УДК 519.21:517.977

В.В. СКОПЕЦКИЙ, Л.В. ВОЛОХ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВЫХ МАССИВОВ

Ключевые слова: *фильтрационная консолидация, коэффициенты консолидации, избыточный напор, консолидация массива.*

Известно, что в классической теории нестационарной фильтрации в пористой среде главным законом фильтрации является закон Дарси, согласно которому допускается, что состояние равновесия между градиентом давления и скоростью достигается мгновенно. Но на самом деле равновесие достигается с некоторым запаздыванием, и чтобы учесть это, в соответствующих соотношениях скорость v и давление p меняют на $v+\lambda_v \dfrac{dv}{dt}$ и $p+\lambda_p \dfrac{dp}{dt}$ соответственно, где $\lambda_v > 0$ — релаксация скорости, $\lambda_p > 0$ — релаксация давления. В этом случае после мгновенного снятия перепада давления движение не прекращается мгновенно, а затухает в движении как $\exp(-t/\lambda_v)$. При мгновенном прекращении движения градиент давления затухает во времени как $\exp(-t/\lambda_p)$. Нарушения равновесия между скоростью фильтрации и градиентом давления объясняются релаксационными эффектами, обусловленными инерцией жидкости и значением скорости от градиента давления, либо сложностью структуры и свойствами случайно-неоднородной среды.

Пусть грунтовый массив прямоугольной формы $\Omega = \{(x, y):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le a\}$ содержит случайно расположенные включения сферической формы, причем фильтрационные свойства материала включений (области Ω_i с границами Γ_i $(i=\overline{1,n})$) существенно отличаются от фильтрационных характеристик основной матрицы пласта, в которой расположено включение (область Ω_0 с границей Γ_0), в частности, коэффициенты консолидации c_{v_i} для областей Ω_i существенно отличается от коэффициентов консолидации c_{v_0} области Ω_0.

Рассмотрим задачу, аналогичную в [1].

Уравнение консолидации массива с учетом свойства ползучести грунтового скелета запишется в виде:

для основной матрицы пласта —

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = c_{v_0}\left(\Delta H + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta H)\right); \tag{1}$$

для включений —

$$\tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} = c_{v_1}\left(\Delta H + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta H)\right),\ i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Здесь c_{v_i} — случайный коэффициент консолидации, H — избыточный напор, τ_1, τ_2 — действительные параметры, $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Условия сопряженности на границе включения и основной матрицы пласта мажно записать в виде

$$H|_{\vec{r}\in\Gamma_i-0} = H|_{\vec{r}\in\Gamma_i+0} \tag{3}$$

$$k_i \left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{\vec{r}\,\in\Gamma_i-0} = k_{i+1} \left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{\vec{r}\,\in\Gamma_i+0},$$

где n — нормаль к Γ_i.

Одна из возможных реализаций структуры тела, в котором мигрирует примесь, показана на рис. 1.

Запишем безразмерные переменные и параметры

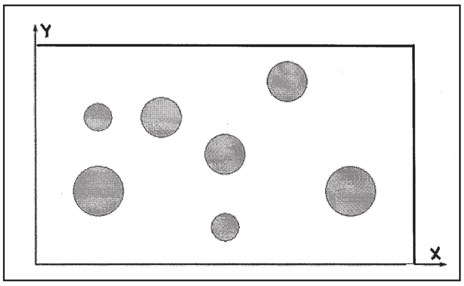

Рис. 1

$$x' = \frac{x}{l},\ y' = \frac{y}{l},\ t' = \frac{t}{T},\ H' = \frac{H}{H_0},$$

в виде

$$\tau_1' = \frac{\tau}{T},\ c_\nu' = \frac{c_\nu T}{l^2},\ a' = \frac{a}{l} \tag{4}$$

$$(i = 1, 2,\ H_0,\ T = \text{const}).$$

Переходя в (1),(2) к безразмерным переменным (4) и опуская в дальнейшем знак «штрих», имеем тот же вид уравнений, что и в (1), (2).

Запишем соответствующие граничные условия:

$$H(0, y, t) = 0,\ H(1, y, t) = 0, \tag{5}$$

$$H(x, 0, t) = 0,\ H_y'(x, a, t) = 0, \tag{6}$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \tag{7}$$

$$H_t'(x, y, 0) = 0. \tag{8}$$

Необходимо найти поле избыточных напоров H в массиве со случайно расположенными включениями при условии, что $c_\nu = c_\nu(\vec{r})$ — случайная функция.

Приведем задачу консолидации массива (1),(2),(5)–(8) к задаче для тела в целом. Для этого воспользуемся основными выкладками, изложенными в [2]. Поскольку функция H в области тела имеет разрывы 1-го рода, воспользуемся представлением

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_i [f]_{x_i}\, \delta(x - x_i),$$

где $\{f'(x)\}$ — кусочно-непрерывная функция, $[f]_{x_i}$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_i, δ — дельта-функция Дирака.

