

УДК 531.3, 517.9, 62-50

©2011. В.Н. Неспирный, В.А. Королев

**СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА**

Рассматривается задача управления двухстепенным маятником с помощью колебаний точки подвеса. Исследован вопрос о существовании наклонных положений равновесия и вращений вокруг вертикальной оси. Получены законы управления, обеспечивающие соответствующие движения маятника. Решена задача об установлении указанных режимов.

**Ключевые слова:** *сферический маятник, подвижный подвес, импульсное управление.*

**Введение.** Интерес к задачам вибрационной динамики в науке и технике возник благодаря работам П.Л. Капицы [1, 2]. Им было показано, что высокочастотные вертикальные колебания точки подвеса математического маятника с небольшой по величине амплитудой могут привести к потере устойчивости в нижнем положении равновесия, но обеспечить асимптотическую устойчивость верхнего положения. Такие изменения качественных свойств характерны для многих колебательных систем и объясняются влиянием соответствующих инерционных сил, которые принято называть вибрационными.

Аналізу устойчивости вертикальных положений равновесия математического маятника посвящено множество работ. В частности, в [3] эта задача полностью исследована в нелинейной постановке, в [4] изучено влияние вязкого трения на частоту стабилизации. В монографиях [5, 6] рассмотрены различные типы траекторий движения подвеса маятника и для каждого из них получены все квазиравновесные состояния маятника. В [7] доказана невозможность обеспечения точного равновесия, но показано, что любое (даже наклонное) положение маятника может быть квазиравновесным со сколь угодно малым отклонением при соответствующем выборе частоты и направления вибрации точки подвеса.

Одной из первых работ, где рассматривалась задача о колебаниях сферического маятника с подвижной точкой подвеса, была статья [8]. В ней были исследованы нелинейные реакции такого маятника со слабым демпфированием при гармонических колебаниях подвеса в одном направлении. В [9] была решена задача об оптимальном перемещении сферического маятника из одного положения в другое. Случай высокочастотных вертикальных вибраций точки подвеса с малой амплитудой был рассмотрен в [10], где исследованы высокочастотные колебания маятника вблизи конического движения. В [11] предложен общий подход к решению уравнений движения маятника при заданном движении подвеса. Инженерный интерес к данной задаче подтверждается работами [12–14], где сферический маятник используется для описания динамики подъемных кранов и некоторых других механизмов.

В настоящей статье исследуется возможность обеспечения равновесия сферического маятника в заданном наклонном положении за счет колеба-

ний точки подвеса, а также равномерных вращений вокруг вертикальной оси под фиксированным углом к ней и с заданной частотой.

**1. Постановка задачи и уравнения движения.** Рассмотрим сферический маятник, состоящий из материальной точки массы  $m$  и невесомого нерастяжимого стержня длины  $l$ , на котором подвешена эта точка. Точка подвеса стержня не закреплена, а может перемещаться вдоль произвольной кривой. На точку действует сила тяжести, силы же трения и сопротивления считаются настолько малыми, что ими можно пренебречь. Положение маятника однозначно определяется углом  $\theta$  отклонения от вертикали и углом поворота  $\varphi$  в горизонтальной плоскости.

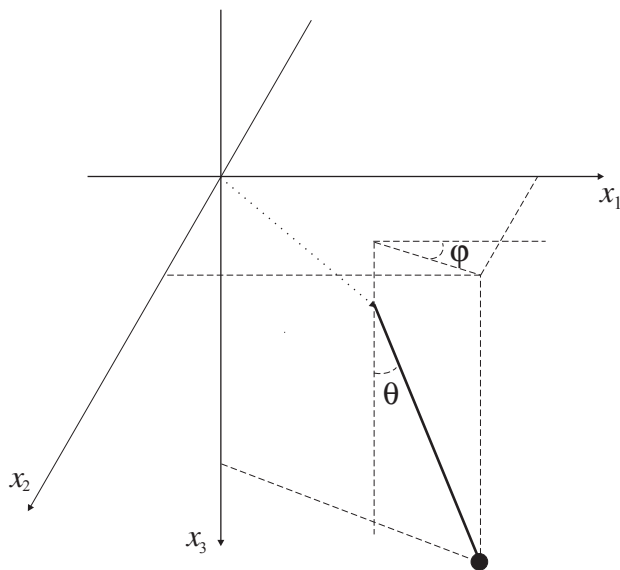


Рис. 1. Сферический маятник с подвижной точкой подвеса.

