УДК 517.9

Р.Р. ИСМАЙЛОВ, К.Б. МАНСИМОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ КВАЗИОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

Ключевые слова: *ступенчатая задача управления, квазиособое управление, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина.*

При моделировании многих реальных процессов возникает необходимость в изучении ступенчатых задач управления. Так, например, в работах [1–11] для различных задач оптимального управления ступенчатыми системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями, получены необходимые условия оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина. В настоящей статье для одного класса задач оптимального управления многоэтапными процессами получены необходимые условия оптимальности квазиособых [12] управлений. Заметим, что управляющие параметры входят также в начальные условия [5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что управляемый процесс описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, u_i,), \quad t \in [t_{i-1}, t_i] = T_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = g_1(v_1), \quad x_i(t_{i-1}) = g_i(x_{i-1}(t_{i-1}), v_i), \quad i = 2, 3. \tag{2}$$

Здесь $t_i, i = \overline{0,3}$, заданы; $f_i(t, x_i, u_i)$, $i = \overline{1,3}$, — заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_i, u_i), $i = \overline{1,3}$, до второго порядка включительно; $g_1(v_1)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция; $g_i(x_{i-1}, v_i)$, $i = 2, 3$, — заданные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_{i-1}, v_i), $i = 2, 3$, до второго порядка включительно; $u_i(t)$, $i = \overline{1,3}$, — r-мерные измеримые и ограниченные вектор-функции управляющих воздействий; $v_i, i = \overline{1,3}$, — q-мерные управляющие параметры, удовлетворяющие ограничениям

$$u_i(t) \in U_i \subset R^r, \quad t \in T_i, \quad v_i \in v_i \in R^q, \tag{3}$$

где U_i, v_i — заданные непустые, ограниченные и выпуклые множества.

Совокупность $(u_1(t), u_2(t), u_3(t), v_1, v_2, v_3) \equiv (u(t), v)$, удовлетворяющая приведенным выше условиям, будем называть допустимым управлением, а соответствующее ему абсолютно непрерывное решение $(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \equiv \equiv x(t)$ системы (1), (2) — допустимой траекторией.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u, v) = \varphi(x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3)) \tag{4}$$

при ограничениях (1)–(3). Здесь $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Допустимое управление $(u(t), v)$, являющееся решением задачи о минимуме функционала (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1), (2) — оптимальной траекторией.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

Пусть $(u^0(t), v^0, x^0(t))$ — фиксированный допустимый процесс. Обозначим $(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t),\ \bar{v} = v^0 + \Delta v,\ \bar{x}(t) = x^0(t) + \Delta x(t))$ произвольный допустимый процесс и положим, что

$$H_i(t, x_i, u_i, \psi_i^0) = \psi_i^{0'} f_i(t, x_i, u_i),\quad i = \overline{1,3};\quad \frac{\partial H_i[t]}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial H_i(t, x_i^0(t), u_i^0(t), \psi_i^0(t))}{\partial x_i};$$

$$\frac{\partial H_i[t]}{\partial u_i} \equiv \frac{\partial H_i(t, x_i^0(t), u_i^0(t), \psi_i^0(t))}{\partial u_i};\quad \frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial^2 H_i(t, x_i^0(t), u_i^0(t), \psi_i^0(t))}{\partial x_i^2};$$

$$\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i^2} \equiv \frac{\partial^2 H_i(t, x_i^0(t), u_i^0(t), \psi_i^0(t))}{\partial u_i^2};\quad \frac{\partial f_i[t]}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f_i(t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i};$$

$$L_1(v_1, \psi_1^0(t_0)) = \psi_1^{0'}(t_0) g_1(v_1),\quad L_i(x_{i-1}^0(t_{i-1}), v_i, \psi_i^0(t_{i-1})) =$$

$$= \psi_i^{0'}(t_{i-1}) g_i(x_{i-1}^0(t_{i-1}), v_i),\quad i = 2, 3.$$

Здесь $\psi_i^0 = \psi_i^0(t)$, $i = \overline{1,3}$, — n-мерные вектор-функции, являющиеся решениями следующих систем:

$$\dot{\psi}_i^0 = -\frac{\partial H_i[t]}{\partial x_i},\quad t \in T_i,\quad i = \overline{1,3}; \tag{5}$$

$$\psi_1^0(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_1} + \frac{\partial L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial x_1};$$

$$\psi_2^0(t_2) = -\frac{\partial \varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_2} + \frac{\partial L_3(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial x_2}; \tag{6}$$

$$\psi_3^0(t_3) = -\frac{\partial \varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_3}.$$