Для H имеем

$$H' = \{H'\} + \sum_i [H]_\Gamma\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma), \tag{9}$$

$\vec{r} = (x, y)$ — радиус-вектор, $\vec{r}_\Gamma$ — радиус-вектор точек границы Γ тела.

Аналогично найдем ΔH, применяя (9) повторно. Получим

$$\Delta H(x, y, t) = \Delta H(\vec{r}, t) = \{\Delta H(\vec{r}, t)\} + [\nabla H(\vec{r}, t)]_\Gamma\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma) +$$

$$+ [H(\vec{r}, t)]_\Gamma\, \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma). \tag{10}$$

Здесь $\Delta H = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}$, $\nabla H = \dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial y}$.

Введем случайный оператор η_i через единичные функции Хевисайда

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \Omega_i, \\ 0, & \vec{r} \notin \Omega_i, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{N} \eta_i(\vec{r}\,) = 1.$$

Тогда коэффициент консолидации c_ν для тела в целом можно записать в виде $c_\nu(\vec{r}\,) = \sum_{i=1}^{N} c_{\nu_i}(\vec{r}\,)\,\eta_i(\vec{r}\,)$. С учетом этого, а также соотношения (10) и свойства ползучести уравнение консолидации массива запишем в виде

$$L(\vec{r}, t)\,H(\vec{r}, t) = \tau_1 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} c_{\nu_i}(\vec{r}\,)\,\eta_i(\vec{r}\,) \times$$

$$\times \Bigg\{ \{\Delta H(\vec{r}, t)\} + \sum_{i=1}^{N} [\nabla H(\vec{r}, t)]_{\Gamma_i}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) + \sum_{i=1}^{N} [H(\vec{r}, t)]_{\Gamma_i}\,\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) + \quad (11)$$

$$+ \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \Big[\{\Delta H(\vec{r}, t)\} + \sum_{i=1}^{N} [\nabla H(\vec{r}, t)]_{\Gamma_i}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} [H(\vec{r}, t)]_{\Gamma_i}\,\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) \Big] \Bigg\} = 0.$$

Если в уравнении (11) прибавить и отнять детерминированный оператор $L_0(\vec{r}, t)$, определенный на промежутке $t \in [0, T]$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, a]$, $L_0(\vec{r}, t) = \tau_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} - c_{\nu_0}(\Delta + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta))$, то получим

$$L_0(\vec{r}, t)\,H(\vec{r}, t) = L_i(\vec{r}, t)\,H(\vec{r}, t), \quad (12)$$

где

$$L_i(\vec{r}, t) = L_0 - L = (c_1 - c_0) \sum_{i=1}^{N} \eta_i(\vec{r}) \times \Bigg\{ \{\Delta\} + \sum_{i=1}^{N} [\nabla]_{\Gamma_i}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} [\cdot]_{\Gamma_i} \nabla\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[\{\Delta\} + \sum_{i=1}^{N} [\nabla]_{\Gamma_i}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) + \sum_{i=1}^{N} [\cdot]_{\Gamma_i}\,\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_i}) \right] \Bigg\}.$$

Будем считать правую часть уравнения (12) источником. Краевая задача (12), (5)–(8) эквивалентна такому нелинейному интегродифференциальному уравнению

$$H(\vec{r}, t) = H_0(\vec{r}, t) = \int_0^t \int_\Omega G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t')\,L_i^0(\vec{r}, t)\,H(\vec{r}, t)\,dr\,dt, \quad (13)$$

где $H_0(\vec{r}, t)$ — решение однородного уравнения $L_0 H_0 = 0$ при краевых условиях (5)–(8).

Рассмотрим однородное уравнение $L_0(\vec{r}, t)\,H(\vec{r}, t) = 0$. Аналогично [4] решим его методом интегральных преобразований, чтобы исключить дифференциальные операции по x и y.

Положив $M_1 H = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2}$, получим граничную задачу для ядра преобразования $\bar{K}$:

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial x^2} + \lambda^2 \bar{K} = 0, \quad \bar{K}|_{x=0} = \bar{K}|_{x=1} = 0. \quad (14)$$

Нормированым решением этой задачи будет функция $\bar{K} = \frac{1}{\pi} \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = n\pi$.

