УДК 519.217; 519.718

Е.Ф. ЦАРЬКОВ, В.К. ЯСИНСКИЙ, И.В. МАЛЫК

УСТОЙЧИВОСТЬ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ С МАРКОВСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ В СХЕМЕ УСРЕДНЕНИЙ. 2. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ И АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УСРЕДНЕННОМУ УРАВНЕНИЮ

Ключевые слова: *стохастическая динамическая система, импульсная система, слабая асимптотическая устойчивость, инфинитезимальный оператор, производящий оператор.*

ВВЕДЕНИЕ

Во многих публикациях предметом исследования были импульсные воздействия в детерминированные моменты времени [9–11, 13, 15–19]. Однако в реальных системах моменты времени отказов являются случайными [15–24]. Так, в системах автоматического управления [16–18] моменты времени отказов являются случайными величинами, причем при отказе приборов фазовая координата управляющего сигнала может иметь скачок [4, 10, 13, 19–24]. Поэтому в некоторых моделях правильно предположить, что моменты времени скачков определяются некоторым вспомогательным марковским процессом $y(t)$, заданным на фазовом пространстве Y [19]. Рассмотрим детальное описание подобной модели.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что однородный марковский процесс $y(t)$ имеет кусочно-постоянные реализации и интервалы между моментами переключения $\{\tau_j \equiv \tau_j(\omega),\ j \in \mathbb{N}\}$ этого процесса имеют условное экспоненциальное распределение

$$P\{\omega : \tau_j - \tau_{j-1} > t \,/\, y(\tau_{j-1}) = y\} = e^{-a(y)t}$$

$\forall j \in \mathbb{N}$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{R}_+$. Здесь и ниже $\tau_0 = 0$. Функция $a(y) > 0$ непрерывна. В моменты времени переключения фазовая координата процесса $y(t)$ образует однородную феллеровскую цепь Маркова с переходной вероятностью $p(y_0, A)$ [2], т.е.

$$p(y, A) \equiv P\{\omega : y(\tau_j) \in A \,/\, y(\tau_{j-1}) = y\}$$

при всех $j \in \mathbb{N}$, $y \in Y$ и $A \in \sigma(Y)$, где $\sigma(Y)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств фазового пространства Y [2]. Предположим, что в моменты времени τ_j обязательно происходит переключение фазовой координаты, т.е. $p(y, \{y\}) = 0$.

Для задания марковского процесса $y(t)$ можем использовать его локальные характеристики, определяющие так называемый C-инфинитезимальный оператор этого процесса [2]

$$(Qv)(y) \equiv \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} [E_y v(y(\Delta)) - v(y)],$$

где $v \in C(Y)$. В данном случае легко найти явное выражение для этого оператора [2]

$$(Qv)(y) \equiv a(y) \int_Y [v(z) - v(y)] p(y, dz). \quad (1)$$

Для упрощения дальнейших выкладок предположим, что Y является компактом [20]. Тогда $Q \in L(C(Y))$ и на основании положительности $a(y)$ следует экспоненциальная эргодичность процесса $y(t)$ [3]. Это значит, что существует единственная инвариантная мера $\mu \in C^*(Y)$ в ядре сопряженного оператора Q^*, причем при $y \in Y$ и $A \in \sigma(Y)$ переходная вероятность $P(t, y, A)$ процесса $y(t)$ экспоненциально стремится к $\mu(A)$, т.е. существует такая положительная константа $\rho > 0$, что $|P(t, y, A) - \mu(A)| \le e^{-\rho t}$ $\forall t \ge 0$ [3].

Рассмотренный выше процесс $y(t)$ можно также задать с помощью стохастического дифференциального уравнения (СДУ) с интегралом по пуассоновской мере. В [1] доказано, что существуют такое измеримое пространство $(\theta, \sigma(\theta))$, мера $\pi(d\theta)$, а также измеримое отображение $r: Y \times \theta \to Y$ такое, что $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dy(t) = \int_{\theta} r(y(t), \theta)\nu(d\theta, dt), \tag{2}$$

где пуассоновская мера $\nu(d\theta, dt)$ имеет параметр $E\nu(d\theta, dt) = \pi(d\theta)\, dt$. Мера $\pi(d\theta)$ и функция $r(y, \theta)$ удовлетворяют соотношениям [2, 8]

$$\pi(r(y(t), \theta) \ne 0) = a(y), \ \pi(r(y(t), \theta) \in A) = a(y) p(y, A)$$

для всех $y \in Y$, $A \in \sigma(Y)$, $\theta \in A$.