С учетом сделанных обозначений приращение критерия качества (4) можно записать в виде

$$\Delta S(u^0, v^0) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0 v^0) =$$

$$= \Big\lfloor \varphi(\bar{x}_1(t_1), \bar{x}_2(t_2), \bar{x}_3(t_3)) - \varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3)) \Big\rfloor +$$

$$
+\sum_{i=1}^{3}\Big[\psi_i^{0\prime}(t_i)\Delta x_i(t_i)-\psi_i^{0\prime}(t_{i-1})\Delta x_i(t_{i-1})\Big]-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot\psi_i^{0\prime}(t)\Delta x_i(t)dt-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[H_i,\bar{x}_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i^0(t))-H_i(t,x_i^0(t),u_i^0(t),\psi_i^0(t))\Big]dt. \qquad (7)
$$

Отсюда при условии, что

$$
\Delta x_1(t_0)=g_1(\bar{v}_1)-g_1(v_1^0),\quad \Delta x_i(t_{i-1})=
$$

$$
=g_i(\bar{x}_{i-1}(t_{i-1}),\bar{v}_i)-g_i(x_{i-1}^0(t_{i-1}),\bar{v}_i^0),\quad i=2,3,
$$

получим

$$
\Delta S(u^0,v^0)=\big[\varphi(\bar{x}_1(t_1),\ \bar{x}_2(t_2),\ \bar{x}_3(t_3))-\varphi(x_1^0(t_1),\ x_2^0(t_2),\ x_3^0(t_3))\big]+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{3}\psi_i^{0\prime}(t_i)\Delta x_i(t_i)-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\dot\psi_i^0(t)\Delta x_i(t)dt-\Big[L_1(\bar{v}_1,\psi_1^0(t_0))-L_1(v_1^0,\psi_1^0(t_0))\Big]-
$$

$$
-\big[L_2(\bar{x}_1(t_1),\bar{v}_2,\psi_2^0(t_1))-L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))\big]-
$$

$$
-\big[L_2(\bar{x}_2(t_2),\bar{v}_3,\psi_3^0(t_2))-L_2(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))\big]-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Big[H_i(t,\bar{x}_i(t),\bar{u}_i(t),\psi_i^0(t))-H_i(t,x_i^0(t),u_i^0(t),\psi_i^0(t))\Big]dt.
$$

Используя формулу Тейлора и учитывая, что $\psi_i^0(t)$, $i=\overline{1,3}$, являются решениями системы (5), (6), из (7) имеем

$$
\Delta S(u^0,v^0)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\Delta x_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_i\partial x_j}\Delta x_j(t_j)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial H_i'[t]}{\partial u_i}\Delta u_i(t)dt-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Bigg[\Delta x_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2}\Delta x_i(t)+
$$

$$
+2\,\Delta u_i'(t)\frac{\partial H_i[t]}{\partial u_i\partial x_i}\Delta x_i(t)+\Delta u_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i^2}\Delta u_i(t)\Bigg]dt-\frac{\partial L_1'(v_1^0,\psi_1^0(t_0))}{\partial v_i}\Delta v_1-
$$

$$
-\frac{1}{2}\Delta v_1'\frac{\partial^2 L_1(v_1^0,\psi_1^0(t_0))}{\partial v_1^2}\Delta v_1-\frac{\partial L_2'(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial v_2}\Delta v_2-
$$

$$
-\frac{1}{2}\Bigg[\Delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t_1)+
$$

$$
+2\,\Delta v_2'\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial v_2 x_1}\Delta x_1(t_1)+
$$

$$+\Delta v_2' \frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2^2}\Delta v_2\Bigg] - \frac{\partial L_3'(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial v_3}\Delta v_3 -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\Delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_3^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}\Delta x_2(t_2) + \right.$$

$$+\Delta v_3' \frac{\partial^2 L_3(x_3^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial v_3 \partial x_2}\Delta x_2(t_2) +$$

$$\left. +\Delta v_3' \frac{\partial^2 L_3(x_3^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial v_3^2}\Delta v_3\right] + \eta_1(\Delta u, \Delta v), \qquad (8)$$

где по определению

$$\eta_1(\Delta u, \Delta v) = -\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i} o_i(||\Delta x_i(t)||^2)\,dt + o_4\left(\left[\sum_{i=1}^{3}||\Delta x_i(t_i)||\right]^2\right) -$$

$$-o_5(||\Delta v_1||^2) - o_6([||\Delta x_1(t_1)|| + ||\Delta v_2||]^2) - o_7([||\Delta x_2(t_2)|| + ||\Delta v_3||]^2).$$

Определим специальное приращение управления $(u^0(t), v^0)$ по формуле

$$\Delta u_i(t, \varepsilon) = \varepsilon(u_i(t) - u_i^0(t)),\ \Delta v_i(\varepsilon) = \varepsilon(v_i - v_i^0),\ \ i = \overline{1,3}, \qquad (9)$$

где $u_i(t) \in U_i$, $t \in T_i$, $i = \overline{1,3}$, — произвольные измеримые и ограниченные вектор-функции, $v_i \in v_i$, $i = \overline{1,3}$, — произвольные постоянные векторы.

