УДК 531.38

©2011. **И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин**

НЕСИММЕТРИЯ В ЗАМКНУТЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Рассмотрена конечномерная модель замкнутого упругого стержня с круговой конфигурацией его упругой оси. Стержень моделировался с помощью системы n несимметричных твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Изучена возможность существования у такой системы режима равновесия во вращающейся системе координат. Получены необходимые условия устойчивости найденного режима относительного равновесия. Детально изучен случай четырех тел.

Ключевые слова: *конечномерная модель упругого стержня, сферический упругий шарнир, положение относительного равновесия, несимметрия, устойчивость.*

В работах [1–5] были найдены различные равновесные конфигурации систем n симметричных твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами. Одна из них – "круговая" – исследовалась многими авторами как в конечномерном случае (системы связанных твердых тел) [1, 2], так и в непрерывном (стержневые системы) [6–8].

В работе [9] рассмотрена система n одинаковых гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами, образующая "круговую" конфигурацию. Полагалось, что система, как целое, вращается со скоростью Ω вокруг неподвижной оси. Найдены условия существования и необходимые условия устойчивости положения равновесия изучаемой системы во вращающейся системе координат.

Поскольку на практике системы не всегда являются симметричными, представляется интересным изучить такие системы с учетом их несимметрии. В настоящей статье рассмотрена замкнутая система n твердых тел с моментами инерции $A, A+\varepsilon_k, B$, которая в случае $\varepsilon_k = 0$ дает систему n одинаковых гироскопов Лагранжа. Найдены условия, при которых введенная система допускает режим равновесия во вращающейся системе координат, и получены необходимые условия устойчивости такого равновесия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему n твердых тел, связанных упругими сферическими шарнирами, расположенными в точках O_k. Такие шарниры позволяют учитывать в сочленениях упругость как изгиба, так и кручения. Полагаем, что внешние силы и моменты отсутствуют, и, как следствие этого, общий центр масс системы тел C неподвижен. Свяжем с каждым телом S_k систему координат $C_kX_kY_kZ_k$, где C_k – центр масс тела S_k, а ось C_kZ_k направлена вдоль оси O_kO_{k+1}.

Введем неподвижную систему координат $CXYZ$ и осевую систему координат $CX'YZ'$, которая вращается вокруг неподвижной оси CY (орт $\mathbf{e}_y$) со скоростью Ω. В случае, когда все оси тел O_kO_{k+1} лежат в одной плоскости CXZ, ось CY направлена перпендикулярно этой плоскости.

Определим положение связанной системы координат $C_kX_kY_kZ_k$ по отношению к осевой $CX'Y'Z'$ углами Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$. Упругий момент в шарнире будем считать равным

$$\mathbf{L_k} = \kappa_1(\varkappa_k^1\mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2\mathbf{e}_k^2) + \kappa_2\varkappa_k^3\mathbf{e}_k^3, \tag{1}$$

где κ_1, κ_2 – соответственно жесткости изгиба и кручения; $\mathbf{e}_k^i$ $(i = 1, 2, 3;$ $k = \overline{1, n})$– орты связанной с телом S_k системы координат (орт $\mathbf{e}_k^3$ параллелен оси O_kO_{k+1}); $\boldsymbol{\varkappa}_k(\varkappa_k^1, \varkappa_k^2, \varkappa_k^3)$ – дискретный аналог вектора Дарбу, компоненты которого равны

$$\begin{gathered}\varkappa_{1k} = (\psi_k - \psi_{k-1})\cos\theta_k \sin\varphi_k + (\theta_k - \theta_{k-1})\cos\varphi_k,\\ \varkappa_{2k} = (\psi_k - \psi_{k-1})\cos\theta_k \cos\varphi_k - (\theta_k - \theta_{k-1})\sin\varphi_k,\\ \varkappa_{3k} = \varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1})\sin\theta_k.\end{gathered} \tag{2}$$

Тогда потенциальная энергия системы имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\kappa_1(\varkappa_{1k}^2 + \varkappa_{2k}^2) + \kappa_2\varkappa_{3k}^2\right]. \tag{3}$$

Такой выбор потенциальной энергии позволяет учесть геометрическую нелинейность объекта в предположении, что углы $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ могут принимать произвольные значения, а их разности $\psi_k - \psi_{k-1}, \theta_k - \theta_{k-1}, \varphi_k - \varphi_{k-1}$ малы.