Определим потенциал Π марковского процесса $y(t)$ с помощью равенства [2]

$$(\Pi v)(y) \equiv \int_0^{\infty} \int_Y (P(t, y, dz) - \mu(dz)) v(z) dt. \tag{3}$$

Вследствие предположения о экспоненциальной эргодичности процесса $y(t)$ оператор Π определен и действует в $C(Y)$, т.е. $\Pi \in L(C(Y) / \{0\})$, причем при всех $v \in C(Y)$ имеет место равенство

$$Q\Pi v(y) = \Pi Q v(y) = -v(y) + \overline{v}, \tag{4}$$

где $\overline{v} \equiv \int_Y v(y)\mu(dy)$.

2. ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Поскольку возникат необходимость доказательства предельных теорем и принципа усреднения, то при описании импульсных систем с марковскими переключениями (ИСМП) используется малый положительный параметр $\varepsilon > 0$.

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$, где $F \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \ge 0\}$, задан непрерывный справа случайный процесс $x(t) \equiv x(t, \omega)$: $[a, \infty] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$, который удовлетворяет ДУ

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon), \tag{5}$$

а при всех $t \in \{\tau_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию скачка

$$x(t) = x(t-) + \varepsilon g(x(t-), y(t-), \varepsilon) \tag{6}$$

и при $t = 0$ удовлетворяет начальному условию $x(0) = x$.

Предположим, что функции f и g могут быть представлены в виде

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon), \tag{7}$$

$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon). \tag{8}$$

Функции, которые входят в конструкции (7), (8), удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_1(x, y)$ и $g_1(x, y)$ непрерывны по совокупности переменных и имеют две ограниченные производные Фреше [20] по x ($f_1, g_1: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$); $f_1, g_1 \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$; $f_1, g_1 \in C^{2,1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$;

2) $f_2(x, y)$, $f_3(x, y, \varepsilon)$, $g_2(x, y)$, $g_3(x, y, \varepsilon)$ непрерывны и имеют непрерывные ограниченные производные Фреше по x, причем для $\forall x \in \mathbb{R}^m$ и $\varepsilon \in (0,1)$ можно записать

$$\|Df_3(x, y, \varepsilon)\| + \|Dg_3(x, y, \varepsilon)\| \le \beta(\varepsilon), \tag{9}$$

где $\beta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$ — бесконечно малая при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, что наложенные выше ограничения 1 и 2 гарантируют выполнение глобальных условий Липшица по $x \in \mathbb{R}^m$ для правой части уравнения (5). Поэтому процесс $x(t) \in \mathbb{R}^m$ однозначно определяется начальным условием $x(0) = x$ для марковского процесса $y(t)$ и $\varepsilon \in (0,1)$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1 и 2 для ИСМП. Тогда пара $\{x(t), y(t)\}$ является феллеровским марковским процессом на фазовом пространстве $\mathbb{R}^m \in Y$ со слабым инфинитезимальным оператором (СИО)

$$(Lv)(x, y) = \varepsilon(f(x, y, \varepsilon), \nabla)v(x, y) + Qv(x, y) + \varepsilon G^{\varepsilon} v(x, y), \tag{10}$$

где $\nabla - x$-градиент, оператор Q действует по переменной y, а оператор G^{ε} определяется равенством

$$G^{\varepsilon} v(x, y) = \varepsilon^{-1} a(y) \int_Y [v(x + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), z) - v(x, z)] p(y, dz).$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ удовлетворяет СДУ (2). Если, используя пуассоновскую меру $\nu(d\theta, dt)$, построить меру $\nu(\theta, dt)$ на $\mathbb{R}_+$, то описанный выше процесс $x(t)$ можно задать с помощью СДУ

$$dx = \varepsilon \{f(x, y, \varepsilon)\, dt + g(x, y, \varepsilon)\, \nu(\theta, dt)\}, \tag{11}$$

где функции f и g удовлетворяют по x глобальному условию Липшица

$$|f(x_1, y, \varepsilon) - f(x_2, y, \varepsilon)| + a(y)|g(x_1, y, \varepsilon) - g(x_2, y, \varepsilon)| \le K|x_1 - x_2|, \tag{12}$$

условию линейного роста

$$|f(x_1, y, \varepsilon)| + a(y)|g(x_1, y, \varepsilon)| \le K(1 + |x_1|) \tag{13}$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $\varepsilon \in (0,1)$ и некоторым $K > 0$.

Отсюда имеем [1, 7] существование и единственность сильного решения системы уравнений (11) с начальным условием $x(0) = x$, а также марковское свойство пары $\{x(t), y(t)\}$. Для вычисления СИО на достаточно гладких по x функциях $v(x, y)$ можно воспользоваться результатами из монографий [2, 7].