Тогда уравнение $L_0(\vec{r}, t)\, H(\vec{r}, t) = 0$ будет иметь вид

$$\tau_1 \frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial t} - c_0 \left(\frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial y^2} - \lambda_n^2 \overline{H}_0 + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \overline{H}_0}{\partial y^2} - \lambda_n^2 \overline{H}_0 \right) \right) = 0$$

$$\overline{H}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 \tag{15}$$

$$\overline{H}\Big|_{t=0} = \overline{H}_0(\lambda_n, y) \quad \overline{H}_0(\lambda_n, y) = \int_0^1 H_0(x, y) \sin \lambda_n x dx, \quad \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Для того чтобы исключить дифференциальные операции по y, положим $M_2 H_0 = \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}$.

Получим задачу, аналогичную (14), с ядром $\widetilde{K} = \dfrac{1}{\pi} \sin \mu_m x, \mu_m = \dfrac{\pi m}{a}, m \ge 1.$

Задача (15) будет иметь вид

$$\tau_1 \frac{\partial^2 \widetilde{H}_0}{\partial t^2} + (1 + c_0 \tau_2 (\mu_m^2 + \lambda_n^2)) \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial t} + c_0 (\mu_m^2 + \lambda_n^2) \widetilde{H}_0 = 0,$$

$$\overline{H}_0\Big|_{t=0} = \widetilde{H}(\lambda_n, \mu_n) \tag{16}$$

$$\widetilde{H}_0(\lambda_n, \mu_m) = \int_0^1 \int_0^a H_0(x, y) \sin \lambda_n x \sin \mu_m y dx dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^a H_0(x, y) \sin \pi n x \sin \frac{\pi m}{a} y dx dy, \quad \frac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0.$$

Таким образом, дважды применяя интегральные преобразования Фурье, задачу (13) свели к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения (16). Пусть $\widetilde{H}_{mn}^{0}(t)$ — решение этого уравнения. С помощью общего выражения для обратного преобразования $u = \int_a^b uK(\lambda, \mu)\, \rho(\lambda)\, d\lambda$ представим решение $\overline{H}_{mn}^0(y, t)$ задачи (15) в виде ряда

$$\overline{H}_n^0(y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{H}_0^{mn}(t)\, \widetilde{K}(y, m) = \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{H}_0^{mn}(t) \sin \frac{\pi}{a} m y.$$

Еще раз применив обратное преобразование, получим решение исходной задачи (14)

$$H_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{H}_0^n(t)\, \overline{K}(x, n) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \widetilde{H}_0^{mn}(t)\, \overline{K}(x, n)\, \widetilde{K}(y, m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{H}_0^{mn}(t) \sin \pi n x \sin \frac{\pi}{a} m y, \tag{17}$$

где $\widetilde{H}_0^{mn}$ — решение задачи (16) вида

$$\widetilde{H}_0^{mn} = \tag{18}$$

$$= \frac{\widetilde{H}_0}{2}\left[\left(1 + \frac{1+\tau_2 K}{\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K}}\right)\exp\left\{\frac{t}{2\tau_1}\left(\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K} - (1+\tau_2 K)\right)\right\}\right] +$$

$$+\left(1 - \frac{1+\tau_2 K}{\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K}}\right)\exp\left\{-\frac{t}{2\tau_1}\left(\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K} + (1+\tau_2 K)\right)\right\}\Bigg],$$

где $K = C_0(\lambda_n^2 + \mu_m^2)$.

Заметим, что при $H_0(x, y) = H_0 = \text{const}$ имеет место

$$\widetilde{H}_0 = \begin{cases} \dfrac{4aH_0}{\pi^2 nm}, \ n, m = 2k+1, \\ 0, \ n, m = 2k. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K} + (1+\tau_2 K) := A(\lambda_n, \mu_m),$$

$$\sqrt{(1+\tau_2 K)^2 - 4\tau_1 K} - (1+\tau_2 K) := B(\lambda_n, \mu_m). \tag{19}$$

Тогда (17) перепишем в виде

$$H_0(x, y, t) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\frac{4H_0 a}{A(\lambda_n, \mu_m) + B(\lambda_n, \mu_m)}\times\right. \tag{17'}$$

$$\times\left\{A(\lambda_n, \mu_m)\exp\left\{B(\lambda_n, \mu_m)\frac{t}{2\tau_1}\right\} + B(\lambda_n, \mu_m)\exp\left\{-A(\lambda_n, \mu_m)\frac{t}{2\tau_1}\right\}\right\}\Bigg]\times$$

$$\times \sin \pi nx \sin \frac{\pi m}{a} y.$$

Обозначим $G(r, t)$ функцию Грина, удовлетворяющую уравнению для точечного источника

$$\tau_1 \frac{\partial^2 G(r,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial G(r,t)}{\partial t} = c_0\left(\Delta G(r,t) + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t}(\Delta G(r,t))\right) = \delta(r - r'), \tag{20}$$

и краевые условия

$$G(r,t)\big|_{t=0} = H_0, \ \ G'(r,t)\big|_{t=0} = H_0$$

$$G(r,t)\big|_{r=0} = G(r,t)\big|_{x=1} = 0, \ \ G'_y(r,t)\big|_{y=a} = 0.$$

Задачу (20) тоже решаем методом интегральных преобразований аналогично задаче (13).