Уравнения движения рассматриваемого объекта при перемещении точки подвеса по закону  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} l\ddot{\theta} - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta + (g - \ddot{x}_3) \sin \theta + (\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{x}_2 \sin \varphi) \cos \theta &= 0, \\ l(\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + \dot{\theta}\dot{\varphi} \sin 2\theta) + (\ddot{x}_2 \cos \varphi - \ddot{x}_1 \sin \varphi) \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В случае, если точка подвеса жестко закреплена ( $x_1(t) \equiv x_2(t) \equiv x_3(t) \equiv 0$ ), маятник имеет два положения равновесия:  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Кроме этих положений, система имеет семейство стационарных режимов – вращения вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, с постоянной угловой скоростью

$$\theta = \text{const} < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = t\sqrt{\frac{g}{l \cos \theta}} + \varphi_0.$$

Функции  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$  могут рассматриваться как управления в уравнениях (1). Для того, чтобы эти уравнения были корректно определены, необходимо потребовать, чтобы функции  $x_i(t)$  были дважды непрерывно дифференцируемыми. Поставим задачу о нахождении других стационарных режимов, которые возможно обеспечить при некотором ограниченном движении точки подвеса.

**2. Положения равновесия.** Рассмотрим прежде всего положения равновесия. Поскольку вертикальные положения являются равновесными при неподвижном подвесе, интерес представляют лишь наклонные положения. Пусть задано некоторое наклонное положение маятника  $\theta_0, \varphi_0$ , где  $\theta_0 \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Будем искать движение точки подвеса  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  такое, что  $\theta(t) \equiv \theta_0$ ,  $\varphi(t) \equiv \varphi_0$ . Учитывая  $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$  и  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , уравнение (1) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} (g - \ddot{x}_3(t)) \sin \theta_0 + (\ddot{x}_1(t) \cos \varphi_0 + \ddot{x}_2(t) \sin \varphi_0) \cos \theta_0 &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) \cos \varphi_0 - \ddot{x}_1(t) \sin \varphi_0 \sin \theta_0 &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что в наклонном положении  $\sin \theta_0 \neq 0$ , из второго уравнения получаем  $\ddot{x}_2(t) \cos \varphi_0 = \ddot{x}_1(t) \sin \varphi_0$ , а из первого

$$\ddot{x}_3(t) = g + \operatorname{ctg} \theta_0 (\ddot{x}_1(t) \cos \varphi_0 + \ddot{x}_2(t) \sin \varphi_0). \quad (2)$$

Выбирая произвольно одно из ускорений (например,  $\ddot{x}_1(t)$ ), из полученных соотношений найдем остальные. Проинтегрировав выражения для ускорений дважды с подходящим выбором начальных условий, получим уравнения движения точки подвеса. Так, например, выбор  $\ddot{x}_1(t) = 0$  и нулевых констант интегрирования приводит к закону движения  $(0, 0, gt^2/2)$ , что соответствует свободному падению маятника. Очевидно, что это движение неограничено по координате  $x_3$ .

Докажем, что ограниченного движения в данном случае построить невозможно. Перенесем все ускорения из правой части соотношения (2) в левую и проинтегрируем его дважды:

$$x_3(t) - (x_1(t) \cos \varphi_0 + x_2(t) \sin \varphi_0) \operatorname{ctg} \theta_0 = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_0. \quad (3)$$

Если бы все функции  $x_i(t)$  были ограниченными, то и выражение, стоящее в левой части, также было бы ограниченным. Но в правой части стоит неограниченная функция времени, и значит данное равенство не может выполняться при всех значениях  $t$ . Полученное противоречие доказывает, что не существует ограниченного движения точки подвеса, обеспечивающего равновесие в наклонном положении.