Пару $(\Delta u(t_i, \varepsilon) = (\Delta u_1(t_i, \varepsilon), \Delta u_2(t_i, \varepsilon), \Delta u_3(t_i, \varepsilon)), \Delta v(\varepsilon) = (\Delta v_1(\varepsilon), \Delta v_2(\varepsilon), \Delta v_3(\varepsilon)))$ назовем специальной вариацией управления $(u^0(t), v^0)$.

Следуя схемам из [12, 13], можно показать, что

$$\Delta S_\varepsilon(u^0, v^0) = S(u^0(t) + \Delta u(t:\varepsilon), v^0 + \Delta v(\varepsilon)) - S(u^0(t), v^0) =$$

$$= -\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial H_i'[t]}{\partial u_i}(u_i(t) - u_i^0(t_i))dt - \frac{\partial L_1'(v_1^0, \psi_1^0(t_0))}{\partial v_1}(v_1 - v_i^0) - \right.$$

$$\left. -\frac{\partial L_2'(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2}(v_2 - v_2^0) - \frac{\partial L_3(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial v_3}(v_3 - v_3^0)\right] +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{3} l_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_i \partial x_j} l_j(t_j) - \sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left[l_i(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2} l_i(t) + \right.\right.$$

$$\left. + 2(u_i(t) - u_i^0(t))\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i \partial x_i} l_i(t) + (u_i(t) - u_i^0(t))\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i^2}(u_i(t) - u_i^0(t))\right]dt -$$

$$-(v_1-v_1^0)'\frac{\partial^2 L_1(v_1^0,\psi_1^0(t_0))}{\partial v_1^2}(v_1-v_1^0)-l_1(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}l_1(t_1)-$$

$$-2(v_2-v_2^0)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial v_2\partial x_1}l_1(t_1)- \tag{10}$$

$$-(v_2-v'_2)'\frac{\partial L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial v_2^2}(v_2-v_2^0)-$$

$$-l'_2(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)-2(v_3-v_3^0)'\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial v_3\partial x_2}l_2(t_2)-$$

$$\left.-(v_3-v_3^0)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial v_3^2}(v_3-v_3^0)\right]+0(\varepsilon^2).$$

Здесь $l_i(t)$, $i=\overline{1,3}$, — вариации траекторий, являющихся решениями уравнений в вариациях вида

$$\dot{l}_i=\frac{\partial f_i[t]}{\partial x_i}l_i+\frac{\partial f_i[t]}{\partial u_i}(u_i(t)-u_i^0(t)),\ i=\overline{1,3},\ l_1(t_0)=\frac{\partial g_1(v_1^0)}{\partial v_1}(v_1-v_1^0), \tag{11}$$

$$l_2(t_1)=\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),v_2^0)}{\partial x_1}l_1(t_1)+\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),v_2^0)}{\partial v_2}(v_2-v_2^0), \tag{12}$$

$$l_3(t_2)=\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),v_3^0)}{\partial x_2}l_2(t_2)+\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),\ v_3^0)}{\partial v_3}(v_3-v_3^0). \tag{13}$$

3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В силу выпуклости областей управления U_i, v_i, $i=\overline{1,3}$, из разложения (10) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{\partial H'_i[t]}{\partial u_i}(u_i(t)-u_i^0(t))dt\le 0 \text{ для всех } u_i(t)\in U_i,\ t\in T_i,\ i=\overline{1,3}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial L'_1(v_1^0,\psi_1^0(t_0))}{\partial v_1}(v_1-v_1^0)\le 0 \text{ для всех } v_1\in v_1, \tag{15}$$

$$\frac{\partial L'_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial v_2}(v_2-v_2^0)\le 0 \text{ для всех } v_2\in v_2, \tag{16}$$

$$\frac{\partial L'_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial v_3}(v_3-v_3^0)\le 0 \text{ для всех } v_3\in v_3. \tag{17}$$

Применяя лемму 2 из [14, с. 8], можно показать, что необходимое условие оптимальности (14) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial H_i'[\theta]}{\partial u_i}(v_i - u_i^0(\theta)) \le 0, \quad i = \overline{1,3},$$

для всех $u_i \in U_i$, $\theta \in [t_{i-1}, t_i)$, $i = \overline{1,3}$, где $\theta \in [t_{i-1}, t_i)$ — произвольная точка Лебега (правильная точка [15]) управления $u_i(t)$, $t \in T_i$.