Заметим, что преобразование Фурье для функции $\delta(r - r')$ будет иметь вид

$$\int_0^1 \int_0^a \delta(x - x')\,\delta(y - y') \sin \pi nx \sin \frac{\pi m}{a} y dy dx =$$

$$=\int_0^1 [\int_0^a \delta(y-y')\sin\frac{\pi m}{a} y dy]\,\delta(x-x')\sin\pi nx dx=\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a} y'=0,$$

$$(n, m)\in N.$$

Получим уравнение

$$\tau_1\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial t^2}+(1+c_0\tau_2(\zeta_m^2+\psi_n^2))\frac{\partial\widetilde{G}}{\partial t}+c_0(\zeta_m^2+\psi_n^2)\,\widetilde{G}=\sin\zeta_n x'\sin\psi_m y'=\widetilde{\delta}_{mn}.$$

Обозначив $P=c_0(\zeta_m^2+\psi_n^2)$ и учитывая краевые условия задачи (20), решение данного уравнения запишем в виде

$$\widetilde{G}_{nm}=\frac{\widetilde{H}_0-\widetilde{\delta}_{mn}/P}{2\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}}\times \tag{21}$$

$$\times\left[(\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}+(1+\tau_2 P))\exp\left\{\frac{t}{2\tau_1}(\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}-(1+\tau_2 P))\right\}+\right.$$

$$+(\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}-$$

$$\left.-(1+\tau_2 P))\exp\left\{-\frac{t}{2\tau_1}(\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}+(1+\tau_2 P))\right\}\right]+\frac{\widetilde{\delta}_{mn}}{p}.$$

Введем обозначения аналогично (19):

$$\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}+(1+\tau_2 P):=D(\zeta_n,\psi_m), \tag{19'}$$

$$\sqrt{(1+\tau_2 P)^2-4\tau_1 P}-(1+\tau_2 P):=E(\zeta_n,\psi_m).$$

Тогда запишем

$$G(r,t)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\widetilde{G}_{mn}(t)\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y=\sum_{m,n=1}^{\infty}\left\{\frac{\widetilde{H}_0-\widetilde{\delta}_{mn}/P}{D+E}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{D(\zeta_n,\psi_m)\exp\left\{E(\zeta_n,\psi_m)\frac{t}{2\tau_1}\right\}+E(\zeta_n,\psi_m)\exp\left\{-D(\zeta_n,\psi_m)\frac{t}{2\tau_1}\right\}\right\}\right]+$$

$$\left.+\frac{\widetilde{\delta}_{mn}}{P}\right\}\times\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y. \tag{22}$$

Решение интегродифференциального уравнения (13) построим методом последовательных приближений. За нулевое приближение $H^0(\vec{r},t)$ выберем решение однородной краевой задачи $H^0(\vec{r},t)=H_0$. Имеем такие рекуррентные формулы:

$$H^{(1)}(\vec{r},t)=H_0+\int_0^t\int_{\Omega}G(\vec{r},\vec{r}',t)\,L_i(\vec{r}',t)\,H_0(\vec{r}',t)\,dr'\,dt,$$

$$H^{(2)}(\vec{r},t)=H_0+\int_0^t\int_{\Omega_1}\int_{\Omega}G(\vec{r},\vec{r}',t)\,L_i(\vec{r}',t)\,H^{(1)}(\vec{r}',t)\,dr'\,dt,\ldots,$$

$$H^{(n)}(\vec{r}, t) = H_0 + \int_0^t \int_{\Omega_1} \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}', t)\, L_i(\vec{r}', t)\, H^{(n-1)}(\vec{r}', t)\, dr'\, dt.$$

Поскольку H_0— непрерывно дифференцированная функция, то

$$L_i H_0(\vec{r}, t) = (c_1 - c_0) \sum_{i=1}^{N} \eta_i(\vec{r}\,) \times \left[\{\Delta H_0\} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta H_0\} \right].$$

