n})$ является базой расширенного полиматроида $P(f^*-f)$ относительно линейного упорядочения UV_1. Учитывая симметричность двудольного графа, получаем, что вектор $-x^d$ также является базой $P(f^*-f)$ относительно линейного упорядочения $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$.

Для каждого $A \subseteq U$ множество вершин из $v \in V$, смежных с вершинами A, обозначим N_A. По теореме Кенига–Холла, которая является частным случаем теоремы Татта о совершенных паросочетаниях [5], в графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|A| \le |N_A|$ для всех $A \subseteq U$. Так как G — связный двудольный граф, имеем $d_w \ge 1$ для всех $w \in UV$. Поэтому $b_w = d_w - 1$ — целое число для всех $w \in UV$. Пусть вектор $b = (b_{u_1}, \dots, b_{u_n}, b_{v_1}, \dots, b_{v_n})$. Тогда сигнатура графа G — вектор $\sigma = (-b_{u_1}, \dots, -b_{u_n}, b_{v_1}, \dots, b_{v_n})$, где $u_i \in U$ и $v_i \in V$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1. В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда сигнатура σ графа G является базой расширенного полиматроида $P(f^* - f)$.

Доказательство. Поскольку по определению сигнатуры и утверждению 6 $\sigma(UV) = 0 = f^*(UV) - f(UV)$, для доказательства теоремы достаточно показать, что если в графе G существует совершенное паросочетание, то $\sigma \in P(f^* - f)$, и наоборот. Сначала покажем, что если $\sigma \in P(f^* - f)$, то в графе G существует совершенное паросочетание.

Для произвольного $A \subseteq U$ из определения сигнатуры σ следует

$$|N_A| - |A| = d(N_A) - d(A) - (b(N_A) - b(A)) = d(N_A) - d(A) - \sigma(A \cup N_A),$$

а также по определению функций f^* и f имеем

$$d(N_A) - d(A) = f^*(A \cup N_A) - f(A \cup N_A).$$

Поэтому

$$|N_A| - |A| = d(N_A) - d(A) - (b(N_A) - b(A)) =$$
$$= f^*(A \cup N_A) - f(A \cup N_A) - \sigma(A \cup N_A).$$

Поскольку $\sigma \in P(f^* - f)$, то $f^*(A \cup N_A) - f(A \cup N_A) - \sigma(A \cup N_A) \ge 0$. Другими словами, $|N_A| \ge |A|$ для произвольного $A \subseteq U$. Поэтому в графе G существует совершенное паросочетание.

Докажем обратное утверждение теоремы: если в графе G существует совершенное паросочетание, то $\sigma \in P(f^* - f)$. Пусть M — совершенное паросочетание в графе G. Рассмотрим двудольный граф $G_1 = (U, V, E \setminus M)$, т.е. граф G_1 получается после удаления ребер совершенного паросочетания M из графа G. Определим субмодулярную и супермодулярную функции $f_1^*(A)$ и $f_1(A)$ относительно графа G_1 аналогично определению функций $f^*(A)$ и $f(A)$ для G. Ясно, что $f_1^*(A) - f_1(A) \le f^*(A) - f(A)$ для произвольного $A \subseteq UV$ и, кроме того, степени вершин w равны b_w в графе G_1. Следовательно, вектор $(-b_{u_1}, \dots, -b_{u_n}, b_{v_1}, \dots, b_{v_n})$ является базой расширенного полиматроида $P(f_1^* - f_1)$ относительно линейного упорядочения $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$. Таким образом, $\sigma(A) \le f_1^*(A) - f_1(A) \le f^*(A) - f(A)$ для произвольного $A \subseteq UV$, что завершает доказательство теоремы.

Из теоремы получаем следующий результат.

Следствие 1. Если σ является базой расширенного полиматроида $P(f^* - f)$, то вектор $-\sigma$ также база $P(f^* - f)$.

Согласно теореме 1 задача принадлежности вектора σ расширенному полиматроиду $P(f^* - f)$ сводится к следующей задаче:

$$\min\{f^*(A) - f(A) - \sigma(A),\ A \subseteq UV\}.$$

В работе [4] показано, что последная задача эквивалентна нахождению минимального разреза графа G и для ее решения предложен алгоритм трудоемкостью $O(mn)$. В этом алгоритме также используются базы расширенного полиматроида $P(f^* - f)$.

