

## РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Ключевые слова:** моделирование, итеративная идентификация, аппроксимация, неопределенность, функция Грина.

### ВВЕДЕНИЕ

При моделировании и прогнозировании процессов, протекающих в сложных системах, а также при управлении ими необходимо иметь соответствующую математическую модель. Она должна быть адекватной тем целям и задачам, которые будут решаться с ее помощью. В то же время модель не должна быть очень сложной и трудной для их решения. Например, чем больше размерность переменных в уравнениях, описывающих управляемые процессы, тем сложнее закон управления, который синтезируется на их основе. Вместе с тем приближенная модель небольшой размерности во многих случаях дает более простое управление, вполне приемлемое для практики. Кроме того, при описании сложных реальных объектов всегда остаются неопределенности, не учитываемые моделью, а при количественных оценках или измерениях возможны погрешности. Даже при численном решении, например задач математической физики, все равно используются конечномерные аппроксимации. Поэтому упрощенные модели, но адекватные тем задачам, которые с их помощью решаются, более предпочтительны в приложениях, поскольку значительно расширяют применение математических методов в различных областях, особенно для процессов, которые протекают в системах с распределенными параметрами [1, 2]. Вопросам построения для бесконечномерных систем аппроксимирующих моделей, удобных и приемлемых для решения задач моделирования, управления и прогнозирования, посвящена данная статья. Развита унифицированный подход к рациональной аппроксимации пространственно-временных систем на основе методов идентификации.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Первое, что требуется при математическом моделировании сложной реальной системы, — это выбрать для нее структуру модели. Без априорной информации и общих представлений об объекте здесь не обойтись. Если он распределен в пространстве, а его параметры или характеристики изменяются во времени, то имеем дело с пространственно-временной системой, которая может характеризоваться в простейшем случае скалярной, а в общем — векторной функцией  $w$ , зависящий от пространственной переменной  $z$ , принимающей значения в открытой области  $F$ , включая границу  $\partial F$ , и от временной переменной  $t$ , принимающей значения на числовой полуоси  $t \geq t_0$ . Как правило, процессы в такой системе определяются еще граничными (краевыми) и

начальными условиями.

В дальнейшем будем рассматривать только линейные системы, что также является исходной априорной информацией. Тогда для очень широкого класса систем в самых разнообразных прикладных областях можно использовать единую стандартную форму описания, достаточно унифицированную и хорошо вписываемую в существующие методы моделирования и идентификации. Идею такой стандартизации предложил А.Г. Бутковский в [3], а в [4] он собрал и структурировал широкий класс систем с распределенными и сосредоточенными параметрами с приведением их к стандартной форме.

Основной характеристикой системы в стандартной форме является функция Грина, или импульсная переходная функция. Функцию Грина иногда еще называют функцией влияния, или функцией источника. Кроме скалярной или векторной переменной  $w = w(z, t)$ , характеризующей пространственно-временное состояние системы, вводится стандартизирующая функция  $f(z, t)$ , которая трактуется как обобщенная функция, и с помощью которой любое внешнее объемное, граничное или начальное воздействие на систему можно записать в единообразном виде (подробности см. в [4]). Зная функцию Грина  $H(z, \zeta, t, \tau)$  и стандартизирующую функцию воздействия  $f(z, t)$ , состояние системы определяется по формуле

$$w(z, t) = \int_{t_0}^t \int_{\bar{F}} H(z, \zeta, t, \tau) f(\zeta, \tau) d\zeta d\tau, \quad (1)$$

где  $\bar{F}$  — замыкание  $F$ . Структура (1) включает статические или квазистатические модели, в последнее время является просто параметром. В таких случаях (1) представляется в виде

$$w(z) = \int_{\bar{F}} H(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta. \quad (2)$$

Системы с сосредоточенными параметрами входят в (1) как частный случай

$$w(t) = \int_{t_0}^t H(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть известная формула Коши [5]

$$w(t) = \Phi(t, t_0) w_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где  $\Phi(t, \tau)$  — переходная матрица системы линейных дифференциальных уравнений, которая и есть функция Грина. При этом обобщенная стандартизирующая функция  $f(\tau)$  представляется выражением  $f(\tau) = u(\tau) + w_0 \delta(\tau - t_0)$ , где  $\delta(\tau - t_0)$  — обобщенная функция Дирака.

В векторном случае  $w(z, t) = \text{col}((w_1(z, t), w_2(z, t), \dots, w_K(z, t)))$  и  $f(z, t) = \text{col}((f_1(z, t), f_2(z, t), \dots, f_L(z, t)))$ . В результате имеем

$$w_k(z, t) = \int_{t_0}^t \int_{\bar{F}} \sum_{l=1}^L H_{lk}(z, \zeta, t, \tau) f_l(\zeta, \tau) d\zeta d\tau, \quad k = \overline{1, K}. \quad (5)$$

В распространенном случае, когда выполняется инвариантность относительно сдвига по времени, функция Грина представляется как  $H(z, \zeta, t, \tau) = H(z, \zeta, t - \tau)$ . На практике чаще интерес представляют не сами поля, определяемые  $w(z, t)$ , а не-

которые их точечные или интегральные характеристики, которые могут измеряться или оцениваться. Представим их как выходные переменные  $y(t) = \text{col}((y_1(t), y_2(t), \dots, y_M(t)))$ . При точечных измерениях  $y_m(t) = w(z_m, t)$ , а при интегральных имеем  $y_m(t) = \int_{\bar{F}} \psi_m(z) w(z, t) dz$ , где  $\psi_m(z)$  — весовая функция, определенная на  $F_m \subseteq \bar{F}$  и  $\psi_m(z) \equiv 0$  при  $z \in F / F_m$ .  $F_m$  может быть подобластью  $\bar{F}$  или совпадать с ней поверхностью или контуром внутри  $\bar{F}$ .

Поскольку  $f(z, t)$  — обобщенная функция, то точечное, граничное или иное вырожденное воздействие уже определяется ее структурой. Тем не менее, как правило, временная зависимость  $f(z, t)$  определяется внешней системой с сосредоточенными параметрами, т.е.  $f(z, t) = \sum_{r=1}^R u_r(t) f_r(z)$ , где  $u_r(t)$  определяет пе-

ременные внешней управляющей системы, а  $f_r(z)$  задает ее распределенное воздействие на объект. Например, для электромагнитных процессов токи в обмотках являются внешними входными воздействиями, а пространственные характеристики, определяемые расположением витков обмотки, обеспечивают распределенность воздействия.

В результате для систем с конечным числом входных воздействий и конечным числом выходных переменных (на практике такие системы наиболее распространены) будем иметь

$$y_m^{(r)}(t) = \int_{t_0}^t H_{mr}(t, \tau) u_r(\tau) d\tau, \quad m = \overline{1, M}, \quad r = \overline{1, R}, \quad (6)$$

где  $H_{mr}(t, \tau) = \int_{\bar{F}} \psi_m(z) dz \int_{\bar{F}} H(z, \zeta, t, \tau) f_r(\zeta) d\zeta$ . Здесь  $\psi_m(z)$  считаем об-

общенной функцией, что дает возможность в стандартизированном виде представить любые измерения, включая точечные. Следует заметить, что  $H_{mr}(t, \tau)$  порождаются одной и той же функцией Грина. Следовательно, временные характеристики элементов  $H_{mr}(t, \tau)$  будут либо совпадать, либо дополнять друг друга. При этом весовые функции  $\psi_m(z)$  и  $f_r(\zeta)$  будут определять свойства наблюдаемости или управляемости соответствующих обобщенных степеней свободы объекта.