Общий член последовательности $H^{(0)}, H^{(1)}, \ldots, H^{(n)}$ можно записать так:

$$H^{(n)} = H_0 + \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}', t)\, L_i(\vec{r}'\,)\, H_0(\vec{r}', t)\, dr'\, dt +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)\, L_i(\vec{r}\,') \int_0^{t'} \int_{\Omega'} G(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')\, L_i(\vec{r}\,'')\, H_0(\vec{r}\,'', t'')\, dr''\, dr'\, dt +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)\, L_i(\vec{r}\,') \int_0^{t'} \int_{\Omega'} G(\vec{r}\,', \vec{r}\,'')\, L_i(\vec{r}\,'') \times \ldots$$

$$\times \int_0^{t^{(n-2)}} \int_{\Omega^{(n-2)}} G(\vec{r}^{\,(n-2)}, \vec{r}^{\,(n-1)})\, L_i(\vec{r}^{\,(n-1)}),\, H_0(\vec{r}^{\,(n-1)}, t) dr^{(n-1)} \ldots dr'\, dt + R_n(\vec{r}, t).$$

Здесь $R_n(r, t)$ — разность между n- и $(n-1)$-м членами последовательности вида

$$R_n = \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}\,', t)\, L_i(\vec{r}\,') \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', t)\, L_i(\vec{r}\,'') \ldots$$

$$\ldots \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{r}^{\,(n-1)}, \vec{r}^{\,(n)}, t)\, L_i(\vec{r}^{\,(n)})\, H_0(\vec{r}^{\,(n)}, t)\, dr^{(n)}\, dr'\, dt.$$

Получили ряд

$$H(r, t) = H_0(r, t) + \sum_n R_n(r, t). \tag{23}$$

Теорема 1. Ряд (23) абсолютно и непрерывно сходится.

Доказательство.

$$|L_i(r)\, H_0(r, t)| \le |c - c_0| \sum_i |\eta_i(\vec{r}\,)| \left| \{\Delta H_0\} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta H_0\} \right| \le$$

$$\le c_* \sum_i \left| \{\Delta H_0\} + \tau_2 \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta H_0\} \right|,$$

$\{\Delta H_0\}$ — кусочно-непрерывная функция, $H_0 = \sum\limits_{m,n} \widetilde{H}_0^{mn}(t) \sin \pi n x \sin \dfrac{\pi m}{a} y.$

Тогда

$$\Delta H_0 = \frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} = -\sum_{m,n} \widetilde{H}_0^{mn}(t)\, (\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2 m^2}{a^2}) \sin \pi n x \sin \frac{\pi m}{a} y,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta H_0 = 2\sum_{m,n}\frac{c_0\widetilde{H}_0\left(\pi^2 n^2+\dfrac{\pi^2 m^2}{a^2}\right)}{A+B}\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\times$$

$$\times\left\{\exp\left(\frac{B}{2\tau_1}t\right)-\exp\left(-\frac{A}{2\tau_1}t\right)\right\}.$$

Отсюда

$$|\{\Delta H_0\}+\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\{\Delta H_0\}|\le$$

$$\le\sum_{m,n}\left[\frac{\widetilde{H}^0}{2}\left|\frac{1}{A+B}\left(A\exp\left(\frac{B}{2\tau_1}t\right)+B\exp\left(-\frac{A}{2\tau_1}t\right)\right)\left(\pi^2 n^2+\pi^2\frac{m^2}{a^2}\right)\right|+\right.$$

$$+2\tau_2 C_0\sum_{m,n}\frac{(\pi^2 n^2+\pi^2\dfrac{m^2}{a^2})\widetilde{H}^0}{A+B}\left|\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}\right|\le$$

$$\le\sum_{m,n}\left[\frac{2aH^0}{\pi^2 nm}\left|\frac{1}{A+B}\left(A\exp\left(\frac{B}{2\tau_1}t\right)+B\exp\left(-\frac{A}{2\tau_1}t\right)\right)\left(\pi^2 n^2+\pi^2\frac{m^2}{a^2}\right)\right|\right]\le$$

$$\le U=\text{const}.$$

Следовательно,

$$|R_n|\le U\left|\int_0^t\int_\Omega G(\vec r,\vec r\,',t,t')\int_0^{t'}\int_\Omega G(\vec r\,',\vec r\,'',t',t'')\times\ldots\right.$$

$$\left.\times L_i(\vec r^{\,(n-1)})\int_0^{t^{(n-1)}}\int_\Omega G(\vec r^{\,(n-1)},\vec r^{\,(n)},t^{(n-1)},t^{(n)})\,dr^{(n)}\,dt^{(n\ldots)}\,dr'\,dt'\right|.$$

Действие оператора $L_i(\vec r\,)$ на функцию Грина $G(r,r',t,t')$ будет следующим:

$$L_i G=(c-c_0)\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\vec r\,)\left\{\Delta G+\tau_2\frac{\partial}{\partial t}(\Delta G)\right\},$$

$$\Delta G=-\sum_{m,n}\widetilde{G}_{mn}(t)\left(\pi^2 n^2+\frac{\pi^2 m^2}{a^2}\right)\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y,$$

$$\frac{\partial\Delta G}{\partial t}=-\sum_{m,n}\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{G}_{mn}(t)\left(\pi^2 n^2+\frac{\pi^2 m^2}{a^2}\right)\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y=$$

$$=2\sum_{m,n}\frac{c_0\left(\pi^2 n^2+\dfrac{\pi^2 m^2}{a^2}\right)\widetilde{H}_0}{A+B}\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\left\{\exp\left(\frac{B}{2\tau_1}t\right)-\exp\left(-\frac{A}{2\tau_1}t\right)\right\}.$$