Цель настоящей статьи — исследование случая вырождения необходимых условий оптимальности (14)–(17).

Следуя [12, 13], введем определение.

Определение. Допустимое управление $(u^0(t), v^0)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(4), если вдоль процесса $(u^0(t), v^0, x^0(t))$ выполняются следующие соотнощения:

$$\frac{\partial H_i'[\theta]}{\partial u_i}(u_i - u_i(\theta)) = 0 \text{ для всех } u_i \in U_i,\ \theta \in [t_{i-1}, t_i),\ i = \overline{1,3};$$

$$\frac{\partial L_1'(v_1^0, \psi_1^0(t_0))}{\partial v_1}(v_1 - v_1^0) = 0 \text{ для всех } v_1 \in v_1;$$

$$\frac{\partial L_2'(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2}(v_2 - v_2^0) = 0 \text{ для всех } v_2 \in v_2; \tag{18}$$

$$\frac{\partial L_3'(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial v_3}(v_3 - v_3^0) = 0 \text{ для всех } v_3 \in v_3.$$

Как видим, при выполнении этих соотношений, т.е. в квазиособом случае, утверждение теоремы 1 теряет свое содержательное значение. Из разложения (10) в силу (18) следует, что вдоль квазиособого оптимального управления $(u^0(t), v^0)$ для всех $(u(t), v)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{3} l_i'(t_i)\frac{\partial^2 \varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_i \partial x_j} l_j(t_j) - \sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Bigg[\ l_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2} l_i(t) +$$

$$+2(u_i(t) - u_i^0(t))\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i \partial x_i} l_i(t) + (u_i(t) - u_i^0(t))'\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial u_i^2}(u_i(t) - u_i^0(t))\Bigg]dt -$$

$$-(v_1 - v_1^0)'\frac{\partial^2 L_1(v_1^0, \psi_1^0(t_0))}{\partial v_1^2}(v_1 - v_1^0) - l_1'(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2} l_1(t_1) -$$

$$-2(v_2 - v_2^0)'\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2 \partial x_1} l_1(t_1) -$$

$$-(v_2 - v_2^0)'\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2^2}(v_2 - v_2^0) - \tag{19}$$

$$-l_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)-2(v_3-v_3^0)'\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial v_3\partial x_2}l_2(t_2)-$$

$$-(v_3-v_3^0)'\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial v_3^2}(v_3-v_3^0)\geq 0.$$

Неравенство (19) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Но этот результат служит источником получения различных необходимых условий оптимальности квазиособых управлений. С этой целью понадобятся представления решений задач (11)–(13).

На основе аналога формулы Коши об интегральном представлении решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений (см., например, [16,17]) получим

$$l_1(t)=F_1(t,t_0)\frac{\partial g_1(v_1^0)}{\partial v_1}(v_1-v_1^0)+\int_{t_0}^{t}F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1[\tau]}{\partial u_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))d\tau, \tag{20}$$

$$l_2(t)=F_2(t,t_1)\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),v_2^0)}{\partial x_1}l_1(t_1)+F_2(t,t_1)\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),v_2^0)}{\partial v_2}(v_2-v_2^0)+$$

$$+\int_{t_1}^{t}F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2[\tau]}{\partial u_2}(u_2(\tau)-u_2^0(\tau))d\tau, \tag{21}$$

$$l_3(t)=F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),v_3^0)}{\partial x_2}l_2(t_2)+F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),v_3^0)}{\partial v_3}(v_3-v_3^0)+$$

$$+\int_{t_2}^{t}F_3(t,\tau)\frac{\partial f_3[\tau]}{\partial u_3}(u_3(\tau)-u_3^0(\tau))d\tau. \tag{22}$$

Здесь $F_i(t,\tau)$, $i=\overline{1,3}$, — $(n\times n)$-матричные функции, являющиеся решениями уравнений $\dfrac{\partial F_i(t,\tau)}{\partial\tau}=-F_i(t,\tau)\dfrac{\partial f[\tau]}{\partial x_i}$, $F_i(t,t)=E$ (E — $(n\times n)$-единичная матрица).

Рассмотрим возможные шесть случаев.