Лемма 2. При выполнений условий 1, 2 решение импульсной системы (5), (6) удовлетворяет неравенству

$$E_{x, y}|x(t)|^2 \le (1 + |x|^2) \exp\{\varepsilon\alpha t\} \tag{14}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $t \ge 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и некотором $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для $v(x) = |x|^2$ легко получить неравенство

$$(Lv)(x, y) \le 2\varepsilon|x|(|f(x, y, \varepsilon)| + a(y)|g(x, y, \varepsilon)|) + \varepsilon^2 a(y)|g(x, y, \varepsilon)|^2 \le$$

$$\le \varepsilon(1 + 2K^2 + 2K^2 a_1^{-1})(1 + |x|^2),$$

где $a_1 \equiv \min\limits_{y \in Y} a(y)$. Далее, используя формулу Дынкина [2, §5.1], получаем

$$(E_{x,y}v)(x(t), y(t)) = v(x) + \int_0^t E_{x, y}(Lv)(x(s), y(s))ds \le v(x) + \varepsilon\alpha \int_0^t (E_{x, y}v)(x(s), y(s))ds$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in Y$, $t \ge 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, где $\alpha \equiv 1 + 2K^2 + 2K^2 a_1^{-1}$. Осталось воспользоваться неравенством Гроноулла и получить оценку (14). ■

Пусть $\bar{x}(t)$ — решение импульсной системы (5), (6) при

$$f_2(x, y) \equiv g_3(x, y, \varepsilon) \equiv f_3(x, y, \varepsilon) \equiv 0 \text{, а } x^{\varepsilon}(t) \equiv \bar{x}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Лемма 3. Если выполняются условия 1, 2 а также вышестоящее условие, то для всех $T > 0$, $\delta > 0$, $y \in Y$ и $x \in \mathbb{R}^m$ можно записать

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E_{x, y}\left\{\sup_{0 \le t \le T}\left|x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - x^{\varepsilon}(t)\right|^2\right\} = 0. \tag{15}$$

Доказательство следует из теоремы 1 [1, §2.9], так как $x^{\varepsilon}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$dx^{\varepsilon}(t) = f\left(x^{\varepsilon}(t), y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \varepsilon\right)dt + g\left(x^{\varepsilon}(t), y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \varepsilon\right)\nu_{\varepsilon}(\theta, dt),$$

причем

$$|f(x, y, \varepsilon) - f_1(x, y)|^2 + a(y)|g(x, y, \varepsilon) - g_1(x, y)|^2 \le \varepsilon^2 \bar{K}(1 + |x|^2)$$

при всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $\varepsilon \in (0,1)$, где $\nu_{\varepsilon}(d\theta, dt)$ — пуассоновская мера с параметром $\pi_{\varepsilon}(d\theta)dt$, а случайное векторное поле, определенное правой частью этого уравнения, удовлетворяет глобальному условию Липшица и условию линейного роста по первому аргументу равномерно по $y \in Y$ и $\varepsilon \in (0,1)$. ■

3. ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Введем следующие обозначения: $y^{\varepsilon}(t)$ — решение стохастического дифференциального уравнения

$$dy^{\varepsilon}(t) = \int_{\Theta} r(y^{\varepsilon}(t), \theta)\nu_{\varepsilon}(d\theta, dt),$$

где $\nu_{\varepsilon}(d\theta, dt)$ дано в доказательстве леммы 3; $y_{\varepsilon}(t)$ — решение СДУ

$$dy_{\varepsilon}(t) = \int_{\Theta} r(y^{\varepsilon}(t), \theta)\nu_{\varepsilon'}(d\theta, dt).$$

Пусть также

$$F_j(x, y) \equiv f_j(x, y) + a(y)\, g_j(x, y), \qquad b_j(x) \equiv \int_{Y^m} F_j(x, y)\mu(dy), \ j = 1, 2;$$

V_p — пространство непрерывных отображений $\mathbb{R}^m \times Y$ в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m,\, y \in Y} |v(x, y)|(1 + |x|^{-p}) \equiv \|v\|_p < \infty. \tag{16}$$

Отметим, что $(D\nabla v)(x)$ — матрица Гессе отображения $v \in C^2(\mathbb{R}^m)$.

Если $f : \mathbb{R}^m \times Y \to \mathbb{R}^d$ — элемент, принадлежащий V_p, тогда запишем $|f| \in V_p$ и используем обозначения (16). Аналогичное обозначение используется для матричнозначных функций.