Тогда

$$L_i G=(c-c_0)\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\vec r\,)[\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y'+$$

$$+\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\times\frac{P\widetilde{H}_0-\sin\pi nx'\sin\dfrac{\pi m}{a}y'}{D+E}\times$$

$$\times\left\{(D-2P\tau_2)\exp\left(\frac{E}{2\tau_1}t\right)+(E+2P\tau_2)\exp\left(-\frac{D}{2\tau_1}t\right)\right\}\Bigg].$$

Поскольку $|\eta_i(\vec{r})|\le 1$ и есть ограничение на ряды

$$\sum_{m,n}\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y'\exp\left(\frac{E}{2\tau_1}t\right)\le u_1,$$

$$\sum_{m,n}\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y'\exp\left(-\frac{D}{2\tau_1}t\right)\le u_2,$$

то получим

$$|R_n|\le U\,\Big|\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r},\vec{r}\,',t)\,L_s(\vec{r}\,')\int_0^{t'}\int_\Omega G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',t)\,L_s(\vec{r}\,'')\times\ldots$$

$$\ldots\times L_i(\vec{r}^{\,(n-1)})\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r}^{\,(n-1)},\vec{r}^{\,(n)},t)\,dx^{(n)}\,dt^{(n)}\ldots dr'\,dt'\Big|.$$

В результате имеем

$$|R_n|\le U\left|\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r},\vec{r}',t)\,L_s(\vec{r}')\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r}',\vec{r}'',t)\,L_s(\vec{r}'')\times\ldots\right.$$

$$\ldots\times\int_0^t\int_\Omega\Bigg[\sin\pi nx^{(n)}\sin\frac{\pi m}{a}y^{(n)}\sin\pi nx^{(n-1)}\sin\frac{\pi m}{a}y^{(n-1)}+$$

$$+\sin\pi nx^{(n)}\sin\frac{\pi m}{a}y^{(n)}\times\frac{P\widetilde{H}_0}{D+E}\times$$

$$\left.\times\left\{(D-2P\tau_2)\exp\left(\frac{E}{2\tau_1}t\right)+(E+2P\tau_2)\exp\left(-\frac{D}{2\tau_1}t\right)\right\}\Bigg]dx^{(n)}\,dy^{(n)}\,dt\right|.$$

Учитывая, что

$$\int_\Omega\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\,dxdy=\frac{a^2}{\pi^2m^2n^2}((-1)^n-1)\left((-1)^{\frac{m}{a}}-1\right)$$

и

$$\int_0^1\int_\Omega\exp\left(\frac{E}{2\tau_1}t\right)\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y\,dxdydt=$$

$$=\frac{a^2}{\pi^2m^2n^2}((-1)^n-1)\left((-1)^{\frac{m}{a}}-1\right)\frac{2\tau_1}{E}\exp\left(\frac{E}{2\tau_1}t\right),$$

имеем

$$|R_n|\le U\frac{a^2}{\pi^2n^2m^2}\left|\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r},\vec{r}\,',t)\,L_s(\vec{r}\,')\int_0^t\int_\Omega G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',t)\,L_s(\vec{r}\,'')\times\ldots\right.$$

$$\ldots\times L_i(\vec{r}^{\,(n-1)})\int_0^{t^{(n-1)}}\int_\Omega G(\vec{r}^{\,(n-1)},\vec{r}^{\,(n)},t)\,d_r^{(n)}dtdr'.$$

Повторяя эту процедуру $n-1$ раз, получаем оценку

$$|R_n| \le U \left| \left(\frac{a^2}{\pi^2 m^2 n^2} \right)^{(k-1)} ((-1)^n - 1)^{(k-1)} \left((-1)^{\frac{m}{a}} - 1 \right)^{(k-1)} \right| \times$$

$$\times \left| \frac{P\,\widetilde{H}_0}{D+E} \times \left\{ \left(\frac{(D - 2P\tau_2)2\tau_1}{E} \right)^{(k-1)} \exp\left(\frac{E}{2\tau_1} t \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{(E + 2P\tau_2)2\tau_1}{D} \right)^{(k-1)} \exp\left(-\frac{D}{2\tau_1} t \right) \right\} \right| \le$$

$$\le C_* \left(\frac{a}{\pi m n} \right)^{(k)} \times \frac{\widetilde{P}\widetilde{H}_0}{|D+E|} \times \left| \left(\frac{(D - 2P\tau_2)2\tau_1}{E} \right)^{(k-1)} u_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{(E + 2P\tau_2)2\tau_1}{D} \right)^{(k-1)} u_2 \right|.$$