Случай 1. Пусть $u_i(t)=u_i^0(t)$, $i=2,3$, $t\in T_i; v_i=v_i^0, i=\overline{1,3}$. Тогда неравенство (19) примет следующий вид:

$$\sum_{i,j=1}^{3}l_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{dx_i\partial x_j}l_j(t_j)-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}l_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2}l_i(t)dt-$$

$$-2\int_{t_0}^{t_1}(u(t)-u^0(t))\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial u_1\partial x_1}l_1(t)dt-\int_{t_0}^{t_1}(u_1(t)-u_1^0(t))\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial u_1^2}(u_1(t)-u_1^0(t))dt- \tag{23}$$

$$-l_1'(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}l_1(t_1)-l_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)\geq 0.$$

Из представлений (20)–(22) следует, что

$$l_1(t)=\int_{t_0}^{t} R_1(t,\tau)\frac{\partial f_1[\tau]}{\partial u_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))d\tau, \tag{24}$$

$$l_2(t)=\int_{t_0}^{t_1} R_2(t,\tau)\frac{\partial f_1[\tau]}{\partial u_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))d\tau, \tag{25}$$

$$l_3(t)=\int_{t_0}^{t_1} R_3(t,\tau)\frac{\partial f_1[\tau]}{\partial u_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))d\tau. \tag{26}$$

Здесь по определению

$$R_1(t,\tau)=F_1(t,\tau),\ R_2(t,\tau)=F_2(t,t_1)\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),v_2^0)}{\partial x_1}F_1(t_1,\tau),$$

$$R_3(t,\tau)=F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),v_3^0)}{\partial x_2}R_2(t_2,\tau).$$

Пусть по определению

$$A_{ij}(\tau,s)=R'_i(t_i,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_i\partial x_j}R_j(t_j,s).$$

С помощью представлений (22)–(24) получаем

$$\sum_{i,j=1}^{3} l_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_i\partial x_j}l_j(t_j)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))\frac{\partial f'_1[\tau]}{\partial u_1}A_{ij}(\tau,s)\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau,$$

$$l'_1(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}l_1(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))'\frac{\partial f'_1[\tau]}{\partial u_1}R_1(t_1,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),v_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}R_1(t_1,s)\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau,$$

$$l'_2(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))'\frac{\partial f'_1[\tau]}{\partial u_1}R_2(t_2,\tau)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}R_2(t_2,s)\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau.$$

Далее на основании формулы Дирихле [18] имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} (u_1(t)-u_1^0(t))' \frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial x_1} l_1(t)dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))' \frac{\partial^2 H_1[\tau]}{\partial u_1 \partial x_1} R_1(\tau,t)d\tau\right]\frac{\partial f_1[t]}{\partial u_1}(u_1(t)-u_1^0(t))dt.$$

Наконец, по схеме из [13, 18] доказывается справедливость тождеств

$$\int_{t_0}^{t_1} l_1'(t)\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial x_1^2} l_1(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))' \frac{\partial f_1'[\tau]}{\partial u_1}\times$$

$$\times\left[\int_{\max(\tau,s)}^{t_1} R_1'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial x_1^2} R_1(t,s)dt\right]\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} l_2'(t)\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial x_2^2} l_2(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))' \frac{\partial f_1'[\tau]}{\partial u_1}\times$$

$$\times\left[\int_{t_1}^{t_2} R_2'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial x_2^2} R_2(t,s)dt\right]\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau,$$

$$\int_{t_2}^{t_3} l_3'(t)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2} l_3(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))\frac{\partial f_1'[\tau]}{\partial u_1}\times$$

$$\times\left[\int_{t_2}^{t_3} R_3'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2} R_3(t,s)dt\right]\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau.$$

С помощью этих тождеств неравенство (23) после определенных преобразований можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))\frac{\partial f_1'[\tau]}{\partial u_1}K_1(\tau,s)\frac{\partial f_1[s]}{\partial u_1}(u_1(s)-u_1^0(s))dsd\tau +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(u_1(t)-u_1^0(t))'\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial u_1^2}(u_1(t)-u_1^0(t))dt + \tag{27}$$

$$+2\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}(u_1(\tau)-u_1^0(\tau))'\frac{\partial^2 H_1[\tau]}{\partial u_1\partial x_1}R_1(\tau,t)d\tau\right]\frac{\partial f_1[t]}{\partial u_1}(u_1(t)-u_1^0(t))dt \le 0$$

для всех $u_1(t)\in U_1$, $t\in T_1$.