## 2. РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

В дальнейшем рассматриваются только линейные стационарные системы, когда имеет место сдвиговая инвариантность, т.е. модель (6) можно представить в виде конволюции с передаточной матрицей  $G(s)$ , которая выражается иррациональной (в бесконечномерном случае) либо рациональной (для конечномерной системы) функциями. Такие системы для достаточно большого класса передаточных функций можно задавать четверкой линейных операторов (матриц)  $A, B, C, D$ , осуществляющих отображения между различными бесконечномерными (конечномерными) линейными векторными пространствами так, что  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ . В первую очередь к ним относятся системы с операторами ядерного типа, которые порождают ограниченный оператор Ганкеля [6], сингулярные числа  $\sigma_j$  ( $\sigma_j \geq 0$ ) которого удовлетворяют условию  $\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j < \infty$ . Согласно [7] оператор Ганкеля  $\Gamma$  является ядерным, если и только

если его передаточная матрица  $G(s)$ , соответствующая  $C(sI - A)^{-1}B$ , может быть представлена в форме

$$G_{mr}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{mi}^{(r)} \operatorname{Re}(\xi_i)(s - \xi_i)^{-1}, \quad G(s) = [G_{mr}(s)] \quad (7)$$

при условии, что комплексные числа расположены в левой полуплоскости (устойчивые системы), сингулярные числа различные и  $\sum_{i=1}^{\infty} |g_{mi}^{(r)}| \leq C \|\Gamma\|_N$ , где

$C = \text{const}$ , а  $\|\Gamma\|_N = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$  — ядерная норма  $\Gamma$ . В принципе этот результат с

использованием цепочки пар Шмидта [8] распространяется и на случай кратных сингулярных чисел. Однако ограничимся только однократным случаем. Ряды (7) в области  $\operatorname{Re}s > 0$  равномерно сходятся по ядерной норме ассоциативных операторов Ганкеля. Импульсная переходная матрица  $H(t)$  инвариантной по времени системы в случае ядерного оператора  $\Gamma$  состоит из элементов  $H_m^{(r)}(t)$ , которые могут представляться разложениями

$$H_{mr}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_{mi}^{(r)} \operatorname{Re}(\xi_i) e^{\xi_i t}. \quad (8)$$

При этом функции  $H_{mr}(t)$  почти всюду непрерывны на полуоси  $t \geq t_0$  и удовлетворяют условию

$$|H(t)| = \sup_{\substack{\|l\|=1 \\ \|\eta\|=1}} \{ | \langle H(t)l, \eta \rangle |, l \in C^R, \eta \in C^M \} \leq M \|\Gamma\|_N / t \quad (9)$$

для всех  $t \geq t_0$  и  $M = \text{const}$ .

Согласно [6] разложение (7) передаточной матрицы сходится в  $H_{\infty}$ ,  $H_2$  и  $H_N$ , а сходимость по нормам  $L^1$ ,  $H^{\infty}$ , ганкелевой и  $L^2$  импульсной переходной матрицы  $H(t)$  в виде разложения (8) обеспечивается классической теоремой замыкания, приведенной, например, в [9]. Поэтому в качестве приближенной усеченной модели системы можно выбрать передаточную матрицу с элементами

$$G_{mr}^n(s) = \sum_{i=1}^n g_{mi}^{(r)} \operatorname{Re}(\xi_i)(s - \xi_i)^{-1} \quad (10)$$

или соответствующую импульсную переходную матрицу, состоящую из

$$H_{mr}^n(t) = \sum_{i=1}^n g_{mi}^{(r)} \operatorname{Re}(\xi_i) e^{\xi_i t}. \quad (11)$$

При этом обеспечивается сходимость

$$\|G_{mr}^n(s)\|_N \rightarrow 0, \quad \|H_{mr}^n(t) - H_{mr}(t)\|_N \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где  $N$  — одна из указанных выше норм. Фактически (10) описывает стационарную конечномерную динамическую систему, элементы передаточной матрицы которой представлены в виде разложения на простые дроби. Каждое слагаемое в (10) и аналогичное в (11) связано с обобщенной степенью свободы или модой системы. Выражения (10) и (11) эквивалентны представлению

$$H^n(t) = C_n e^{A_n t} B_n, \quad G^n(s) = C_n (sI - A_n)^{-1} B_n, \quad (12)$$

где матрицы  $A_n, B_n$  и  $C_n$  определяют конечномерную систему в пространстве состояний, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + B_n u, \quad y = C_n x. \quad (13)$$

Размерности векторов  $y$  и  $u$  в (13) равны  $M$  и  $R$  соответственно. В [6] предложено использовать тройку операторов  $(C, T(t), B)$ , где  $T(t)$  есть  $C_0$ -полугруппа в гильбертовом пространстве с инфинитезимальным генератором  $A$  для представления в гильбертовом пространстве оператора Ганкеля  $\Gamma$ , соответствующего переходной матрице  $H(t)$  ядерного типа. Тогда инфинитезимальный генератор  $A$  и операторы  $C, B$  в упорядоченной форме можно выразить через сингулярные числа  $\Gamma$  и нормализованные собственные функции операторов  $\Gamma^* \Gamma$  и  $\Gamma \Gamma^*$  ( $\Gamma^*$  — сопряженный оператор) так, что они будут давать нормальную выходную реализацию линейных операторов  $(C, A, B)$ , соответствующих бесконечномерной линейной системе. Нормальная выходная реализация [6] представляет видоизмененную балансную реализацию, рассматриваемую в теории реализаций [10] и используемую при аппроксимации конечномерных систем. Усеченная система  $(C_n, A_n, B_n)$  при такой реализации совпадает с (11), но нахождение уравнений связи элементов матриц  $A_n, C_n$  и  $B_n$  с собственными значениями  $\xi_i$  и коэффициентами  $g_{mi}^{(r)}$  является нетривиальной задачей.