Поскольку ряд с положительным общим членом $C_* \left(\frac{a}{\pi m n} \right)^{(k)} \frac{P\,\widetilde{H}_0}{|D+E|} \times$ $\times \left| \left(\frac{(D - 2P\tau_2)2\tau_1}{E} \right)^{(k-1)} u_1 + \left(\frac{(E + 2P\tau_2)2\tau_1}{D} \right)^{(k-1)} u_2 \right|$ сходится при $n \to \infty$ для любых значений u_1, u_2, U, C_*, t, то последовательность частичных сумм ряда (22) $\{H^{(n)}(\vec{r}, t)\}$ за признаком Вейерштрасса является абсолютно и равномерно сходящейся при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} H^{(n)}(\vec{r}, t) = H(\vec{r}, t)$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Функция $H(\vec{r}, t) = H_0(\vec{r}, t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} R_n(\vec{r}, t)$ является решением интегродифференциального уравнения (13).

Доказательство проводится аналогично [2].

Для нахождения поля избыточных напоров H в массиве со случайно расположенными включениями воспользуемся [3]. Ограничимся первыми двумя членами ряда (22), т.е. $H(\vec{r}, t) \Leftrightarrow H^{(1)}(\vec{r}, t)$. Пусть включения в теле расположены равномерно с плотностью функции распределения $1/S$ (S — площадь тела). Поскольку $H_0(\vec{r}, t)$ — неслучайная функция, то $\langle H_0(\vec{r}, t) \rangle_{\text{изб}} = H_0(\vec{r}, t)$.

Рассмотрим выражение $I = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t')\, L_i(\vec{r}\,')\, H_0(\vec{r}\,', t)\, dr'\, dt.$

Здесь случайными величинами являются радиус-векторы центров включений. Поскольку

$$\eta_i(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \Omega_i \\ 0, & \vec{r} \notin \Omega_i \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\vec{r}\,' - \vec{r}_i| \in [0, R_i], \\ 0, & |\vec{r}\,' - \vec{r}_i| \notin [0, R_i], \end{cases} = \eta_i(|\vec{r}\,' - \vec{r}_i|),$$

где $\vec{r}_i$ — радиус-вектор центра включения Ω_i, R_i — средний радиус включения, то

$$\langle I\rangle=(c_1-c_0)\int_{\Omega}\left(\left[\{\Delta H\}+\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\{\Delta H_0\}\right]\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n_1}\int_S\eta_{i1}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}_{i1}\right)d\vec{r}\,'.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n_1}\int_S\eta_{i1}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}_{i1}=\begin{cases}\dfrac{1}{S}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\pi R_1^2=\dfrac{1}{2}s_1, & r'\in[0,R_1],\\ -\dfrac{1}{S}\sum\limits_{i=1}^{n_1}\pi R_1^2=\dfrac{1}{2}s_1, & r'\in[R_1,r_0-R_1].\end{cases}$$

Тогда после усреднения получим

$$\langle I\rangle=\frac{1}{2}s_1(c_1-c_0)\left\{\int_0^{R_1}\left(G\Delta H_0+\tau_2 G\frac{\partial}{\partial t}\Delta H_0\right)dr'-\int_{R_1}^{r_0-R_1}\left(G\Delta H_0+\tau_2 G\frac{\partial}{\partial t}\Delta H_0\right)dr'\right\},$$

где $G\Delta H_0+\tau_2 G\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta H_0=\sum\limits_{n,m=1}^{\infty}\left\{\dfrac{\widetilde{H}_0-(\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y')/P}{A+B}\times\right.$

$$\times\left\{A\exp\{B\frac{t}{2\tau_1}\}+B\exp\{-A\frac{t}{2\tau_1}\}\right\}+\left.\frac{\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y'}{P}\right\}\times$$

$$\times(\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y)^2\times\frac{P}{c_0}\times\frac{(-\widetilde{H}_0)}{A+B}\times\left\{A\exp\left(\frac{B}{2\tau_1}t\right)+B\exp\left(-\frac{A}{2\tau_1}t\right)\right\}+$$

$$+2\tau_2\sum_{n,m=1}^{\infty}\left\{\frac{\widetilde{H}_0-(\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y')/P}{A+B}\times\right. \tag{24}$$

$$\times\left\{A\exp\{B\frac{t}{2\tau_1}\}+B\exp\{-A\frac{t}{2\tau_1}\}\right\}+\left.\frac{\sin\pi nx'\sin\frac{\pi m}{a}y'}{P}\right\}\times$$

$$\times(\sin\pi nx\sin\frac{\pi m}{a}y)^2\times\frac{Pc_0\widetilde{H}_0}{A+B}\times\left\{\exp\{B\frac{t}{2\tau_1}\}-\exp\{-A\frac{t}{2\tau_1}\}\right\}.$$

Подставим в (24) выражение для функции Грина (22) и избыточного напора (17) и проинтегрируем. В результате получим формулу для поля избыточного напора в массиве со случайно расположенными включениями при условии, что $c_\nu=c_\nu(\vec{r}\,)$ — случайная функция.