Здесь по определению

$$K_1(\tau,s)=-\sum_{i,\,j=1}^{3} A_{ij}(\tau,s)+\int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1} R'_1(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1[t]}{\partial x_1^2}R_1(t,s)dt+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t_2} R'_2(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial x_2^2}R_2(t,s)dt+\int\limits_{t_2}^{t_3} R'_3(t,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2}R_3(t,s)dt+$$

$$+R'_1(t_1,\tau)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),\upsilon_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}R_1(t_1,s)+$$

$$+R'_2(t_2,\tau)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}R_2(t_2,s).$$

Случай 2. Если предполагать, что $u_1(t)=u_1^0(t)$, $t\in T_1$, $u_3(t)=u_3^0(t)$, $t\in T_3$, $\upsilon_i=\upsilon_i^0$, $i=\overline{1,3}$, то неравенство (19) примет вид

$$\begin{gathered}\sum_{i,\,j=2}^{3} l'_i(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_i\partial x_j}l_j(t_j)-\\
-\sum_{i=2}^{3}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} l'_i(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2}l_i(t)dt-2\int\limits_{t_1}^{t_2}(u_2(t)-u_2^0)'\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial u_2\partial x_2}l_2(t)dt-\\
-\int\limits_{t_1}^{t_2}(u_2(t)-u_2^0(t))'\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial u_2^2}(u_2(t)-u_2^0(t))dt-\\
-l'_2(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)\ge 0.\end{gathered}\tag{28}$$

Из представлений (20)–(22) следует, что

$$l_1(t)\equiv 0,\ t\in T_1,\tag{29}$$

$$l_2(t)=\int\limits_{t_1}^{t} F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2[\tau]}{\partial u_2}(u_2(\tau)-u_2^0(\tau))d\tau,\ t\in T_2,\tag{30}$$

$$l_3(t)=\int\limits_{t_1}^{t_2} R_4(t,\tau)\frac{\partial f_2[\tau]}{\partial u_2}(u_2(\tau)-u_2^0(\tau))d\tau,\ t\in T_3,\tag{31}$$

где по определению

$$R_4(t,\tau)=F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0)}{\partial x_2}F_2(t_2,\tau).$$

Используя формулы (29)–(31), неравенство (28) аналогично случаю 1 преобразуется к виду

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}(u_2(\tau)-u_2^0(\tau))'\frac{\partial f_2'[\tau]}{\partial u_2}K_2(\tau,s)\frac{\partial f_2[s]}{\partial u_2}(u_2(s)-u_2^0(s))dsd\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}(u_2(t)-u_2^0(t))'\frac{\partial H_2[t]}{\partial u_2^2}(u_2(t)-u_2^0(t))dt+ \tag{32}$$

$$+2\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t}^{t_2}(u_2(\tau)-u_2^0(\tau))'\frac{\partial^2 H_2[\tau]}{\partial u_2\partial x_2}R_2(\tau,t)d\tau\right]\frac{\partial f_2[t]}{\partial u_2}(u_2(t)-u_2^0(t))dt\le 0$$

для всех $u_2(t)\in U_2$, $t\in T_2$.

Здесь по определению

$$K_2(\tau,s)=-F_2'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_2^2}F_2(t_2,s)-$$

$$-F_2'(t_2,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_2\partial x_3}R_4(t_3,s)-$$

$$-R_4'(t_3,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_3\partial x_2}F_2(t_2,s)-$$

$$-R_4'(t_3,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_3^2}F_2(t_3,s)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_2}F_2'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2[t]}{\partial x_2^2}F_2(t,s)dt+\int_{t_2}^{t_3}R_4'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2}R_4(t,s)dt+$$

$$+F_2'(t_2,\tau)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0,\psi_3^1(t_2))}{\partial x_2^2}F_2(t_2,s).$$

Случай 3.Допустим, что $u_i(t)=u_i^0(t), t\in T_i, i=1,2;$ $\upsilon_i=\upsilon_i^0$, $i=\overline{1,3}$. Тогда неравенство (19) принимает вид

$$l_3'(t_3)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{dx_3^2}l_3(t_3)-\int_{t_2}^{t_3}\left[l_3'(t)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2}l_3(t)+\right. \tag{33}$$

$$\left.+2(u_3(t)-u_3^0(t))'\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial u_3\partial x_3}l_3(t)+(u_3(t)-u_3^0(t))'\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial u_3^2}(u_3(t)-u_3^0(t))\right]dt\ge 0.$$

Из представлений (20)–(22) следует, что

$$l_3(t)=\int_{t_2}^{t}F_3(t,\tau)\frac{\partial f_3[\tau]}{\partial u_3}(u_3(\tau)-u_3^0(\tau))d\tau\ge 0,\quad t\in T_3, \tag{34}$$

$$l_i(t)\equiv 0,\ t\in T_i,\ i=1,2.$$

Положим

$$K_3(\tau,s)=-F_3'(t_3,\tau)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{dx_3^2}F_3(t_3,s)+$$

$$+\int_{\max(\tau,s)}^{t_3}F_3'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3{}^2}F_3(t,s)dt.$$