Для произвольного $A \subseteq UV$ по утверждению 9 имеем

$$f^*(A) - f(A) - \sigma(A) = 2f^*(A) - [d(A) + \sigma(A)].$$

По утверждению 7) $f^*(A)$ — полиматроидная функция и $d_v + \sigma_v \geq 0$ для всех $v \in UV$. Тогда имеем [5]

$$\min\{2f^*(A) - [d(A) + \sigma(A)],\, A \subseteq UV\} =$$

$$= \max\{z(UV);\, z(A) \leq 2f^*(A),\, A \subseteq UV,\; 0 \leq z \leq d + \sigma\}.$$

Путем замены переменных $y = z - d$ в правой стороне этого неравенства, а также с учетом $f^*(A) = d(A) - f(A)$ получаем

$$\min\{f^*(A) - f(A) - \sigma(A),\, A \subseteq UV\} =$$

$$= \max\{y(UV);\;\; y \in P(f^* - f),\; -d \leq y \leq \sigma\}. \tag{2}$$

В формуле (2) ограничения $-d_u \leq y_u \leq b_u$ можно заменить на $0 \leq y_u \leq b_u$ для всех $u \in U$, в смысле, что после такой замены оптимальное решение задачи не изменится. Переменные y_u представимы в виде

$$y_u = \sum_{(u,v)\in\delta(u)} z_{uv} \quad \text{для всех} \quad u \in U,$$

$$y_v = -\sum_{(u,v)\in\delta(v)} z_{uv} \quad \text{для всех} \quad v \in V,$$

где переменные z_{uv} должны удовлетворять ограничениям $0 \leq z_{uv} \leq 1$. Тогда ограничения

$$0 \leq y_u \leq b_u, \quad u \in U, \quad -d_v \leq y_v \leq -b_v, \quad v \in V,$$

преобразуются к следующему виду:

$$z(\delta(u)) \leq b_u, \quad u \in U, \quad z(\delta(v)) \geq b_v, \quad v \in V.$$

Согласно следствию 1 и с учетом симметричности двудольного графа G, задача (2) может быть записана относительно вектора $-\sigma$. Тогда получим подобную (2) задачу с ограничениями $-d_u \leq y_u \leq -b_u$ и $0 \leq y_v \leq b_v$. Аналогично указанному выше способу ограничения полученной задачи могут преобразовываться к следующему виду:

$$z(\delta(u)) \geq b_u, \quad u \in U, \quad z(\delta(v)) \leq b_v, \quad v \in V.$$

Полученные системы неравенств для вектора переменных z эквивалентны ограничениям транспортного типа:

$$z(\delta(w)) = b_w, \quad w \in UV, \tag{3}$$

$$0 \leq z_e \leq 1, \quad e \in E. \tag{4}$$

Покажем, что если переменные $z=\{z_{ij};\ i\in U,\ j\in V\}$ удовлетворяют ограничениям (3), (4), то векторы σ и $-\sigma$ являются базами расширенного полиматроида $P(f^*-f)$.

Так как $b(U)=b(V)$, существование допустимого решения систем (3), (4) связано только со структурой двудольного графа G. При этом ясно, что если $b_w=0$ для некоторого $w\in UV$, то $z_e=0$, где $\{e\}=\delta(w)$.

Теорема 2. Вектор σ ($-\sigma$) является базой расширенного полиматроида $P(f^*-f)$ тогда и только тогда, когда ограничения (3), (4) имеют решение на графе G.

Доказательство. Допустим, что ограничения (3), (4) имеют решение на графе G. Поскольку b_w — целое число для всех $w\in UV$, из теории линейного программирования следует, что ограничения (3), (4) имеют целочисленное (0 или 1) базисное решение $z=\{z_e;\, e\in E\}$. Рассмотрим подграф с множеством ребер $E_1=\{e;\, e\in E,\ z_e=1\}$. Так как $b_w=d_w-1$, степени произвольных вершин $w\in UV$ полученного подграфа равны единице. Следовательно, он является совершенным паросочетанием и по теореме 1 $\sigma\in P(f^*-f)$.

Обратно, пусть $\sigma\in P(f^*-f)$. Тогда согласно теореме 1 в графе G существует совершенное паросочетание M такое, что после удаления ребер этого паросочетания из графа G в полученном подграфе степени всех вершин $w\in UV$ равны b_w. Это означает, что если положить $z_e=1$ для всех ребер $e\in E\setminus M$ и $z_e=0$ для всех $e\in M$, то вектор $z=\{z_e;\, e\in E\}$ удовлетворяет ограничениям (3), (4).