В наиболее распространенном случае, когда  $H(t)$  — матрица с действительными элементами, (11) можно представить в виде разложения

$$H_{mr}^n(t) = \sum_{i=1}^n g_{mi}^{(r)} (\operatorname{Re}(\xi_i) e^{-\xi_i t} + \bar{g}_{mi}^{(r)} \operatorname{Re}(\xi_i) e^{-\bar{\xi}_i t}) \quad (14)$$

с учетом, что  $G(s) = \overline{G(\bar{s})}$ . Аналогично записывается выражение для  $G_{mr}^n(s)$ . Связь между моделями (13) и (11) или (14) с учетом (12) становится достаточно простой, если вместо балансной или нормальной выходной реализации взять жорданову форму реализации [11]. В таком случае матрица  $A_n$  конечномерной аппроксимирующей модели принимает вид  $A_n = \operatorname{diag}\{S_1, S_2, \dots, S_P\}$ , где диагональный блок

$$S_p = \begin{bmatrix} \alpha_p & -\beta_p \\ \beta_p & \alpha_p \end{bmatrix}, \quad \text{а } \xi_p = \alpha_p \pm j\beta_p.$$

Матрицы  $C_n$  и  $B_n$  тоже представим в блочном виде

$$C_n = [C_1, C_2, \dots, C_P] \quad \text{и} \quad B_n^T = [B_1^T, B_2^T, \dots, B_P^T]$$

где

$$C_p^T = \begin{bmatrix} c_{1p}^c & c_{2p}^c & \dots & c_{Mp}^c \\ c_{1p}^s & c_{2p}^s & \dots & c_{Mp}^s \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} b_{p1}^c & b_{p2}^c & \dots & b_{pR}^c \\ b_{p1}^s & b_{p2}^s & \dots & b_{pR}^s \end{bmatrix}.$$

Приведем тогда (14) к виду

$$H_{mr}^n(t) = \sum_{p=1}^P (g_{mp}^{(r1)} \cos \beta_p t + g_{mp}^{(r2)} \sin \beta_p t) e^{\alpha_p t}, \quad (15)$$

где  $g_{mp}^{(r1)} = c_{mp}^c b_{pr}^c + c_{mp}^s b_{pr}^s$ ,  $g_{mp}^{(r2)} = c_{mp}^s b_{pr}^c - c_{mp}^c b_{pr}^s$ .

Кроме того, удобно выбрать либо наблюдаемую нормальную жорданову реализацию, представив для каждой матрицы  $C_p^T$  один из столбцов в виде  $c_{ip}^c = 0, c_{ip}^s = 1, i = \overline{1, M}$ , либо управляемую нормальную жорданову реализацию, положив  $b_{pi}^c = 0, b_{pi}^s = 1, i = \overline{1, R}$ , в каждом блоке  $B_p$ . В первом случае уравнения связи коэффициентов разложения (15) с элементами матриц  $C_p$  и  $B_p$  имеют вид

$$b_{pr}^c = g_{ip}^{(r_2)}, b_{pr}^s = g_{ip}^{(r_1)} \quad (r = \overline{1, R}, p = \overline{1, P}), \quad (16)$$

$$c_{mp}^c = \frac{1}{2R} \sum_{r=1}^R \frac{g_{mp}^{(r_1)} - g_{mp}^{(r_2)}}{g_{rp}^{(r_1)}}, c_{mp}^s = \frac{1}{2R} \sum_{r=1}^R \frac{g_{mp}^{(r_1)} + g_{mp}^{(r_2)}}{g_{rp}^{(r_2)}} \quad (m = \overline{1, M}, p = \overline{1, P}, m \neq i),$$

а во втором —

$$c_{mp}^c = g_{mi}^{(r_1)}, c_{mp}^s = g_{mi}^{(r_2)} \quad (m = \overline{1, M}, p = \overline{1, P}, p \neq i),$$

$$b_{pr}^c = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{g_{mp}^{(r_1)} g_{mi}^{(r_1)} + g_{mp}^{(r_2)} g_{mi}^{(r_2)}}{g_{mi}^{(r_1)^2} + g_{mi}^{(r_2)^2}}, b_{pr}^s = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{g_{mp}^{(r_1)} g_{mi}^{(r_2)} - g_{mp}^{(r_2)} g_{mi}^{(r_1)}}{g_{mi}^{(r_1)^2} + g_{mi}^{(r_2)^2}}. \quad (17)$$

Если система имеет один вход и много выходов, то целесообразно использовать наблюдаемую жорданову форму реализации, а при одном выходе и многих входах — управляемую нормальную жорданову реализацию. В этих случаях имеется однозначная связь между коэффициентами разложения и элементами матриц модели в пространстве состояний. В общем случае в системах со многими входами и выходами имеем переопределенную систему уравнений связи и поэтому решения (16) и (17) были вычислены с использованием МНК, который для определенной группы коэффициентов привел к процедуре усреднения. Кроме того, чисто действительные собственные значения в разложении (15) являются частным случаем, который получается при  $\beta_p = 0, c_{mp}^s = b_{pr}^s = 0$ , т.е.  $g_{mr}^{(r_2)} \equiv 0, \cos \beta_p t \equiv 1$ . Поэтому размерность модели или число ее степеней свободы равно  $n = 2P_1 + P_2$ , где  $P_1$  — число слагаемых в (15), соответствующих комплексным, а  $P_2$  — действительным собственным значениям.

Таким образом, (15) — аппроксимирующая структура элементов импульсной переходной матрицы, представленной как разложение  $H_{mr}^n(t)$  по независимым базисным функциям, которые являются фундаментальными решениями эквивалентной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Преобразование Лапласа выражения (15)  $[LH_{mr}^n(t)](s)$  дает дробно-рациональную передаточную функцию, представленную в виде разложения на элементарные дроби и имеющую  $n$  полюсов  $s = \alpha_p \pm j\beta_p, p = \overline{1, P}$ , в левой полуплоскости.

### 3. АППРОКСИМАЦИЯ РАЗЛОЖЕНИЕМ ПО ОРТОНОРМИРОВАННОМУ БАЗИСУ

Пусть  $S_n$  — множество всех рациональных передаточных функций с максимальным числом полюсов  $n$ , т.е. систем, максимальная степень которых не превышает  $n$ . И пусть  $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$  — линейное многообразие всех конечномерных устойчивых систем. Тогда согласно теореме замыкания конечномерные системы образуют в  $S$  плотное множество в соответствующих пространствах. Поэтому задачу нахождения аппроксимирующей конечномерной модели сис-

темы можно решить, представляя импульсные переходные функции или соответствующие им передаточные функции в виде разложения по ортонормированным базисным функциям  $\{\psi_k(t)\}$  или  $\{L\psi_k(t)\}(s)$ . Каждая из них, как правило, соответствует некоторой конечномерной динамической системе или реальной рациональной передаточной функции из множества  $S$ , т.е.  $\{L\psi_k\}(s) \in S, k=1, 2, \dots$ . Тогда для элементов импульсной переходной матрицы и соответствующих передаточных функций существует единственное сходящееся разложение

$$H_{mr}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_{mk}^{(r)} f_k(\psi), \quad G_{mr}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{mk}^{(r)} [L\psi_k](s). \quad (18)$$

Ортонормированность базисных функций означает, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [Lf_k](j\omega)[Lf_l](-j\omega)d\omega = \begin{cases} 1 & (k=l), \\ 0 & (k \neq l). \end{cases}$$

Аппроксимирующая модель в таком случае примет вид

$$H_{mr}^n(t) = \sum_{k=1}^n h_{mk}^{(r)} \psi_k(t), \quad G_{mr}(s) = \sum_{k=1}^n g_{mk}^{(r)} [L[\psi_k]]. \quad (19)$$

В качестве базисных ортонормированных функций для устойчивых систем ядерного типа обычно используются ортогональные многочлены (экспоненциалы). Наиболее употребительными являются обобщенные функции Лагерра [13–15] для хорошо затухающих систем и двухпараметрические функции Каутца [15], которые лучше подходят для систем с рассеянными полюсами. Более универсальными являются обобщенные ортогональные базисные функции, предложенные Хеубергером [16].