После подстановки (2) в (3) имеем

$$\begin{gathered}\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{\kappa_1[(\psi_k - \psi_{k-1})^2\cos^2\theta_k + (\theta_k - \theta_{k-1})^2] +\\ +\kappa_2[\varphi_k - \varphi_{k-1} - (\psi_k - \psi_{k-1})\sin\theta_k]^2\}.\end{gathered} \tag{4}$$

В (4) входят значения углов $\psi_0, \theta_0, \varphi_0$, которые для замкнутых систем (при этом полагаем $O_{n+1} = O_1$) таковы [1]:

$$\psi_0 = \psi_n - 2\pi; \quad \theta_0 = \theta_n - 2\pi; \quad \varphi_0 = \varphi_n - 2\pi.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[m\dot{r}_{kc}^2 + Ap_k^2 + (A + \varepsilon_k)q_k^2 + Br_k^2\right], \tag{5}$$

где m – масса тела S_k; $A, A + \varepsilon_k, B$ – его моменты инерции; $\mathbf{r}_{kc}$ – расстояние от центра масс тела S_k до неподвижной точки C, а p_k, q_k, r_k – компоненты вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_k$ тела S_k в $C_kX_kY_kZ_k$, которая может быть представлена как $\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_k^r$, где $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_y$ – угловая скорость осевой системы координат, а $\boldsymbol{\omega}_k^r$ – угловая скорость связанной системы координат относительно осевой.

Компоненты абсолютной угловой скорости тела S_k, как функции углов Крылова и скорости вращения Ω, выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k &= (\dot\psi_k + \Omega)\cos\theta_k \sin\varphi_k + \dot\theta_k \cos\varphi_k, \\ q_k &= (\dot\psi_k + \Omega)\cos\theta_k \cos\varphi_k - \dot\theta_k \sin\varphi_k, \\ r_k &= \dot\varphi_k - (\dot\psi_k + \Omega)\sin\theta_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Если положить, что центр масс тела S_k – середина отрезка O_kO_{k+1}, и учесть неподвижность общего центра масс C, то, аналогично [1], получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{kc} &= \frac{h}{2}\{-(\boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{e}_k^3) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(2i-1)(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3) - \\ &-\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}[2(n-i)+1](\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3)\}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{nc} &= \frac{h}{2}\{-(\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{e}_n^3) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^3)\} \end{aligned} \tag{7}$$

Подстановка (6), (7) в (5) дает

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\{A'[(\dot\psi_j + \Omega)^2\cos^2\theta_j + \dot\theta_j^2] + B[\dot\varphi_j - \\ &-(\dot\psi_j + \Omega)\sin\theta_j]^2 + \varepsilon_k[(\dot\psi_k + \Omega)\cos\theta_k\cos\varphi_k - \dot\theta_k \sin\varphi_k] + \\ &+mc^2(\sum_{i=1}^{j} b_{ij}A_{ij} + \sum_{i=j+1}^{n} c_{ij}A_{ij})\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A' = A + mc^2, \quad A_{ij} = \dot\theta_i\dot\theta_j\cos\theta_i\cos\theta_j + (\dot\theta_i\dot\theta_j\sin\theta_i\sin\theta_j +$$
$$+\dot\psi_i\dot\psi_j\cos\theta_i\cos\theta_j)\cos(\psi_j - \psi_i) + (\dot\theta_i\dot\psi_j\sin\theta_i\cos\theta_j -$$
$$-\dot\theta_j\dot\psi_i\cos\theta_i\sin\theta_j)\sin(\psi_j - \psi_i);$$
$$b_{ij} = 4(i-1) + \frac{1}{n}[2j - 1 - 2i(2i-1)] + \frac{1}{n^2}(2j-1)(2i-1)(i-j);$$
$$c_{ij} = 4j + \frac{1}{n}(4j^2 + 2j + 2i - 8ij - 1) + \frac{1}{n^2}(i-j)(2i-1)(2j-1).$$