Для иллюстрации расчетов приведем графики поля избыточного напора в массиве со случайно расположенными включениями.

На рис. 2 показана зависимость поля избыточных напоров от таких значений отношения коэффициентов консолидации $c_{\nu_0}/c_{\nu_1}=0,001$ (кривые *1*, *2*) и

$c_{\nu_0} / c_{\nu_i} = 0,01$ (кривые *3, 4*) в моменты времени $t = 10$ (кривые *1, 3*), $t = 20$ (кривые *2, 4*) для $s_1 = 3{,}14 \times 10^{-6}$, $R_1 = 0,001$.

На рис. 3 приведено поле избыточных напоров для разных значений объемной части включений: $s_1 = 3{,}14 \times 10^{-6}$; $12{,}56 \times 10^{-6}$; $28{,}26 \times 10^{-6}$; $50{,}24 \times 10^{-6}$ для $c_{\nu_0} / c_{\nu_i} = 0{,}001$ при $t = 20$, кривые *1–4* соответствуют изменениям S_1, кривая *4* сливается с осью.

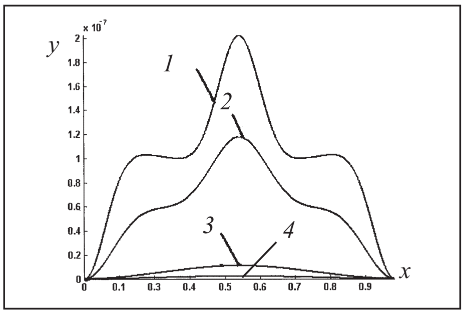

Рис. 2

На рис. 4 показаано влияние величины характерного радиуса включений на поведение поля избыточных напоров, здесь $R_1 = 2 \times 10^{-2}$; 3×10^{-3}; $4 \times 10^{-3}; 5 \times 10^{-3}$ соответствуют кривым *1–4*, кривая *4* сливается с осью.

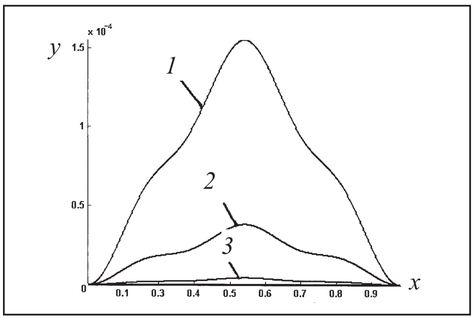

Рис. 3

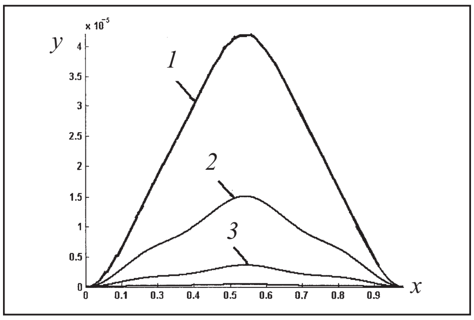

Рис. 4

Для построения решения краевой задачи фильтрационной консолидации водонасыщеных случайно-неоднородных грунтовых массивов предложен следующий подход: с помощью теории обобщенных функций краевую задачу привели к уравнению консолидации для тела в целом при наличии соответствующих начального и граничного условий; полученной краевой задаче поставлено в соответствие нелинейное интегродифференциальное уравнение. Методом последовательных приближений получено решение этого уравнения в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда. Имеется поле избыточных напоров в массиве со случайно расположенными включениями при условии, что $c_\nu = c_\nu (\vec{r}\ )$ — случайная функция. Данная работа необходима для изучения процессов фильтрационной консолидации дренованных массивов с учетом геологических свойств грунтового скелета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. — КиВв: Наук. думка, 2005. — 282 с.
2. Чернуха О.Ю. До опису процесів дифузіВ в шарџ з випадковими кульовими включеннями // Вџсн. Львџв. ун-ту. — 2003. — Вип. 1. — С. 129–142.
3. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 432 с.
4. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 71–79.

Поступила 25.05.2007