Исходя из (6), коэффициенты  $h_{mk}^{(r)}$  можно найти из уравнений

$$y_m^{(r)}(t_i) = \sum_{k=1}^n F_{rik} h_{mk}^{(r)}, \quad i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, r = \overline{1, R}, \quad (20)$$

где  $F_{rik} = \int_{t_0}^{t_i} \psi_k(t_i - \tau) u_r(\tau) d\tau$ , а в случае, когда в качестве входного воздействия берется идеальный импульс в виде дельта-функции  $u_r = \delta(\tau - t_0)$ , имеем  $F_{rik} = \psi_k(t_i - t_0)$ . Целесообразно  $N$  выбирать так, чтобы (20) давало переопределенную систему и находить оценку  $\hat{h}_{mk}^{(r)}$  с использованием МНК.

Коэффициенты разложения  $g_{mk}^{(r)}$  передаточных функций можно вычислить, используя преобразованные по Фурье входы  $U_r(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} u_r(t) dt$  и выходы

$Y_m^{(r)}(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} y_m^{(r)}(t) dt$ . Тогда оценку передаточной функции  $\hat{G}_{mr}(j\omega)$  на оси находим из отношения

$$\hat{G}_{mr}(j\omega) = \frac{Y_m^{(r)}(j\omega)}{U_r(j\omega)}. \quad (21)$$

Функция  $\hat{G}_{mr}$  будет хорошо определенной при любых  $\omega$ , если  $U_m(j\omega) \neq 0$ . Заметим, что  $Y_m^{(r)}(j\omega)$  и  $U_r(j\omega)$  равномерно непрерывны, стремятся к нулю на бесконечности и не могут согласно [12] иметь ограниченный диапазон определения. Выб-

рав  $u_r(t) = U_{r_0} \delta(t)$ , будем иметь  $\hat{G}_{mr}(j\omega) = Y_m^{(r)}(j\omega) \setminus U_{r_0}$ .

После вычисления  $\hat{G}_{mr}(j\omega)$  и  $[Lf_k](j\omega)$ ,  $k = \overline{1; n}$ , нахождение коэффициентов разложения  $g_{mk}^{(r)}$  в (19) сводится к классической задаче аппроксимации функции  $\hat{G}_{mr}(j\omega)$  конечным рядом, которая также решается МНК. Для точных исходных данных и высокоточных вычислений как в первой, так и во второй задачах можно получить аппроксимирующую модель с любой погрешностью, оцениваемой по одной из указанных норм. Когда же исходные данные известны неточно (в условиях неполноты информации об объекте и при измерениях и вычислениях), возникают проблемы, принципиально влияющие на подход к решению задачи построения аппроксимирующей модели. Прежде всего, нельзя гарантировать сходимость аппроксимирующей модели к точной при  $n \rightarrow \infty$ , и задача ее нахождения становится некорректно поставленной. Может быть найдена только приближенная модель, погрешность которой в лучшем случае согласуется с мерой неопределенности. При этом существует оптимальная сложность аппроксимации, при которой невязка  $\|G_{mr} - G_{mr}^n\|_N$  будет наименьшей. Здесь  $N$ , как обычно, есть одна из норм:  $L^1, H^\infty, L^2$  или ганкелева. Если передаточные функции системы представить в виде  $G_{mr}(s) + \Delta G_{mr}(s)$ , то возмущение  $\Delta G_{mr}$  можно рассматривать как комплексное влияние всех ошибок. Когда  $G_{mr}(s)$  и  $\Delta G_{mr}(s)$  представляют устойчивые системы, аппроксимационные числа  $e_n^N(G) = \|G - G^n\|_N$  системы  $G(s)$  согласно [17, 9] удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} e_{n+p}^N(G_{mr} + \Delta G_{mr}) &\leq e_n^N(G_{mr}) + e_p^N(\Delta G_{mr}), \\ e_{np+j}^N(G_{mr} + \Delta G_{mr}) &\geq e_{(k+1)p+j}^N(\Delta G_{mr}) - e_p^N(G_{mr}). \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда если  $e_n^N(G_{mr})$  достаточно быстро уменьшается с ростом  $n$ , начиная с  $n = 1$ , а  $e_n(\Delta G_{mr})$  не очень быстро увеличивается для тех же  $n$ , то обычно существует такая оптимальная размерность  $n^*$  рациональной аппроксимации, что  $e_n^N(G_{mr} + \Delta G_{mr}) \Leftrightarrow e_0^N(\Delta G_{mr})$ . Аппроксимационную размерность  $n^*$  можно считать наилучшей приближенной моделью реальной системы  $G_{mr}$ , поскольку она описывает главным образом динамические характеристики самой системы, а не ее возмущений. Другими словами, на оценку очень грубой модели ( $n$  мало) возмущения не оказывают существенного влияния, а с ростом  $n$ , хотя точность аппроксимации улучшается, но растет влияние возмущений на оценку параметров модели и при некотором  $n^*$  погрешности уравниваются.

Совершенно очевидно, что  $n^*$  и  $e_n^N(G_{mr} + \Delta G_{mr})$  существенно зависят от выбора базисных функций. В работе [16] показано, что если динамическая система, генерирующая базис, и система, которая моделируется, имеют по динамике близкие характеристики, то ряды (18) быстро сходятся и хорошую аппроксимацию можно получить даже при малых  $n$ . Однако при больших различиях в динамических свойствах системы и временных характеристиках базисных функций может потребоваться достаточно большое число членов ряда  $n$ , чтобы результирующая модель отражала всю существенную динамику системы.

Пусть  $\psi_n$  — линейное многообразие, образованное базисными элементами

$$\{L\psi_k, k = \overline{1, n}\}, \text{ т.е. } \psi_n = \bigcup_{k=0}^n L\psi_k. \quad (23)$$

Тогда определим величины



$$\bar{E}_n^N(G) = \inf_{r_n \in S_n} \frac{\|G - r_n\|_N}{\|G\|_N} \text{ и } \bar{e}_n^N(G) = \inf_{\xi_n \in \psi_n} \frac{\|G - \xi_n\|_N}{\|G\|_N},$$

в которых  $N$  означает одну из рассмотренных выше норм. Понятно, что  $\bar{e}_n^N(G) \geq \bar{E}_n^N(G)$ . Определим  $\varepsilon$ -размерности  $n_N(\bar{E}, \varepsilon)$  и  $n_N(\bar{e}, \varepsilon)$  по отношению к норме  $\|\cdot\|_N$  для  $G$  как

$$n_N(\bar{E}^N, \varepsilon) = \min_n \{n \geq 0: \bar{E}_n^N(G) \leq \varepsilon\},$$

$$n_N(\bar{e}^N, \varepsilon) = \min_n \{n \geq 0: \bar{e}_n^N(G) \leq \varepsilon\}.$$

При этом не исключается, что  $n_N(\cdot, \varepsilon) = \infty$ . Для достаточно малых  $\varepsilon$  может оказаться, что  $n^* < n_N(\bar{e}^N, \varepsilon)$ , т.е. построить приближенную модель с  $\varepsilon$ -погрешностью в виде разложения по базисным функциям  $\{L\psi_k, k=1, 2, \dots\}$  нельзя. Тогда существует  $\varepsilon^*$ , для которого  $n^* \approx n_N(\bar{e}^N, \varepsilon^*)$ . Это определяет модель наименьшей погрешности, которую можно построить в рамках выбранного метода аппроксимации. Из этого заключаем, что оптимальная рациональная аппроксимация (10)–(12) в общем случае должна давать лучший результат, чем оптимальная аппроксимация конечным рядом с разложением по ортонормированному базису. Однако нахождение оптимального решения рациональной аппроксимации является более сложной задачей. В данной работе предлагается оригинальный подход к нахождению оптимальной рациональной приближенной модели на основе (15).