Поскольку система замкнута, то, как и в [1],

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum_{k=1}^{n} h_k \sin\psi_k\cos\theta_k = 0, \\ f_2 &= \sum_{k=1}^{n} h_k\sin\theta_k = 0, \quad f_3 = \sum_{k=1}^{n} h_k\cos\psi_k\cos\theta_k = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Уравнения движения системы. Положение относительного равновесия. Уравнения движения данной системы, как и в [1–3], могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа второго рода с учетом связей:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}-\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial q_i}=0.$$

Здесь $\lambda_k \;\; (k=1,2,3)$ – множители Лагранжа, кинетическая энергия имеет вид (8), потенциальная – (4), а функции f_k $(k=1,2,3)$ – (9). Эти уравнения могут быть представлены так

$$[(A^{'}+\varepsilon_k\cos^2\varphi_k)cos^2\theta_k+B\sin^2\theta_k]\ddot{\psi}_k-B\ddot{\varphi}_k\sin\theta_k-\frac{\varepsilon_k}{2}\ddot{\theta}_k\cos\theta_k\sin 2\varphi_k+$$
$$+(\dot{\psi}_k+\Omega)[\dot{\theta}_k(B-A^{'}-\varepsilon_k\cos^2\varphi_k)\sin 2\theta_k-\varepsilon_k\dot{\varphi}_k\cos^2\theta_k\sin 2\varphi_k]-$$
$$-B\dot{\varphi}_k\dot{\theta}_k\cos\theta_k+\frac{\varepsilon_k}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta_k\sin 2\varphi_k-\varepsilon_k\dot{\theta}_k\dot{\varphi}_k\cos\theta_k\cos 2\varphi_k+$$
$$+\mu\cos\theta_k\Big\{(2k-1)\sum_{j=k+1}^{n}(2n-2j+1)F_{kj}+(2n-2k+1)\sum_{j=1}^{k}(2j-1)F_{kj}\Big\}+$$
$$+k_1[(\psi_k-\psi_{k-1})\cos^2\theta_k-(\psi_{k+1}-\psi_k)\cos^2\theta_{k+1}]-$$
$$-k_2\{\sin\theta_k[\varphi_k-\varphi_{k-1}-(\psi_k-\psi_{k-1})\sin\theta_k]-\sin\theta_{k+1}[\varphi_{k+1}-\varphi_k-$$
$$-(\psi_{k+1}-\psi_k)\sin\theta_{k+1}]\}+\lambda_1\cos\psi_k\cos\theta_k-\lambda_3\sin\psi_k\cos\theta_k=0;$$

$$[A'+\varepsilon_k\sin^2\varphi_k]\ddot{\theta}_k-\frac{\varepsilon_k}{2}\ddot{\psi}_k\cos\theta_k\sin 2\varphi_k+(\dot{\psi}_k+\Omega)^2\left[A'+\frac{\varepsilon_k}{2}\cos^2\varphi_k-\frac{B}{2}\right]\sin 2\theta_k-$$
$$-\varepsilon_k\dot{\theta}_k\dot{\varphi}_k\sin 2\varphi_k+\frac{\varepsilon_k}{2}(\dot{\psi}_k+\Omega)^2\cos 2\theta_k\cos^2\varphi_k-\varepsilon_k\dot{\theta}_k\dot{\varphi}_k\sin 2\varphi_k+\qquad(10)$$
$$+(\dot{\psi}_k+\Omega)\dot{\varphi}_k(B-\varepsilon_k\cos 2\varphi_k)\cos\theta_k-\mu\Big\{(2k-1)\sum_{j=k+1}^{n}(2n-2j+1)G_{kj}+$$
$$+(2n-2k+1)\sum_{j=1}^{k}(2j-1)G_{kj}\Big\}-k_1[\sin 2\theta_k(\psi_k-\psi_{k-1})^2/2+\theta_{k+1}-2\theta_k+\theta_{k-1}]-$$
$$-k_2\cos\theta_k[\varphi_k-\varphi_{k-1}-(\psi_k-\psi_{k-1})\sin\theta_k](\psi_k-\psi_{k-1})-$$
$$-\lambda_1\sin\psi_k\sin\theta_k+\lambda_2\cos\theta_k-\lambda_3\cos\psi_k\sin\theta_k=0;$$