Далее рассмотрим систему импульсных уравнений в виде

$$\frac{dx^{\varepsilon}}{dt} = f_1(x^{\varepsilon}, y^{\varepsilon}(t)), \tag{17}$$

при $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j \in \mathbb{N}$

$$x^{\varepsilon}(t) = x^{\varepsilon}(t-) + \varepsilon g_1(x^{\varepsilon}(t-), y(t-)), \tag{18}$$

при $t \in \{\tau_j,\ j \in \mathbb{N}]$ с начальным условием

$$x^{\varepsilon}(0) = x. \tag{19}$$

В силу (15) решение (17)–(19) и (5), (6) при $x(0)=x$ СИО марковского процесса $\{x^{\varepsilon}(t),\ y(t)\}$ имеет вид

$$(L(\varepsilon)\,v)(x,y)=(f_1(x,y),\nabla)\,v(x,y)+\frac{1}{\varepsilon}Qv(x,y)+G(\varepsilon)\,v(x,y)).$$

Помимо (17), (18) рассмотрим ДУ

$$\frac{du}{dt}=b_1(u), \tag{20}$$

которое будем называть усредненной системой (уравнением) для импульсной системы (5), (6). Легко увидеть, что в силу сделанных выше предположений решение (20) существует и единственно при любых начальных условиях

$$u(0)=u. \tag{21}$$

Уравнение

$$(Qv)(x,y)=-F_1(x,y)+b_1(x) \tag{22}$$

имеет решение в виде

$$v(x,y)=\Pi F_1(x,y),$$

где потенциал Π определен формулой (3). Из этого определения следует неравенство

$$\sup_{y\in Y}|\Pi F_1(x,y)|\le h\sup_{y\in Y}|F_1(x,y)| \tag{23}$$

при $x\in\mathbb{R}^m$. Легко увидеть, что равномерно ограниченная x-производная по x $DF_1(x,y)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_Y DF_1(x,y)\mu(x,y)=Db_1(x);$$

$$\sup_{y\in Y}\|D\Pi F_1(x,y)\|\le h\sup_{y\in Y}\|DF_1(x,y)\|\equiv h_1. \tag{24}$$

Лемма 4. Существует такая константа $c_1>0$, что для всех $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in Y$, $\varepsilon\in(0,1)$ выполняются следующие неравенства:

$$|(x-u,\Pi F_1(x,y))|\le c_1(1+|x|^2+|u|^2);$$

$$(|f_1(x,y)|+a(y)|g_1(x,y)|)|\Pi F_1(x,y)|\le c_1(1+|x|^2);$$

$$|b_1(u),\Pi F_1(x,y)|\le c_1(1+|x|^2+|u|^2);$$

$$|(x-u,[\Pi DF_1](x,y))f_1(x,y)|\le c_1(1+|x|^2+|u|^2);$$

$$\frac{a(y)}{\varepsilon}|(x+\varepsilon g_1(x,y)-u,(\Pi F_1))(x+\varepsilon g_1(x,y),\ y-\Pi F_1(x,y))|\le c_1(1+|x|^2+|u|^2).$$

Доказательство следует из неравенств (23), (24) и ограниченной дифференцируемости по x отображений $f_1(x,y)$ и $g_1(x,y)$. ■

Теорема 1. (Принцип усреднения для ИСНП.) Пусть выполнены приведенные выше условия для функций f_i и g_i. Тогда для $\forall r>0$ и $T>0$ решение (5), (6) в виде $x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ сходится по вероятности при $\varepsilon\to 0$ к решению $u(t,x)$ усредненного решения (20) с начальным условием $u(0)=x$ равномерно по $x\in S_r$ и $t\in[0,T]$, т.е. при $\forall\delta>0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{x\in S_r\\ y\in Y}}P\left\{\omega\colon \sup_{0\le t\le T}\left|x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)-u(t,u)\right|>\delta\right\}=0. \tag{25}$$

Доказательство. С учетом леммы 3 можно утверждать, не теряя общности, что соотношение (25) имеет место для $x^{\varepsilon}(t)$.