#### 4. МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЧЕРЕЗ ИТЕРАТИВНУЮ ИДЕНТИФИКАЦИЮ

В выражении (15) импульсные переходные функции представлены в виде разложения по системе независимых функций, являющихся фундаментальными решениями системы (13). При этом неизвестны не только коэффициенты разложения  $g_{mp}^{(r1)}$  и  $g_{mp}^{(r2)}$ , но и параметры  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  собственных значений матрицы  $A_n$ . Если бы эти параметры были известны, то задача оптимальной рациональной аппроксимации была бы аналогична случаю ортонормированного базиса. Поэтому предлагается сначала оценивать  $\hat{\alpha}_p$  и  $\hat{\beta}_p$ , а затем находить оптимальные приближения  $\hat{g}_{mp}^{(r1)}$  и  $\hat{g}_{mp}^{(r2)}$ . Для этого воспользуемся подходами и методами, которые применяются при идентификации систем. Все они сводятся к тому, что на входы исследуемого объекта подаются возбуждающие воздействия и измеряется выходная реакция на них. По этим полученным в экспериментах данным затем восстанавливаются указанные неизвестные параметры. Если задана краевая задача, рассматриваемая в матфизике, и есть необходимость построить для нее упрощенную аппроксимирующую модель с конечным числом входов и выходов, то необходимые для этого данные следует получить из соответствующих вычислительных экспериментов. Дальнейшее решение задач идентификации ничем не отличается как для реального, так и виртуального объектов. В качестве входных воздействий могут быть различные сигналы, но важно, чтобы они были информативны и давали отклик всех существенных мод системы. Чтобы установить условия информативности, рассмотрим сначала воздействие

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^m (u_{rj}^{(s)} \sin \omega_j t + u_{rj}^{(c)} \cos \omega_j t), \quad (24)$$

подаваемое на каждый отдельный вход. Тогда отклик на  $m$ -м выходе будет равен

$$y_m^{(r)}(t) = \sum_{p=1}^P (d_{mp}^{(r_1)} \sin \beta_p t + d_{mp}^{(r_2)} \cos \beta_p t) e^{\alpha_p t} - \sum_{j=1}^J (d_{mj}^{(r_3)} \sin \omega_j t + d_{mj}^{(r_4)} \cos \omega_j t), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} d_{mp}^{(r_1)} &= \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} \sum_{j=1}^J \left[ u_{rj}^{(s)} (\Delta_1 - \Delta_2) + u_{rj}^{(c)} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] - \\ &\quad - \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} \sum_{j=1}^J \left[ u_{rj}^{(s)} (\Delta_3 - \Delta_4) - u_{rj}^{(c)} (\Delta_1 + \Delta_2) \right], \\ d_{mp}^{(r_2)} &= \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} \sum_{j=1}^J \left[ u_{rj}^{(s)} (\Delta_3 - \Delta_4) - u_{rj}^{(c)} (\Delta_1 + \Delta_2) \right] + \\ &\quad + \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} \sum_{j=1}^J \left[ u_{rj}^{(s)} (\Delta_1 - \Delta_2) + u_{rj}^{(c)} (\Delta_3 + \Delta_4) \right], \\ d_{mj}^{(r_3)} &= u_{rj}^{(s)} \sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] + \\ &\quad + u_{rj}^{(c)} \sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_3 - \Delta_4) + \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] \\ d_{mj}^{(r_4)} &= u_{rj}^{(s)} \sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_3 - \Delta_4) + \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) \right] - \\ &\quad - u_{rj}^{(c)} \sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] \\ \Delta_1 &= \frac{\alpha_p}{\alpha_p^2 + (\beta_p - \omega_j)^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\alpha_p}{\alpha_p^2 + (\beta_p + \omega_j)^2}, \quad \Delta_3 = \frac{\beta_p - \omega_j}{\alpha_p^2 + (\beta_p - \omega_j)^2}, \\ \Delta_4 &= \frac{\beta_p + \omega_j}{\alpha_p^2 + (\beta_p + \omega_j)^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

С помощью (24) можно формировать самые разнообразные входные воздействия. В выражении (25) выходные сигналы представлены разложением по системе независимых функций, состоящих из собственных функций (первые слагаемые), характеризующих переходный процесс, и функций, определяющих установившиеся колебания, вызванные (24). Тогда рациональную аппроксимацию можно осуществить следующим алгоритмом. Сначала найти оптимальную аппроксимацию экспериментальной функции  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$  конечным рядом (25), получить оценку параметров  $\hat{\alpha}_p$  и  $\hat{\beta}_p$  и коэффициентов разложения  $\hat{d}_{mp}^{(r_1)}$ ,  $\hat{d}_{mp}^{(r_2)}$ ,  $\hat{d}_{mj}^{(r_3)}$ ,

$\hat{d}_{mp}^{(r_4)}$  ( $p = \overline{1, P}, j = \overline{1, J}$ ). Затем из (26) найти оценку  $\hat{g}_{mp}^{(r_1)}, \hat{g}_{mp}^{(r_2)}$  и, наконец, из (16) или (17) определить модель (13) в жордановой реализации.

При оптимальной аппроксимации, однако, целесообразно выделять из (25) отдельно вынужденное движение и переходный процесс. Чтобы выделить, например, установившийся режим для устойчивых систем, достаточно в качестве исходных данных брать функцию  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$  при  $t \gg T$ , где  $T$  определяет характерное время переходного процесса. Найти оптимальную аппроксимацию этой функции при  $t \gg T$  усеченным рядом  $\sum_{j=1}^J (d_{mj}^{(r_3)} \sin \omega_j t + d_{mj}^{(r_4)} \cos \omega_j t)$ , а затем

использовать метод частотной идентификации, описанный в [18, 19] для определения аппроксимирующей модели. Можно применить другой подход: определить  $d_{mj}^{(r_3)}$  и  $d_{mj}^{(r_4)}$  оптимальной аппроксимацией конечным рядом или последова-

тельным интегрированием на скользящих интервалах  $\left[ t, t + \frac{2\pi}{\omega_j} \right]$ . Выделить та-

ким образом сигнал только одной гармоники (подробности смотри в [20]) и найти согласно [18] соответствующую ей частотную характеристику. Выделяя по очереди сигналы всех частот  $\omega_j, j = \overline{1, J}$ , определить все коэффициенты  $d_{mj}^{(r_3)}$  и  $d_{mj}^{(r_4)}$ . Зная их, найти из (26) значения

$$\sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] \text{ и}$$

$$\sum_{p=1}^P \left[ \frac{g_{mp}^{(r_1)}}{2} (\Delta_3 - \Delta_4) + \frac{g_{mp}^{(r_2)}}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) \right].$$