Используя формулу (34), неравенство (33) преобразуется к виду

$$\int_{t_2}^{t_3}\int_{t_2}^{t_3}(u_3(\tau)-u_3^0(\tau))'\frac{\partial f_3'[\tau]}{\partial u_3}K_3(\tau,s)\frac{\partial f_3[s]}{\partial u_3}(u_3(s)-u_3^0(s))dsd\tau+$$

$$+\int_{t_2}^{t_3}(u_3(t)-u_3^0(t))'\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial u_3^2}(u_3(t)-u_3^0(t))dt+ \tag{35}$$

$$+2\int_{t_2}^{t_3}\left[\int_{t}^{t_3}(u_3(\tau)-u_3^0(\tau))'\frac{\partial^2 H_3[\tau]}{\partial u_3\partial x_3}F_3(\tau,t)d\tau\right]\frac{\partial f_3[t]}{\partial u_3}(u_3(t)-u_3^0(t))dt\le 0$$

для всех $u_3(t)\in U_3$, $t\in T_3$.

Случай 4. Пусть $u_i(t)\equiv u_i^0(t)$, $t\in T_i$, $i=\overline{1,3}$; $\upsilon_i=\upsilon_i^0$, $i=2,3$. Тогда с учетом

$$N_1(t)=F_1(t,t_0)\frac{\partial g_1(\upsilon_1^0)}{\partial\upsilon_1},$$

$$N_2(t)=F_2(t,t_1)\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1),\upsilon_2^0)}{\partial x_1}N_1(t_1),$$

$$N_3(t)=F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0)}{\partial x_2}N_2(t_2)$$

из представлений (20)–(22) получим

$$l_i(t)=N_i(t)(\upsilon_i-\upsilon_i^0),\quad t\in T_i;\ i=\overline{1,3}. \tag{36}$$

При этом неравенство (19) примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{3}l'_i(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_i\partial x_j}l_j(t_j)-\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i}l_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2}l_i(t)dt-$$

$$-(\upsilon_1-\upsilon_1^0)'\frac{\partial^2 L_1(\upsilon_1^0,\psi_1^0(t_0))}{\partial\upsilon_1^2}(\upsilon_1-\upsilon_1^0)-l_1'(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1),\upsilon_2^0,\psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2}l_1(t_1)-$$

$$-l_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),\upsilon_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}l_2(t_2)\ge 0 \tag{37}$$

для всех $\upsilon_1\in\upsilon_1$.

Положим

$$K_4 = -\sum_{i,\,j=1}^{3} N_i(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_i \partial x_j} N_j(t_j) +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_1} N_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2} N_i(t)dt + \frac{\partial^2 L_1(v_1^0, \psi_1^0(t_0))}{\partial v_1^2} +$$

$$+N_1'(t_1)\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial x_1^2} N_1(t_1) + N_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2} N_2(t_2).$$

Тогда неравенство (37) преобразуется к виду

$$(v_1 - v_1^0)' K_4 (v_1 - v_1^0) \le 0 \text{ для всех } v_1 \in v_1. \tag{38}$$

Случай 5. Допустим, что $u_i(t) \equiv u_i^0(t)$, $t \in T_i$, $i = \overline{1,3}$; $v_1 = v_1^0$, $v_3 = v_3^0$. Тогда из представлений (20)–(22) после несложных преобразований получим, что

$$l_1(t) \equiv 0,\, t \in T_1;\ l_2(t) = M_1(t)(v_2 - v_2^0),\, t \in T_2;$$

$$l_3(t) = M_2(t)(v_3 - v_3^0),\, t \in T_3. \tag{39}$$

Здесь по определению

$$M_1(t) = F_2'(t, t_1)\frac{\partial g_2(x_1^0(t_1), v_2^0)}{\partial v_2},\ M_2(t) = F_3'(t, t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2), v_3^0)}{\partial x_2} M_1(t_2).$$

При этом неравенство (19) примет вид

$$\sum_{i,\,j=2}^{3} l_i'(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_i \partial x_j} l_j(t_j) - \sum_{i=2}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i} l_i'(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2} l_i(t)dt -$$

$$- l_2'(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2), v_3^0, \psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2} l_2(t_2) -$$

$$-(v_1 - v_2^0)'\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_2))}{\partial v_2^2}(v_2 - v_2^0) \ge 0. \tag{40}$$