Введем обозначение

$$v_1(x, y, u) = 2(x-u, \Pi F_1(x, y)) + (2c_1+1)(1+|x|^2+|u|^2). \qquad (26)$$

Тогда из леммы 1 следуют неравенства с некоторой константой K_1

$$1+|x|^2+|u|^2 \le v_1(x, y, u) \le (4c_1+1)(1+|x|^2+|u|^2);$$

$$|(f_1(x, y), \nabla_x)\, v_1(x, y, u)| \le K_1(1+|x|^2),$$

$$|(b_1(u), \nabla_x)\, v_1(x, y, u)| \le K_1(1+|x|^2+|u|^2),$$

$$|G(\varepsilon) v_1(x, y, u)| = \frac{a(y)}{\varepsilon} \int_Y |[(v_1(x+\varepsilon g_1(x, y)-u)\, v_1(x, y, u,)]p(y, dz)| \le$$

$$\le 2\left|(a(y) g_1(x, y), \Pi F_1(x, y)) + \sup_{y\in Y} \frac{a(y)}{\varepsilon}\right| \times$$

$$\times |(x+\varepsilon g_1(x, y)-u, (\Pi F_1))(x+\varepsilon g_1(x, y), z) - \Pi F_1(x, z))| + \frac{a(y)}{\varepsilon}(2c_1+1) \times$$

$$\times (|x+\varepsilon g_1(x, y)|^2 - |x|^2) \le$$

$$\le 4c_1 + (1+|x|^2+|u|^2) + (2c_1+1) \sup_{y\in Y} a(y)(2|x||g_1(x, y)| + |g_1(x, y)|^2) \le$$

$$\le K_1(1+|x|^2+|u|^2).$$

По определению $(Qv_1)(x, y, u) = -2(x-u, F_1(x, y))$. Следовательно, для функционала $v(x, y, u) \equiv |x-u|^2 + \varepsilon v_1(x, y, u)$ можно получить оценку

$$(\hat{L}v)(x, y, u) \equiv \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} E_{x, y}[v(x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), u(t, x)) - v(x, y, u)] =$$

$$= 2(x-u, F_1(x, y) - b_1(u)) + \varepsilon a(y)|g_1(x, y)|^2 + \varepsilon(f_1(x, y), \nabla_x)\cdot v_1(x, y, u) +$$

$$+ \varepsilon(b_1(u), \nabla_u)\, v_1(x, y, u) + \varepsilon G(\varepsilon)\, v_1(x, y, u) + Q\, v_1(x, y, u) \le$$

$$\le 2|(x-u, b_1(x) - b_1(u))| + \varepsilon c_2(1+|x|^2+|u|^2) \le$$

$$\le 2K|x-u|^2 + \varepsilon c_2(1+|x|^2+|u|^2) \le (2K+c_2)(|x-u|^2 + \varepsilon(1+|x|^2+|u|^2)) \le$$

$$\le (2K+c_2)\, v(x, y, u)$$

при некотором $c_2 > 0$. Оператор $\hat{L}$ можно рассматривать как СИО марковского процесса $\{x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), u(t, u)\}$, и с помощью формулы Дынкина [2] записать интегральное неравенство

$$E_{x, y} v(x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), u(t, u)) = v(x, y, x) + \int_0^t E_{x, y}\, Lv(x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), u(s, x)) ds \le$$

$$\le v(x, y, u) + (2K+c_2)\int_0^t E_{x, y} Lv(x^{\varepsilon}(t), y^{\varepsilon}(t), u(s, x)) ds.$$

Отсюда по формуле Гронуолла имеем

$$E_{x,y} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,x)) \le v(x,y,u) e^{(2K+c_2)t}.$$

Следовательно, случайный процесс

$$\zeta(t) = e^{-(2K+c_2)t} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,x))$$

является супермартингалом, а супермартингальное неравенство из [5] дает возможность получить оценку

$$P_{x,y}\left\{\sup_{0\le t\le T} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,x)) \ge \delta^2\right\} \le P_{x,y}\left\{\sup_{0\le t\le T} \zeta(t) \ge \delta^2 e^{(2K+c_2)T}\right\} \le$$

$$\le \delta^{-2} e^{-(2K+c_2)T} \zeta(0) \le \varepsilon\delta^{-2}(2c_1+1) e^{(2K+c_2)T}(1+2|x|^2).$$

Если учесть вид функционала $v(x,y,u) = |x-u|^2 + \varepsilon v_1(x,y,u)$, то непосредственно получим утверждение теоремы 1.

Перейдем далее к анализу устойчивости.