**3. Импульсные воздействия.** Рассмотрим теперь возможность использования движений точки подвеса  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , непрерывно зависящих от времени, но имеющих производную, которая может в некоторые

моменты времени иметь разрывы первого рода. Такие движения могут быть механически реализованы с помощью кратковременного воздействия силой с ограниченным импульсом.

Вычислим реакцию системы на подобное воздействие. Для этого перепишем систему (1), разрешая ее относительно  $\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$  и вводя новые переменные для производных первых порядков ( $\dot{\theta} = \omega_\theta, \dot{\varphi} = \omega_\varphi$ ):

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= \frac{1}{2}\omega_\varphi^2 \sin 2\theta - \frac{1}{l} [(g - \ddot{x}_3) \sin \theta + (\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{x}_2 \sin \varphi) \cos \theta], \\ \dot{\theta} &= \omega_\theta, \\ \omega_\varphi &= -2\omega_\theta\omega_\varphi \operatorname{ctg} \theta + \frac{\ddot{x}_1 \sin \varphi - \ddot{x}_2 \cos \varphi}{l \sin \theta}, \\ \dot{\varphi} &= \omega_\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим  $U_i(t) = \dot{x}_i(t), u_i(t) = \dot{U}_i(t), i = \overline{1,3}$ . Пусть  $U_i(t)$  в некоторой точке  $t = \tau$  терпят разрыв первого рода с величинами скачков  $\Delta U_i$ . Для того, чтобы получить реакцию системы на импульсное воздействие, воспользуемся линейными аппроксимациями  $U_i(t)$  в окрестности точки  $\tau$  ( $t \in [\tau - \varepsilon/2, \tau + \varepsilon/2]$ ):

$$U_i^{(\varepsilon)}(t) = U_i\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left[U_i\left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right) - U_i\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \frac{t - \tau + \varepsilon/2}{\varepsilon}.$$

Для удобства обозначим  $\Delta U_i^{(\varepsilon)} = U_i(\tau + \varepsilon/2) - U_i(\tau - \varepsilon/2)$ . Тогда  $u_i^{(\varepsilon)}(t) = \Delta U_i^{(\varepsilon)}/\varepsilon$ . Подставим эти значения в уравнения (4) и проинтегрируем полученные соотношения по отрезку времени  $[\tau - \varepsilon/2, t]$ :

$$\begin{aligned} \omega_\theta(t) &= \omega_\theta(\tau - \varepsilon/2) + \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \left[ \frac{1}{2} \sin 2\theta(\xi) \omega_\varphi^2(\xi) - \frac{g}{l} \sin \theta(\xi) \right] d\xi + \\ &+ \frac{1}{l\varepsilon} \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \left[ \Delta U_3^{(\varepsilon)} \sin \theta(\xi) - \left( \Delta U_1^{(\varepsilon)} \cos \varphi(\xi) + \Delta U_2^{(\varepsilon)} \sin \varphi(\xi) \right) \cos \theta(\xi) \right] d\xi, \\ \theta(t) &= \theta(\tau - \varepsilon/2) + \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \omega_\theta(\xi) d\xi, \\ \omega_\varphi(t) &= \omega_\varphi(\tau - \varepsilon/2) - 2 \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \omega_\theta(\xi) \omega_\varphi(\xi) \operatorname{ctg} \theta(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{l\varepsilon} \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \frac{\Delta U_1^{(\varepsilon)} \sin \varphi(\xi) - \Delta U_2^{(\varepsilon)} \cos \varphi(\xi)}{\sin \theta(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \varphi(\tau - \varepsilon/2) + \int_{\tau - \varepsilon/2}^t \omega_\varphi(\xi) d\xi.$$

Предполагая ограниченность и непрерывность  $\theta(t)$ ,  $\varphi(t)$  и их производных, из второго и четвертого уравнений получаем

$$\varphi(t) = \varphi(\tau - \varepsilon/2) + O(t - \tau + \varepsilon/2), \quad \theta(t) = \theta(\tau - \varepsilon/2) + O(t - \tau + \varepsilon/2).$$