Используя представления (39), из неравенства (40) получаем

$$(v_2 - v_2^0)' K_5 (v_2 - v_2^0) \le 0 \tag{41}$$

для всех $v_2 \in v_3$. Здесь по определению

$$K_5 = -\sum_{i,\,j=2}^{3} M'_{i-1}(t_i)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1), x_2^0(t_2), x_3^0(t_3))}{\partial x_i \partial x_j} M_{j-1}(t_j) +$$

$$+\frac{\partial^2 L_2(x_1^0(t_1), v_2^0, \psi_2^0(t_1))}{\partial v_2^2} +$$

$$+\sum_{i=2}^{3}\int_{t_{i-1}}^{t_i} M'_{i-1}(t)\frac{\partial^2 H_i[t]}{\partial x_i^2}M_{i-1}(t)dt+M'_1(t_2)\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{\partial x_2^2}M_1(t_2).$$

Случай 6.Предположим что $u_i(t)=u_i^0(t), t\in T_i, i=\overline{1,3}$; $v_i=v_i^0, i=1,2$. Тогда неравенство (19) примет вид

$$-l'_3(t_3)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_3^2}l_3(t_3)+\int_{t_2}^{t_3} l'_3(t)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2}l_3(t)dt+$$

$$+(v_3-v_3^0)'\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{dv_3^2}(v_3-v_3^0)\le 0. \tag{42}$$

При этом из (20)–(22) непосредственно следует, что

$$l_1(t)=0, t\in T_1;\ l_2(t)=0, t\in T_2;\ l_3(t)=M_3(t)(v_3-v_3^0), t\in T_3, \tag{43}$$

где

$$M_3(t)=F_3(t,t_2)\frac{\partial g_3(x_2^0(t_2),v_3^0)}{\partial v_3}.$$

Полагая

$$K_6=-M'_3(t_3)\frac{\partial^2\varphi(x_1^0(t_1),x_2^0(t_2),x_3^0(t_3))}{\partial x_3^2}M_3(t_3)+$$

$$+\int_{t_2}^{t_3} M'_3(t)\frac{\partial^2 H_3[t]}{\partial x_3^2}M_3(t)dt+\frac{\partial^2 L_3(x_2^0(t_2),v_3^0,\psi_3^0(t_2))}{dv_3^2},$$

с учетом (43) из (42) получим

$$(v_3-v_3^0)'K_6(v_3-v_3^0)\le 0 \text{ для всех } v_3\in v_3. \tag{44}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Для оптимальности квазиособого управления $(v^0(t), v^0)$ в задаче (1)–(4) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (27), (32), (35), (38), (41), (44).

Эти соотношения являются необходимыми условиями оптимальности второго порядка, откуда, определяя вариации управления, различными способами можно получить более простые условия оптимальности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается ступенчатая задача оптимального управления обыкновенными динамическими системами.

Процесс управляется управляющими функциями и параметрами. При этом управляющие функции входят в правые части уравнений системы, а управляющие параметры — в начальные условия.

Доказано необходимое условие оптимальности первого порядка, являющееся аналогом линеаризованного условия максимума. Рассмотрен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Установлено необходимое условие оптимальности квазиособых управлений, позволяющее в некоторых случаях выявить неоптимальность управлений, удовлетворяющих условию максимума Понтрягина без вырождения [12, 13].

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. — Новосибирск: Наука, 1987. — 226 с.
2. Батурин В.А., Дыхта В.А. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. — Новосибирск: Наука, 1990. — 190 с.
3. Агафонова И.А., Гулин Л.Л., Расина И.В. Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантипирина. — Иркутск, 1978. — 19 с. — Деп. в ВИНИТИ АН СССР 10.11.78, № 3457.
4. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // ДАН СССР. — 1967. — **176**, № 4. — С. 754–765.
5. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 104–111.
6. Мансимов К.Б., Магеррамов Ш.Ф. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной дискретной системе с переменной структурой // Бильги. Сер. Физика, математика, наука о Земле. — 2001. — № 1. — С. 61–64.
7. Никольский М.С. Вариационные задачи с переменной структурой // Вест. МГУ. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 36–41.
8. Харатишвили Г.Л. Полуавтомические оптимальные системы // В. сб. Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. — Тбилиси: Изд.-во ТГУ, 1985. — С. 3–47.
9. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем управления // Автоматика и телемеханика. — 1981 — № 8. — С. 5–9.
10. Юсубов Ш.Ш. Необходимые условия оптимальности для некоторых систем с импульсным воздействием / БГУ. — Препр. — Баку, 2000. — 31 с.
11. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода //Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 6. — С. 32–36.
12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
13. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. — Баку: Изд-во ЕЛМ, 1999. — 175 с.
14. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982. — 110 с.
15. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 256 с.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. — Минск: Изд-во БГУ, 1973. — 248 с.
17. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979. — 429 с.
18. Мансимов К.Б. Многоточечные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений // Автоматика и телемеханика. — 1982 — № 10. — С. 53–58.

Поступила 24.01.2006