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПО УСРЕДНЕННОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим импульсную систему (5), (6) при выполнении условия

$$f(0,y,\varepsilon) \equiv g(0,y,\varepsilon) \equiv 0. \tag{27}$$

Тогда легко увидеть, что

$$a(y)|g_1(x,y)| + |f_1(x,y)| \le K|x|, \tag{28}$$

$$a(y)|g(x,y,\varepsilon)| + |f(x,y,\varepsilon)| \le K|x| \tag{29}$$

при некотором $K > 0$, всех $\varepsilon \in (0,1)$, $y \in Y$ и $x \in \mathbb{R}^m$, а также

$$|b_1(u)| \le K|u| \tag{30}$$

при всех $u \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 2. Пусть выполнены указанные выше неравенства и тривиальное решение усредненного уравнения (20) экспоненциально устойчиво, т.е. существуют такие константы $M > 0$, $\gamma > 0$, что

$$|u(t,x)| \le M e^{-\gamma t}|x| \tag{31}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$ и $t \ge 0$.

Тогда найдутся такие положительные числа $0 < \varepsilon_0 < 1$, $M_1 > 0$, $\gamma > 0$, что при решении (5), (6) допускается оценка

$$E_{x,y}|x(t)|^2 \le M_1 e^{-\varepsilon\gamma_1 t}|x| \tag{32}$$

при всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$, $t \ge 0$ и $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$E_{x,y}\left\{\left|x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^2\right\} \le M_1 e^{-\gamma_1 t}|x|^2. \tag{33}$$

Доказательство проведем в три этапа.

Этап 1. Построение функционала Ляпунова. Рассмотрим сначала функционал Ляпунова

$$v_0(x) = \int_0^T |u(t,x)|^2 dt, \tag{34}$$

где $T > 0$.

Вследствие ограниченности первой и второй производной Фреше векторного поля $b_1(x)$ решение (20) также имеет две производные по x, причем найдутся такие положительные константы c_1, c_2, q, q_2, что при всех $t \geq 0$ и $u \in \mathbb{R}^m$ выполняются неравенства

$$|\nabla u(t,x)|^2 \leq q_1 e^{q_2 t} |x|;$$

$$\|D\nabla u(t,x)\|^2 \leq q_2 e^{q_2 t}; \tag{35}$$

$$c_1 |x|^2 \leq v_0(x) \leq c_2 |x|^2. \tag{36}$$

Поэтому функционал (34) также имеет две производные по x, которые удовлетворяют неравенствам

$$|\nabla v_0(x)| \leq q_3 |x|, \ \|D\nabla v_0(x)\| \leq q_3 \tag{37}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ и некотором $q_3 > 0$. Итак, вектор-функция $\nabla v_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой q_3; кроме того, по построению имеем

$$(\nabla v_0(x), b_1(x)) = |u(T,x)|^2 - |x|^2 \leq (Me^{-\gamma T} - 1)|x|^2.$$

Далее выберем $T > 0$ настолько большим, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}^m$ выполнялось неравенство

$$(\nabla v_0(x), b_1(x)) \leq -\frac{1}{2}|x|^2 \leq -\frac{1}{2c_2} v_0(x),$$

где $c_2 > 0$ из неравенства (36).

В силу неравенства (37) можно записать

$$v_0(x + \varepsilon g(x,y,\varepsilon)) - v_0(x) = \int_0^{\varepsilon} (\nabla v_0(x, sg(x,y,\varepsilon)), g(x,y,\varepsilon))\, ds =$$

$$= \varepsilon(\nabla v_0(x), g(x,y,\varepsilon)) + \varepsilon^2 \widetilde{g}(x,y,\varepsilon), \tag{38}$$

где функционал

$$\widetilde{g}(x,y,\varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon} (\nabla v_0(x + sg(x,y,\varepsilon)) - \nabla v_0(x), g(x,y,\varepsilon))\, ds$$

удовлетворяет неравенству

$$|\widetilde{g}(x,y,\varepsilon)| \leq \frac{q_4}{2} |q(x,y,\varepsilon)|^2 \leq K_1 |x|^2 \tag{39}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1)$, $y \in Y$ и некотором $K_1 > 0$.

Рассмотрим функционал $v(x,y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)$, где $v_1(x,y) = (\nabla v_0(x), \Pi F_1(x,y))$.

Этап 2. Оценка слабого производящего оператора (СПО) $L(\varepsilon)$ марковского процесса $\left\{ x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y^{\varepsilon}(t) \right\}$.