Такая задача разрешима, поскольку детерминант соответствующей системы линейных уравнений второго порядка равен  $(u_{ij}^{(s)})^2 + (u_{ij}^{(c)})^2$ . В результате получаем систему уравнений для определения  $g_{mp}^{(r_1)}, g_{mp}^{(r_2)}, \alpha_p$  и  $\beta_p$ . Решение этих уравнений согласно условиям реализуемости метода частотной идентификации [21] существует при  $J \geq P$ . Однако идентификация по вынужденному движению не решает проблемы выбора подходящей размерности аппроксимирующей модели. Поэтому при итеративной идентификации более перспективным представляется выделение из (25) переходного процесса. Для этого произведем многократное интегрирование  $y_{mp}^{(r)}(t)$  на скользящих интервалах  $\left[ t, t + \frac{2\pi}{\omega_j} \right]$ . В результате

получим новый сигнал  $\tilde{y}_{mp}^{(r)}(t)$ , равный

$$\tilde{y}_m^{(r)}(t) = \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} d\theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_1+\frac{2\pi}{\omega_2}} d\theta_2 \dots \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_{j-1}+\frac{2\pi}{\omega_j}} y_m^{(r)}(\theta_j) d\theta_j =$$

$$= \sum_{p=1}^P \left( \tilde{d}_{mp}^{(r_1)} \sin \beta_p t + \tilde{d}_{mp}^{(r_2)} \cos \beta_p t \right) e^{\alpha_p t}. \quad (27)$$

Выражение коэффициентов  $\tilde{d}_{mp}^{(r_1)}$  и  $\tilde{d}_{mp}^{(r_2)}$  через  $d_{mp}^{(r_1)}$ ,  $d_{mp}^{(r_2)}$  приводить здесь не будем в силу их громоздкости. Тогда, получив в экспериментах  $y_m^{(r)}(t)$  и вычислив  $\tilde{y}_m^{(r)}(t)$  из (27), можно найти  $P$ ,  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$ ,  $\tilde{d}_{mp}^{(r_1)}$ ,  $\tilde{d}_{mp}^{(r_2)}$ . Обратимся теперь к процедуре определения  $g_{mp}^{(r_1)}$  и  $g_{mp}^{(r_2)}$  из (26). Они вычисляются из (26) корректно, если детерминант

$$\left( \sum_{j=1}^J \left[ u_{ij}^{(s)} (\Delta_1 - \Delta_2) + u_{ij}^{(c)} (\Delta_3 + \Delta_4) \right] \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^J \left[ u_{ij}^{(s)} (\Delta_3 - \Delta_4) - u_{ij}^{(c)} (\Delta_1 + \Delta_2) \right] \right)^2$$

не равен нулю. Именно он определяет условие информативности входного воздействия (24) для каждой из мод системы при идентификации по переходному движению. Когда априори  $\alpha_p$ ,  $\beta_p$  неизвестны, то оценить амплитуду  $d_{mp}^{(r_1)}$  и  $d_{mp}^{(r_2)}$ , с которой возбуждаются соответствующие моды, для общего случая затруднительно. Может оказаться, что один и тот же вход для одной моды будет давать максимальное возбуждение, а для какой-то другой ее сигнал может оказаться на уровне возмущений. Поэтому предлагается использовать входные воздействия, информативность которых легко анализируется и которые способны возбудить моды в широком диапазоне собственных значений. Таким входным воздействием может быть прямоугольный импульс, приложенный на интервале  $[t_0, t_1]$  интенсивностью  $u_{r_0}$  на  $r$ -м входе. Для итеративной идентификации можно использовать свободное движение при  $t \geq t_1$ , которое имеет вид

$$y_m^{(r)}(t) = u_{r_0} \sum_{p=1}^P \left( \frac{1 + e^{2\alpha_p(t_1-t_0)} - 2e^{\alpha_p(t_1-t_0)} \cos \beta_p(t_1-t_0)}{\alpha_p^2 + \beta_p^2} \right)^{1/2} \times \left\{ g_{mp}^{(r_1)} \sin [\beta_p(t-t_1) + \theta] - g_{mp}^{(r_2)} \cos [\beta_p(t-t_1) + \theta] \right\} e^{\alpha_p(t-t_1)}, \quad (28)$$

$$\text{где } \theta = \arcsin \frac{\alpha_p}{\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}} + \arcsin \frac{e^{\alpha_p(t_1-t_0)} \sin \beta_p(t_1-t_0)}{\sqrt{1 + e^{2\alpha_p(t_1-t_0)} - 2e^{\alpha_p(t_1-t_0)} \cos \beta_p(t_1-t_0)}},$$

или переходный процесс при  $t \geq t_0$  и  $t_1 = \infty$ , принимающий выражение

$$y_m^{(r)}(t) = u_{r_0} \sum_{p=1}^P \frac{1}{\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}} \left\{ g_{mp}^{(r_1)} (e^{\alpha_p(t-t_0)} \sin [\beta_p(t-t_0) + \theta] - \sin \theta) - g_{mp}^{(r_2)} (e^{\alpha_p(t-t_0)} \cos [\beta_p(t-t_0) + \theta] - \cos \theta) \right\}, \quad (29)$$

$$\text{где } \theta = \arcsin \frac{\alpha_p}{\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}} = \arccos \frac{\beta_p}{\sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2}}.$$

Из (28) и (29) видно, что возбуждение мод спадает обратно-пропорционально  $\alpha_p$  и  $\beta_p$  и наиболее информативно при максимально допустимом  $u_{r_0}$ . Для малых  $\alpha_p$  ширину импульса  $t_1 - t_0$  целесообразно увеличивать. Короткие импульсы снижают информативность мод с малыми  $\alpha_p$ . Каждой системе на плоскости  $(\alpha_p, \beta_p)$  можно выделить область (сектор), которая выделяет информативные моды на фоне погрешности исходных данных. Наиболее широкополосным является импульсное входное воздействие в виде  $u_r(t) = u_{r_0} \delta(t - t_0)$ , которое дает отклик