$$B(\ddot{\varphi}_k-\ddot{\psi}_k\sin\theta_k)-(B-\varepsilon_k\cos 2\varphi_k)(\dot{\psi}_k+\Omega)\dot{\theta}_k\cos\theta_k+$$

$$+\frac{\varepsilon_k}{2}[(\dot\psi_k+\Omega)^2\cos^2\theta_k-\dot\theta_k^2]\sin 2\varphi_k-k_2[\varphi_{k+1}-2\varphi_k+\varphi_{k-1}+$$
$$+(\psi_k-\psi_{k-1})\sin\theta_k-(\psi_{k+1}-\psi_k)\sin\theta_{k+1}]=0$$
$$(k=\overline{1,n}).$$

Здесь $\quad \mu=mc^2/n,\;\; \psi_{n+1}=\psi_1+2\pi,\;\; \theta_{n+1}=\theta_1+2\pi,\;\; \varphi_{n+1}=\varphi_1+2\pi;$

$$F_{kj}=\ddot\psi_j\cos\theta_j\cos(\psi_k-\psi_j)+\ddot\theta_j\sin\theta_j\sin(\psi_k-\psi_j)-$$
$$-2(\dot\psi_j+\Omega)\dot\theta_j\sin\theta_j\cos(\psi_k-\psi_j)+[\dot\theta_j^2+(\dot\psi_j+\Omega)^2]\cos\theta_j\sin(\psi_k-\psi_j);$$
$$G_{kj}=\ddot\theta_j[\cos\theta_j\cos\theta_k+\sin\theta_j\sin\theta_k\cos(\psi_k-\psi_j)]-\ddot\psi_j\cos\theta_j\sin\theta_k\sin(\psi_k-\psi_j)+$$
$$+\dot\theta_j^2[\cos\theta_j\sin\theta_k\cos(\psi_k-\psi_j)-\sin\theta_j\cos\theta_k]+2(\dot\psi_j+\Omega)\dot\theta_j\sin\theta_j\sin\theta_k\sin(\psi_k-\psi_j)+$$
$$+(\dot\psi_j+\Omega)^2\cos\theta_j\sin\theta_k\cos(\psi_k-\psi_j).$$

Уравнения (10) допускают режим относительного равновесия

$$\psi_k=\psi_k^0,\quad \theta_k=0,\quad \varphi_k=\varphi_k^0,\quad \dot\psi_k=\dot\theta_k=\dot\varphi_k=0 \tag{11}$$

при условиях

$$\begin{gathered}\mu(2k-1)\sum_{j=k+1}^{n}[(2n-2j+1)\Omega^2\sin(\psi_k^0-\psi_{k-1}^0)+\\ +\kappa_1(\psi_{k+1}^0-2\psi_k^0+\psi_{k-1}^0)+\lambda_1^0\cos\psi_k^0-\lambda_3^0\sin\psi_k^0=0;\end{gathered} \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\psi_k^0=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\cos\psi_k^0=0; \tag{13}$$

$$\kappa_2(\varphi_k^0-\varphi_{k-1}^0)(\psi_k^0-\psi_{k-1}^0)=\lambda_2^0; \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_k\Omega^2\sin 2\varphi_k^0+\kappa_2(\varphi_{k+1}^0-2\varphi_k^0+\varphi_{k-1}^0)=0. \tag{15}$$

Условия (12), (13), определяющие начальные углы изгиба и множители Лагранжа, остались такими же, как и в случае симметричной системы [9] (они не зависят от ε_k), а условия на начальные углы кручения φ_k^0 изменились.