Кроме того, потребуем, чтобы  $\sin \theta$  было отлично от нуля во время движения. В противном случае (при значениях  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ) мы имели бы особенность в третьем уравнении. Это объясняется тем, что при любом значении  $\varphi$  мы имеем одно и то же положение маятника. В силу того, что мы рассматриваем движения маятника вблизи наклонных положений, требуемое условие может быть выполнено. Тогда, применяя теорему о среднем в определенном интеграле, для непрерывных функций получим

$$\begin{aligned} \omega_\theta(t) &= \omega_\theta(\tau - \varepsilon/2) + \frac{1}{2} \left[ \omega_\varphi^2(\tau^*) \sin 2\theta(\tau^*) - \frac{g}{l} \sin \theta(\tau^*) \right] (t - \tau + \varepsilon/2) + \\ &+ O(t - \tau + \varepsilon/2) + \frac{t - \tau + \varepsilon/2}{l\varepsilon} \left[ \Delta U_3^{(\varepsilon)} \sin \theta(\tau - \varepsilon/2) - \right. \\ &\left. - \left( \Delta U_1^{(\varepsilon)} \cos \varphi(\tau - \varepsilon/2) + \Delta U_2^{(\varepsilon)} \sin \varphi(\tau - \varepsilon/2) \right) \cos \theta(\tau - \varepsilon/2) \right], \\ \omega_\varphi(t) &= \omega_\theta(\tau - \varepsilon/2) - 2\omega_\theta(\tau^*)\omega_\varphi(\tau^*) \operatorname{ctg} \theta(\tau^*)(t - \tau + \varepsilon/2) + O(t - \tau + \varepsilon/2) + \\ &+ \frac{t - \tau + \varepsilon/2}{l\varepsilon} \frac{\Delta U_1^{(\varepsilon)} \sin \varphi(\tau - \varepsilon/2) - \Delta U_2^{(\varepsilon)} \cos \varphi(\tau - \varepsilon/2)}{\sin \theta(\tau - \varepsilon/2)}. \end{aligned}$$

Подставляя теперь в полученные выражения для углов и скоростей значение  $t = \tau + \varepsilon/2$  и переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \theta(\tau + 0) &= \theta(\tau - 0), \quad \varphi(\tau + 0) = \varphi(\tau - 0), \\ \omega_\theta(\tau + 0) &= \omega_\theta(\tau - 0) + \frac{1}{l} [\Delta U_3 \sin \theta(\tau - 0) - \cos \theta(\tau - 0) \times \\ &\quad \times (\Delta U_1 \cos \varphi(\tau - 0) + \Delta U_2 \sin \varphi(\tau - 0))], \\ \omega_\varphi(\tau + 0) &= \omega_\theta(\tau - 0) + \frac{\Delta U_1 \sin \varphi(\tau - 0) - \Delta U_2 \cos \varphi(\tau - 0)}{l \sin \theta(\tau - 0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, реакцией системы (4) на импульсы величин  $(\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3)$  будет скачок траектории в фазовом пространстве величины

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= 0, \quad \Delta \varphi = 0, \\ \Delta \omega_\theta &= l^{-1} [\Delta U_3 \sin \theta - \cos \theta (\Delta U_1 \cos \varphi + \Delta U_2 \sin \varphi)], \\ \Delta \omega_\varphi &= \frac{\Delta U_1 \sin \varphi - \Delta U_2 \cos \varphi}{l \sin \theta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Для сохранения равновесия в положении  $\theta = \theta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  необходимо, чтобы выполнялось  $\Delta\omega_\theta = \Delta\omega_\varphi = 0$ . Этим требованиям удовлетворяют лишь импульсы вида  $(\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3) = (1, \operatorname{tg} \varphi, \operatorname{ctg} \theta \cos^{-1} \varphi)p$ , где  $p$  – любое вещественное число. Однако нетрудно видеть, что такие воздействия сохраняют интеграл (3), а значит добиться ограниченности движения подвеса не удастся даже при использовании импульсных управлений.