По теореме 2 задача принадлежности вектора σ к $P(f^*-f)$ сводится к нахождению допустимого решения ограничений (3), (4) на графе G и является частным случаем следующей задачи на графе G:

$$\max \sum_{e\in E} z_e, \tag{5}$$

$$z(\delta(w))\le b_w,\quad w\in UV, \tag{6}$$

$$0\le z_e\le 1,\quad e\in E. \tag{7}$$

Отметим, что из теории линейного программирования ясно, что если существует хотя бы одно допустимое решение задачи (5)–(7), то она имеет и базисное допустимое решение, т.е. $z_e=0\neq 1$. Поэтому в ограничениях задачи условие $z_e=0\neq 1$ заменено условиями $0\le z_e\le 1$ для $e\in E$.

Лемма 1. Пусть $z=\{z_e;\, e\in E\}$ — оптимальное решение задачи (5)–(7) и $\overline{G}$ — подграф, полученный удалением из графа G всех ребер e, для которых $z_e=1$. Тогда подграф $\overline{G}$ содержит паросочетание и подграфы типа звезды.

Доказательство. Так как z — оптимальное решение задачи (5)–(7), в G не существует ребра (u, v) такого, что $z(\delta(u))<b_u$, $z(\delta(v))<b_v$, и $z_{uv}=0$. Тогда если $z(\delta(u))<b_u$ и $z(\delta(v))<b_v$, либо ребро (u, v) не содержится в G, либо оно в G существует и $z_{uv}=1$. Поэтому в $\overline{G}$ не существует произвольного ребра (u, v) такого, что $z(\delta(u))<b_u$, $z(\delta(v))<b_v$. Пусть (s, r) — ребра графа $\overline{G}$. Если $z(\delta(s))=b_s$, то либо $z(\delta(r))=b_r$ (в этом случае (s, r) — ребро паросочетания $\overline{M}$ в графе $\overline{G}$), либо $z(\delta(r))<b_r$ (в этом случае (s, r) — ребро некоторой звезды в $\overline{G}$).

Из леммы следует, что задача нахождения максимального паросочетания в графе G сводится к такой же задаче в $\overline{G}$. С учетом того, что граф $\overline{G}$ содержит паросочетание и подграфы типа звезды, максимальное паросочетание в $\overline{G}$ может определяться за время $O(n)$. Поэтому временная сложность решения задачи нахождения максимального паросочетания в графе G в основном определяется трудоемкостью алгоритма решения задачи (5)–(7).

В заключение отметим, что теорема 2 может быть обобщена на случай существования в графе G непересекающихся по ребрам k совершенных паросочетаний для всех $1 \leq k \leq d_r$, где $d_r = \min\{d_w, w \in UV\}$. Рассмотрим ограничения (3), (4) на графе G при $b_w = b_w^k$, где $b_w^k = d_w - k$ для всех $1 \leq k \leq d_r$ и $w \in UV$. С помощью индукции по k аналогично доказательству теоремы 2 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. В графе G существуют k $(1 \leq k \leq d_r)$ непересекающихся по ребрам совершенных паросочетаний тогда и только тогда, когда существует решение системы ограничений (3), (4) на графе G при $b_w = b_w^k$.

Известно, что при $b_w^k = d_w - k$ для произвольного $1 \leq k \leq d_r$ система ограничений (3), (4) имеет на графе G решение тогда и только тогда, когда $b_k(A) \leq b_k(N_A)$ для всех $A \subseteq U$. Из данной теоремы следует, что в графе G существует k непересекающихся по ребрам совершенных паросочетаний тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется для произвольного $A \subseteq U$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alt H., Blum N., Mehlhorn K., Paul M. Computing maximum cardinality matching in time $O(n^{1.5}\sqrt{m / \log|V|})$ // Inform. Processing Letters. — 1991. — **37**. — P. 237–240.

2. Burkard R.E. Selected topics on assignment problems // Discrete Appl. Math. — 2002. — **123.** — P. 257–302.

3. Balinski M.L. Signature methods for the assignment problem // Oper. Res. — 1985. — **33**. — P. 527–536.

4. Шарифов Ф.А. Нахождение минимального разреза с использованием базы расширенного полиматроида // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 6. — С. 138–152.

5. Grotschel M., Lovasz L., Schrijver A. Geometric algorithms and combinatorial optimization. — Berlin: Springer, 1988. — 345 p.

Поступила 18.01.2007