$$y_m^{(r)}(t) = \sum_{p=1}^P u_{r_0} \left[ g_{mp}^{(r_1)} \cos \beta_p(t - t_0) + g_{mp}^{(r_2)} \sin \beta_p(t - t_0) \right] e^{\alpha_p(t - t_0)}. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь одну из возможных итеративных схем восстановления параметров аппроксимирующей модели. Предлагается по аналитическим выражениям выходов (28), (29) или (30) и соответствующим им экспериментальным данным находить не всю модель сразу, а восстанавливать ее по частям, определяя на каждой итерации параметры одной или нескольких мод, дающих наибольший вклад в  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$  на информативном интервале  $[t_1, T]$  или  $[t_0, T]$ . Начинать надо с тех мод, которые дают информативный сигнал (отношение сигнал/шум больше единицы) в конце интервала, т.е. вблизи  $T$ . Очевидно, что вблизи  $T$  вклад в  $y_m^{(r)}(t)$  преимущественно будут давать моды с самыми малыми по величине значениями  $\alpha_p$ , а по мере приближения к  $t_1$  или  $t_0$  будет расти число существенных мод за счет больших по величине  $\alpha_p$ . Таким образом, в правом конце интервала будем иметь небольшое число информативных мод, а по мере приближения к левому концу их число будет последовательно расти. Это обстоятельство и будет использоваться при итеративной идентификации. В результате модель можно представить в виде совокупности субмоделей, каждая из которых будет восстанавливаться по отдельности. Сначала по данным первого субинтервала вблизи  $T$ , используя (28), (29) или (30), находим все неизвестные параметры, соответствующие первой субмодели. Затем по тем же формулам вычисляем аналитический сигнал  $y_{m_1}^{(r)}(t)$ , соответствующий первой субмодели, и вычитаем его из  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$ , полученного из эксперимента. Новый сигнал  $\bar{y}_m^{(r)}(t) - y_{m_1}^{(r)}(t)$  будет использоваться для оценивания параметров второй субмодели. У этого сигнала будет свой интервал информативности  $[t_1, T_1]$  или  $[t_0, T_1]$ . Далее поступаем аналогично. Вблизи  $T_1$  выбираем субинтервал для второй субмодели, по данным которого оцениваются ее неизвестные параметры. Вычитая вычисленный по соответствующим формулам сигнал  $y_{m_2}^{(r)}(t)$  из  $\bar{y}_m^{(r)}(t) - y_{m_1}^{(r)}(t)$ , формируем новые  $T_2$  и субинтервал. После чего вычисляются параметры очередной, третьей субмодели. Такие итерации повторяются до тех пор, пока сигнал  $\bar{y}_m^{(r)}(t) - y_{m_1}^{(r)}(t) - \dots - y_{m_q}^{(r)}(t)$  не станет на уровне шумов. Тогда совокупность всех найденных субмоделей будет давать жорданову реализацию конечномерной аппроксимации, согласованную с погрешностью исходных данных. Вычислительные эксперименты показывают, что на очередной итерации вновь может возникнуть сигнал уже идентифицированной моды. Тогда следует вернуться назад на итерацию, где вычислялись параметры этой моды, скорректировать ее параметры и продолжить итерации. При прямоугольном импульсе, соответствующем (28), если имеется возможность многократного повторения экспериментов, целесообразно варьировать  $t_1$  так, чтобы уменьшать согласно (28) вклад уже идентифицированных мод, делая их сигнал более слабым или даже нулевым.

Остановимся на возможных алгоритмах оценивания параметров отдельных субмоделей. Предлагается разделить их на два последовательных этапа. На первом определять все подходящие для субмодели  $\alpha_p$  и  $\beta_p$ , а на втором стандартным МНК находить соответствующие коэффициенты разложения. Поскольку второй этап представляет хорошо известную задачу, то подробнее опишем только первый этап. В работах [22–24] рассмотрены различные подходы к оцениванию собственных чисел соответствующих субмодели, один из которых состоит в следующем. Из  $\tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t) = \bar{y}_m^{(r)}(t) - y_{m_1}^{(r)}(t) - \dots - y_{m_q}^{(r)}(t)$ , где  $q \geq 0$ ,  $\tilde{y}_{m_0}^{(r)}(t) = \bar{y}_m^{(r)}(t)$ , формируем новые сигналы вида

$$y_{m_{q1}}^{(r)}(t, \gamma) = \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t) + \frac{1}{\gamma} \frac{d\tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t)}{dt},$$

$$y_{m_{q2}}^{(r)}(t, \alpha, \beta) = \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t) + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{d\tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t)}{dt} + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{d^2\tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t)}{dt^2}, \quad (31)$$

или

$$y_{m_{q3}}^{(r)}(t, \gamma) = \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t) + \gamma \int_0^t \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(\tau) d\tau,$$

$$y_{m_{q4}}^{(r)}(t, \alpha, \beta) = \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(t) + 2\alpha \int_0^t \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(\tau) d\tau + (\alpha^2 + \beta^2) \int_0^t (t - \tau) \tilde{y}_{m_q}^{(r)}(\tau) d\tau, \quad (32)$$

в которых  $\alpha, \beta, \gamma$  — варьируемые параметры. Дифференциальные настраиваемые фильтры целесообразно использовать для гладких  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$  (погрешность низкочастотная), а интегральные — в случае зашумления сигнала  $\bar{y}_m^{(r)}(t)$  высокочастотной помехой.

Из новых сигналов составляем последовательности  $\left\{ \tilde{y}_{m_{qj}}^{(r)}(t_i, \gamma), i = \overline{1, N} \right\}$  для  $j = 1, 3$  и (или)  $\left\{ \tilde{y}_{m_{qj}}^{(r)}(t_i, \alpha, \beta), i = \overline{1, N} \right\}$  для  $j = 2, 4$ . Точки  $\{t_i, i = \overline{1, N}\}$  выбираются в пределах субинтервала идентифицируемой субмодели. Формируем ганкелевы матрицы

$$Y_{m_{qj}}^{(r)} = \begin{bmatrix} y_{m_{qj}}^{(r)}(t_1) & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_2) & \dots & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_\xi) \\ y_{m_{qj}}^{(r)}(t_2) & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_3) & \dots & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_{\xi+1}) \\ y_{m_{qj}}^{(r)}(t_\eta) & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_{\eta+1}) & \dots & y_{m_{qj}}^{(r)}(t_{\xi+\eta-1}) \end{bmatrix}, \quad \xi + \eta - 1 \leq N, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (33)$$

Выполнив сингулярное разложение матриц  $Y_{m_{qj}}^{(r)}$ , приводим их к виду

$$Y_{m_{qj}}^{(r)} = U_{m_{qj}}^{(r)} \sum_{m_{qj}}^{(r)} V_{m_{qj}}^{(r)T}. \quad (34)$$

Исследуем поведение сингулярных чисел матриц  $\sum_{m_{qj}}^{(r)}$  при варьировании  $\alpha, \beta, \gamma$ . В результате происходит перестройка сингулярных чисел субмодели таким образом, что в случае действительного собственного числа при  $\gamma = \alpha_p$  ( $\beta_p = 0$ )

одно из них уходит в ноль, а при  $\alpha = \alpha_p$  и  $\beta = \beta_p$  в ноль обращаются два сингулярных числа. Это видно из рис. 1 и 2, где приведены результаты вычислительного эксперимента для системы с действительными собственными числами  $\gamma_p = \alpha_p = 0,1; 0,2; 0,4; 0,8$  при использовании дифференциального (рис. 1) и интегрального (рис. 2) преобразований, где кривые 1, 2, 3, 4 показывают поведение четырех сингулярных чисел матрицы  $\sum m_{qj}^{(r)}$ .

Эффективность алгоритма существенно повышается, если априори для собственных чисел субмодели удастся получить хотя бы грубую оценку или интервал принадлежности. Иногда это можно сделать по виду переходного процесса на субинтервале.