**4. Конические движения.** Рассмотрим случай конического движения. В этом случае маятник совершает вращение вокруг вертикальной оси, точка на его конце описывает окружность (или дугу этой окружности) в горизонтальной плоскости с центром на вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, а угол наклона маятника остается постоянным  $\theta(t) = \theta_0$ . Уравнения (1) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta_0 &= (g - \ddot{x}_3) \sin \theta_0 + (\ddot{x}_1 \cos \varphi + \ddot{x}_2 \sin \varphi) \cos \theta_0, \\ l\ddot{\varphi} \sin \theta_0 &= \ddot{x}_1 \sin \varphi - \ddot{x}_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Потребуем, чтобы вращение происходило с некоторой постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда  $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ . Подставим это выражение в уравнения (6):

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}\omega^2 \sin 2\theta_0 &= (g - \ddot{x}_3) \sin \theta_0 + (\ddot{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_0) + \ddot{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_0)) \cos \theta_0, \\ 0 &= \ddot{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_0) - \ddot{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Поскольку уравнений всего два, мы имеем лишнюю степень свободы для их решения. Поэтому одно из ускорений  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$  или  $\ddot{x}_3$  может быть выбрано произвольно. Выберем, например,  $\ddot{x}_3 \equiv 0$ . Для того, чтобы обеспечить ограниченность соответствующей координаты, начальную скорость следует выбрать нулевой. Тогда имеем  $x_3(t) \equiv \text{const}$ , а для определения  $\ddot{x}_1$  и  $\ddot{x}_2$  получаем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_0) + \ddot{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_0) &= l\omega^2 \sin \theta_0 - g \operatorname{tg} \theta_0, \\ \ddot{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_0) - \ddot{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_0) &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= (l\omega^2 \sin \theta_0 - g \operatorname{tg} \theta_0) \cos(\omega t + \varphi_0), \\ \ddot{x}_2 &= (l\omega^2 \sin \theta_0 - g \operatorname{tg} \theta_0) \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

Интегрируя дважды полученные выражения с учетом требования ограниченности, получим, что движение точки подвеса должно происходить по закону

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (g \operatorname{tg} \theta_0 - l\omega^2 \sin \theta_0) \cos(\omega t + \varphi_0) + x_{10}, \\ x_2(t) &= (g \operatorname{tg} \theta_0 - l\omega^2 \sin \theta_0) \sin(\omega t + \varphi_0) + x_{20}, \\ x_3(t) &= x_{30}. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения (7) определяют движение подвеса по окружности, расположенной в плоскости  $x_3 = x_{30}$ , с центром в точке  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  и радиусом  $|g \operatorname{tg} \theta_0 - l\omega^2 \sin \theta_0|$ .

Заметим, что в отличие от случая неподвижного подвеса, где существовали конические движения в положениях, составляющих только острый угол с осью  $Ox_3$ , движение (7) позволяет добиться вращения маятника и под углом больше  $\pi/2$ . Тем не менее вращение в горизонтальной плоскости (под углом  $\pi/2$  к вертикали) данный класс движений подвеса не может реализовать.

Следует отметить также, что при неподвижном подвесе допустима лишь единственная частота вращений, равная  $\sqrt{g/(l \cos \theta_0)}$ . Управление (7) позволяет обеспечить произвольную частоту вращений под любым углом  $\theta_0$ , за исключением вертикальных ( $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = \pi$ ) и горизонтального положения ( $\theta_0 = \pi/2$ ).

Рассмотрим теперь задачу о приведении маятника в режим равномерных вращений. Пусть изначально маятник находится в положении  $(\theta_0, \varphi_0)$  с начальными угловыми скоростями  $\omega_{\theta_0}$  и  $\omega_{\varphi_0}$ . Требуется привести его в равномерное вращение под углом  $\theta_0$  с постоянной угловой скоростью  $\omega^*$ . На первом этапе обеспечим, чтобы угловые скорости были равны 0 и  $\omega^*$ . Воспользуемся для этого импульсными воздействиями  $\Delta U_i$ . Согласно формулам (5), эти воздействия должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} -l\omega_{\theta_0} &= \Delta U_3 \sin \theta_0 - \cos \theta_0 (\Delta U_1 \cos \varphi_0 + \Delta U_2 \sin \varphi_0), \\ l \sin \theta_0 (\omega^* - \omega_{\varphi_0}) &= \Delta U_1 \sin \varphi_0 - \Delta U_2 \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