По определению СПО $L(\varepsilon)$ можно записать в виде

$$L(\varepsilon)v(x,y) = (\nabla v_0(x), f_1(x,y)) + \varepsilon(\nabla v_0(x), f_2(x,y) + f_3(x,y,\varepsilon)) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} a(y)[v_0(x + g_1(x,y,\varepsilon)) - v_0(x)] + Qv_1(x,y) + \varepsilon(\nabla v_1(x,y), f(x,y,\varepsilon)) +$$

$$+ \varepsilon G(\varepsilon) v_1(x,y) = \varepsilon \{\widetilde{g}(x,y,\varepsilon)\, a(y) + (\nabla v_0(x), f_2(x,y) + f_3(x,y,\varepsilon)) +$$

$$+ (\nabla v_1(x,y), f(x,y,\varepsilon)) + a(y) \int_Y [v_1(x + \varepsilon g(x,y,\varepsilon), z) - v_1(x,z)]\, p(y,dz) \Big\}. \tag{40}$$

На основании полученных оценок на этапе 1 имеют место неравенства

$$a(y)|\tilde{g}(x, y, \varepsilon)| \leq \max_{y \in Y} a(y) K_1 |x|^2 \leq \tilde{q}_3 |x|^2; \tag{41}$$

$$|v_1(x, y)| \leq q_3 |x| h \sup_{y \in Y} |F_1(x, y)|^2 \leq \tilde{q}_3 hK |x|^2; \tag{42}$$

$$|\nabla v_1(x, y)| \le \tilde{q}_3 \sup_{y \in Y} |\Pi F_1(x, y)| + q_3 |x| \sup_{y \in Y} \| \Pi D F_1(x, y) \| \le \tilde{q}_3 |x| ; \tag{43}$$

$$a(y) | v_1(x + \varepsilon g(x, y, \varepsilon), z) - v_1(x, z) | \le \varepsilon \tilde{q}_3 |x|^2 ; \tag{44}$$

$$|(\nabla v_0(x), f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon))| \le \varepsilon \tilde{q}_3 |x|^2 \tag{45}$$

при некотором $\tilde{q}_3 > 0$ и всех $y \in Y$, $z \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1)$. Следовательно, по определению операторов Π и Q выражение (40) для $L(\varepsilon) v(x, y)$ допускает оценку

$$L(\varepsilon) v(x, y) \le -\frac{1}{2} |x|^2 + \varepsilon c_3 |x|^2 \tag{46}$$

при всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,1)$. Кроме того, из неравенств (41)–(45) следует неравенство

$$(c_1 - \varepsilon y_3 hK) |x|^2 \le v(x, y) \le (c_2 + \varepsilon q_3 hK) |x|^2 , \tag{47}$$

исходя из которого оценке $L(\varepsilon) v(x, y)$ удовлетворяет неравенство

$$L(\varepsilon) v(x, y) \le -\frac{1}{2} \frac{1 - 2\varepsilon c_3}{c_2 + \varepsilon q_3 hK} v(x, y) . \tag{48}$$

Далее можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$ настолько малым, чтобы при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнялись неравенства

$$L(\varepsilon) v(x, y) \le -\frac{1}{4c_2} v(x, y) , \tag{49}$$

$$\frac{1}{2} c_1 |x|^2 \le v(x, y) \le 2c_2 |x|^2 . \tag{50}$$

Этап 3. Использование супермартингальных свойств [6] случайного процесса

$$\zeta(t) = e^{\frac{1}{4c_2} t} v\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y^{\varepsilon}(t) \right). \tag{51}$$

Очевидно, что из неравенства (49) вытекают супермартингальные свойства случайного процесса $\zeta(t) = \zeta(t, \omega)$. Тогда неравенство (50) позволяет получить оценку

$$\frac{1}{2} c_1 e^{\frac{1}{4c_2} t} E_{x, y} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right|^2 \le E_{x, y} \zeta(t) \le E_{x, y} \zeta(0) = v(x, y) \le 2c_2 |x|^2 .$$

Отсюда имеем оценку

$$E_{x, y} |x(t)|^2 \le \frac{4c_2}{c_1} e^{-\frac{\varepsilon}{4c_2} t} |x|^2 ,$$

что эквивалентно неравенству (33) при $M_1 \equiv \dfrac{4c_2}{c_1}$, $\gamma_1 \equiv \dfrac{1}{4c_2}$. Это и доказывает теорему 2.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение (5), (6) стремится к нулю при $T \to +\infty$:

$$\lim_{T \to \infty} P_{x, y} \left\{ \sup_{t \ge T} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right|^2 \ge \delta^2 \right\} = 0 . \tag{52}$$

Доказательство. Рассмотрим дополнительный функционал Ляпунова

$$v(x,\, y) = \int\limits_0^{T_1} E_{x,\, y} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dt\,.$$