**Замечание 1.** При варьировании параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  перестраиваются не только сингулярные числа идентифицируемой субмодели, но и числа, соответствующие модам со слабым откликом или возмущениям. Во многих случаях, анализируя именно их перестройку, можно точнее оценить собственные значения.

**Замечание 2.** Собственные значения субмоделей, получаемые для разных  $m$  и  $r$ , могут совпадать, а могут и отличаться. В силу плохой управляемости (полной неуправляемости) или плохой наблюдаемости (полной ненаблюдаемости) определенных мод на некоторых из  $y_m^{(r)}(t)$  они будут давать неинформативный сигнал. Полная модель составляется из всех идентифицированных мод по всем  $M \times R$  выходным сигналам.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно выделить следующие преимущества предлагаемого итеративного метода построения аппроксимирующих моделей сложных систем. Селективный подбор данных под отдельные субмодели в некотором смысле подобен процедуре ортогонализации, которая реализуется стандартным образом при идентификации на основе ортогональных базисных функций [16]. Поэтому хотя модель представляется в виде разложения по независимым, но не обязательно ортогональным функциям, тем не менее и в этом случае благодаря селективному выбору данных удастся проводить идентификацию системы по отдельным частям. Кроме того, когда идентификация проводится по выделяемому переходному процессу (4SID методы и др.), результат при наличии погрешности в исходных данных зависит от длительности интервала наблюдения и

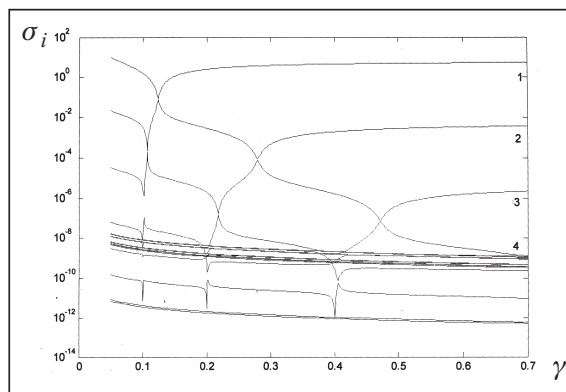


Рис. 1

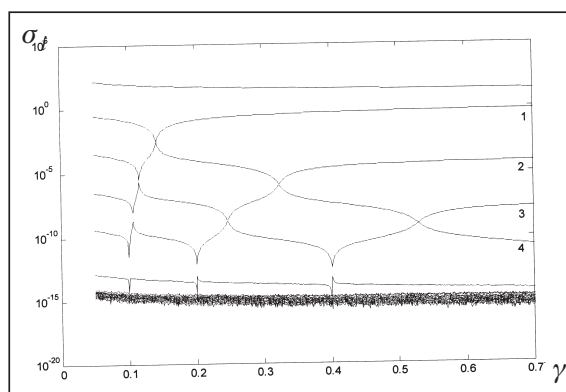


Рис. 2

шага дискретизации [25]. Возможно, это связано с тем, что разные моды имеют свой информативный интервал, и когда в алгоритмах идентификации используются данные за его пределами, которые содержат в основном погрешность, преобладающую над полезным сигналом соответствующей моды, то матрицы, составленные из этих данных, становятся плохо обусловленными. Процедура их обращения, которая характерна для большинства алгоритмов идентификации, будет давать в таких случаях большую ошибку. Поэтому приходится ограничиваться малым числом членов разложения, сохраняя только моды, для которых выбранные данные информативны почти на всем интервале. Этим и определяется оптимальная аппроксимация, которая естественно зависит от выбранных данных. Подход к построению аппроксимирующих моделей систем с распределенными параметрами, описанный в данной работе, дает аналогичные рациональные модели, которые ранее были получены в [26] для эволюционирующих систем на основе метода Галеркина.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение граничных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 49–73.
2. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Решение комбинированных обратных задач для параболических многокомпонентных распределенных систем // Там же. — № 5. — С. 48–71.
3. Бутковский А.Г. Структурный метод для систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 5.
4. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Физматгиз, Наука, 1979. — 224 с.
5. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Физматгиз, Наука, 1979. — 424 с.
6. Glover K., Curtain R.F., Partington J.R. Realisation and approximation of linear infinite — dimensional systems with error bounds // SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1988. — **26**, N.4. — P. 863–898.
7. Coifman R.R. and Rochberg R. Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in  $L^p$  // Asterisque. — 1980. — **77**. — P. 11–66.
8. Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г. Аналитические свойства пары Шмидта для Ганкелева оператора и обобщенная проблема Шура–Такачи // Мат. журн. — 1971. — **15**. — С. 31–73.
9. Makila P.M. On identification of stable systems and optimal approximation // Automatica. — 1991. — **27**, N. 4. — P. 663–676. @REFERENCE = 10. Kailath T. Linear systems. — N.J.: Prentice–Hall, 1980. — 425 p.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Физматгиз, Наука, 1967. — 470 с.
12. Chaudrasekharan K. Classical Fourier Transforms. — Berlin: Springer, 1989. — 574 p.
13. Clement P. Application of generalized Laguerre functions // Mathematics and Computers in Simulation. — 1985. — **27**. — P. 541–550.
14. Makila P.M. Approximation of stable systems by Laguerre filters // Automatica. — 1990. — **26**, N 2. — P. 333–345.
15. Bo Wahlberg Laguerre and Kautz models // Prepr. 10th IFAC Symp. on System Identification — SYSID'94. — Copenhagen (Denmark). — 1994. — **3**. — P. 1–12.
16. Heuberger P.S.C., Van den Hof M.J, and Bosgra O.H. A generalized orthonormal basis for linear dynamic systems // IEEE Trans. Automat. Contr. — 1995. — P. 451–465.



17. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Фазматгиз, Наука, 1965. — 448 с.
18. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация: многомерный объект // Междунар. конф. по проблемам управления. Избр. тр. ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. — М., 1999. — 1. — С. 15–28.
19. Орлов Ю.Ф. Идентификация по частотным параметрам // Диф. уравнения. — 2006. — 42, № 3. — С. 425–428.
20. Губарев В.Ф. Селективная идентификация субмоделей динамических систем // Тр. Междунар. конф. Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика). Ин-т математики НАН Беларуси. — 2005. — 2. — С. 41–50.
21. Александров А.Г. Метод частотных параметров // Автоматика и телемеханика. — 1989. — 50, № 12. — С. 3–15.
22. Губарев В.Ф., Тигунов П.А. Об особенностях идентификаций многомерных непрерывных систем по данным с ограниченной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1, 2. — С. 231–246.
23. Губарев В.Ф. Метод итеративной идентификации многомерных систем по неточным данным. Часть 1. Теоретические основы // Там же. — 2006. — № 5. — С. 16–31.
24. Губарев В.Ф., Тигунов П.А. Метод итеративной идентификации многомерных систем по неточным данным. Часть 2. Алгоритмы // Там же. — 2007. — № 2. — С. 5–15.
25. Ninness B.M., Goodwin G.C. Estimation of model quality // Automatica. — 1995. — 31. — P. 1771–1779.
26. Губарев В.Ф. Проблемно ориентированные идентификация и управление в системах с распределенными параметрами // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 3. — С. 26–37.

*Поступила 21.08.2007*