Они могут быть выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= -\frac{l\omega_{\theta_0}}{\cos} \varphi_0 + l \sin \theta_0 (\omega^* - \omega_{\varphi_0}) \sin \varphi_0, \\ \Delta U_2 &= -\frac{l\omega_{\theta_0}}{\sin} \varphi_0 - l \sin \theta_0 (\omega^* - \omega_{\varphi_0}) \cos \varphi_0, \quad \Delta U_3 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Воспользовавшись управлением (8), мы обеспечим начальные условия для равномерного вращения. Для того, чтобы поддерживать в дальнейшем этот режим, следует применить управление (7).

**Заключение.** Рассмотрена задача о нахождении равновесных состояний и режимов равномерных вращений вокруг вертикали сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса. Доказано отсутствие ограниченных управлений, гарантирующих равновесие в положениях, отличных от вертикальных. Найдено движение подвеса, обеспечивающее коническое движения с произвольной угловой скоростью. Получено решение задачи об установлении режима равномерного вращения с заданной скоростью с помощью импульсных воздействий.

1. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперимент. и теор. физики. – 1951. – **51**, № 5. – С. 588–597.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. – 1951. – **44**. – С. 7–20.
3. Бардин Б.С., Маркеев А.П. Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, № 6. – С. 922–929.
4. Сейранян А.А., Сейранян А.П. Об устойчивости перевернутого маятника с вибрирующей точкой подвеса // Прикл. математика и механика. – 2006. – **70**, № 5. – С. 835–843.
5. Блехман И.И. Вибрационная механика. – М.: Наука, 1994. – 400 с.
6. Стрижаск Т.Г. Методы исследования динамических систем типа “маятник”. – Алма-Ата: Наука, 1981. – 253 с.
7. Неспирный В.Н., Королев В.А. Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 181–192.
8. Miles J.W. Stability of forced oscillations of a spherical pendulum // Quarterly of Appl. Math. – 1962. – **20**. – P. 21–32.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение маятника // Прикл. математика и механика. – 1975. – **39**, № 5. – С. 806–816.
10. Маркеев А.П. О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Там же. – 1999. – **63**, № 2. – С. 213–219.
11. Петров А.Г. Об уравнениях движения сферического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Докл. РАН. – 2005. – **405**, № 1. – С. 51–55.
12. Kral R., Kreuzer E., Wilmers C. Nonlinear oscillations of a crane ship // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1996. – **76(S4)**. – P. 5–8.
13. Ghigliazza R. M., Holmes, P. On the dynamics of cranes, or spherical pendula with moving supports // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2002. – **37**. – P. 1211–1221.
14. Abdel-Rahman E.M., Nayfeh A.H., Masoud Z.N. Dynamics and control of cranes: A review // J. of Vibration and Control – 2003. – **9**. – P. 863–908.

V.N. Nesporny, V.A. Korolyov

### Stationary modes of spherical pendulum with movable suspension point

The control problem for two-degree pendulum with oscillating suspension point is considered. The existence issue of inclined equilibrium states and rotations around vertical axis is considered. Control laws maintaining corresponding motions of pendulum are obtained. The problem of setting specified modes is solved.

**Keywords:** *spherical pendulum, movable suspension, impulsive control.*

В.М. Неспірний, В.О. Корольов

### Стационарні режими сферичного маятника з рухомою точкою підвісу

Розглянуто задачу керування двостепеневим маятником за допомогою коливань точки підвісу. Досліджено питання про існування похилих положень рівноваги та обертань навколо вертикальної осі. Одержано закони керування, що забезпечують відповідні рухи маятника. Розв'язано задачу встановлення вказаних режимів.

**Ключові слова:** *сферичний маятник, рухомий підвіс, імпульсне керування.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
vetal\_n@mail.ru

Получено 20.10.2011