Из теоремы 2 вытекает существование такого числа $h_1 > 0$, что

$$v(x,\, y) \le h_1 |x|^2 \tag{53}$$

при всех $T_1 > 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in (0,\, \varepsilon_0)$ и $y \in Y$. Далее легко убедиться в существовании такой константы $h_2 > 0$, что для функционала $r(x,\, y) \equiv L(\varepsilon)|x|^2$ справедливо неравенство

$$|r(x,\, y)| \le h_2 |x|^2\,. \tag{54}$$

Следовательно, с учетом (53) и (54) для решения задачи (5), (6) можно получить оценку снизу

$$E_{x,\, y} \left| x\left(\frac{T_1}{\varepsilon}\right)\right|^2 = |x|^2 + \int\limits_0^{T_1} E_{x,\, y} \left\{ r\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\, y^{\varepsilon}(t)\right)\right\} dt \ge |x|^2 - h_2 \int\limits_0^{T_1} E_{x,\, y} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^2 dt =$$

$$= |x|^2 - h_2 v(x,\, y)\,.$$

Отсюда при всех $y \in Y$, $x \in \mathbb{R}^m$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$v(x,\, y) \ge \frac{1}{h_2}\left(|x|^2 - M_1 e^{-\gamma T_1} |x|^2\right) \ge \frac{1}{2h_2} |x|^2,$$

если число $T_1 > 0$ достаточно большое. Тогда

$$L(\varepsilon)\, v(x,\, y) = E_{x,\, y} \left| x\left(\frac{T_1}{\varepsilon}\right)\right|^2 - |x|^2 \le -\frac{1}{2}|x|^2\,. \tag{55}$$

По определению из [1, 6] следует, что случайный процесс $v\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\, y^{\varepsilon}(t)\right)$ является супермартингалом, который удовлетворяет неравенству

$$v\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\, y^{\varepsilon}(t)\right) \ge \frac{1}{2h_2} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^2$$

при всех $t \ge 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in Y$.

Значит, естественно воспользоваться супермартингальным неравенством из [6] и записать

$$P_{x,\, y} \left\{ \sup_{t \ge T} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right|^2 \ge \delta^2 \right\} \le P_{x,\, y} \left\{ \sup_{t \ge T} v\left(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\, y^{\varepsilon}(t)\right) \ge \frac{\delta^2}{2h_2} \right\} \le$$

$$\le \frac{2h_2}{\delta^2} E_{x,\, y} \left\{ v\left(x\left(\frac{T}{\varepsilon}\right),\, y^{\varepsilon}(T)\right)\right\} \le \frac{2h_2 h_1 M_1}{\delta^2} e^{-\frac{\gamma T}{\varepsilon}} |x|^2,$$

что и доказывает неравенство (52), а значит и важное следствие 1. ■

Заметим, что дальнейшее исследование важного свойства о слабой сходимости решений стохастических импульсных систем будет предметом изложения следующей работы авторов (Ч. 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
2. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Наука, 1969. — 859 с.
3. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. — М.: ИЛ, 1956. — 605 с.
4. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: Физматизд, 1963. — 512 с.
5. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1994. — Т. 1. — 544 с.
6. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. — М.: Наука, 1996. — Т. 2. — 628 с.
7. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. В 3-х томах. — Т. 3. — Випадкові процеси. Комп'ютерне моделювання. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.
8. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1978. — 328 с.
9. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальное уравнения с импульсными воздействиями. — Киев: Вища школа, 1967. — 287 с.
10. Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 9. — С. 1176–1181.
11. Халанай Р.З., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 307 с.
12. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. — Рига: Зинатне, 1989. — 419 с.
13. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем — М.: Физматизд, 1958. — 724 с.
14. Якубович В.А., Стажинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. — М.: Наука, 1972. — 718 с.
15. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
16. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973. — 558 с.
17. Пугачёв В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Наука, 1962. — 883 с.
18. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. — М.: Энергия, 1973. — 440 с.
19. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость импульсных систем. — Рига: Изд-во РТУ, 1994. — 304 с.
20. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
21. Korolyuk V.S. Averaging and stability of dynamical system with rapid Markov switchings. — Umea: Univ. of Umea, S–90167, 1991. — Febr. — 15 p.
22. Korolyuk V.S., Limnios N. Diffusion approximation of integral functional in double merging and averaging scheme // Theory Probab. and Math. Statist. — 2000. — **60**. — P. 87–94.
23. Korolyuk V.S., Limnios N. Diffusion approximation for evolutionary systems with equilibrium in asymptotic split phase space // Theory Probab. and Math Statist. — 2000. — **70**. — P. 71–82.
24. Tsarkov Ye. Averaging in dynamical system with Markov jumps. — Bremen: Univ. of Bremen, Iust. Dynamical Syst. — 1993. — N 282, April. — 41 p.

Поступила 14.05.2009