Система (12), (13) в случае четного числа тел ($n=2N$) допускает решение

$$\psi_k^0=2\pi k/n+\alpha_1, \tag{16}$$

$$\lambda_1^0=-n\mu\Omega^2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n},\qquad \lambda_3^0=-n\mu\Omega^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}. \tag{17}$$

Здесь α_1 – произвольная постоянная. Условия (14) – (15) будут выполнены при $\varphi_k^0=0$ и $\lambda_2^0=0$.

Отметим, что в случае $\varphi_k^0 = \pi kn/4$ уравнения (15) также будут удовлетворены, но при этом увеличение количества тел приводит к неограниченному увеличению крутки в системе, что противоречит физическому смыслу.

В отличие от [1], присутствие несимметрии в системе привело к условию

$$\varphi_k^0 = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \tag{18}$$

Далее будем рассматривать режим относительного равновесия (10) с учетом (18).

Итак, установлено, что уравнения движения системы четного числа тел имеют решение, описывающее относительное положение равновесия, в котором все оси симметрии тел лежат в одной плоскости, и при этом углы ψ_k^0 определяются из (16), а φ_k^0 – из (18). Получим необходимые условия устойчивости найденного положения равновесия в случае, когда число тел в системе равно четырем.

3. Уравнения возмущенного движения для четырех тел. Пусть $n = 4$. Тогда уравнения движения системы (10) допускают решение

$$\begin{gathered}\dot\psi_k^0 = \dot\theta_k^0 = \dot\varphi_k^0 = 0, \quad \theta_k^0 = \varphi_k^0 = 0, \quad \psi_k^0 = \frac{\pi k}{2}, \quad k = \overline{1, 4}, \\ \lambda_1^0 = \lambda_3^0 = -4\mu\Omega^2, \qquad \lambda_2^0 = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Система (10), линеаризованная в окрестности решения (19), может быть представлена как

$$\begin{gathered}(A' + \varepsilon_k)\ddot\psi_k + \mu\{(2k-1)\sum_{j=k+1}^{4}(9-2j)[C_{kj}^0\ddot\psi_j + 2\Omega S_{kj}^0\dot\psi_j + \Omega^2 C_{kj}^0(\psi_k - \psi_j)] + \\ +(9-2k)\sum_{j=1}^{k}(2j-1)[C_{kj}^0\ddot\psi_j + 2\Omega S_{kj}^0\dot\psi_j + \Omega^2 C_{kj}^0(\psi_k - \psi_j)]\} + \\ +\kappa_1(-\psi_{k-1} + 2\psi_k - \psi_{k+1}) - \lambda_1^0 \sin\psi_k^0\psi_k - \lambda_3^0\cos\psi_k^0\psi_k + \lambda_1\cos\psi_k^0 - \lambda_3\sin\psi_k^0 = 0;\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}A'(\ddot\theta_k + \Omega^2\theta_k) + B\Omega(\dot\varphi_k - \Omega\theta_k) + \varepsilon_k[-\Omega\dot\varphi_k + \Omega^2\theta_k) + \\ +\mu[(2k-1)\sum_{j=k+1}^{4}(9-2j)(\ddot\theta_j + \Omega^2 C_{kj}^0\theta_k)(9-2k)\sum_{j=1}^{k}(2j-1)(\ddot\theta_j + \Omega^2 C_{kj}^0\theta_k)] - \\ -\kappa_1(\Gamma^2\theta_k + \theta_{k+1} - \theta_k + \theta_{k-1}) - \kappa_2\Gamma(\varphi_k - \varphi_{k-1} - \Gamma\theta_k) - \\ -\lambda_1^0\sin\psi_k^0\theta_k - \lambda_3^0\cos\theta + \lambda_2 = 0;\end{gathered} \tag{21}$$

$$B(\ddot\varphi_k - \Omega\dot\theta_k) + \varepsilon_k(\Omega\dot\theta_k + \Omega^2\varphi_k) -$$

$$-\kappa_2[\varphi_{k+1} - 2\varphi_k + \varphi_{k-1} + \Gamma(\theta_k - \theta_{k+1})] = 0 \quad (k = \overline{1,4}). \tag{22}$$

Здесь $\Gamma = \pi/2$, $C^0_{kj} = \cos(\psi^0_k - \psi^0_j)$, $S^0_{kj} = \sin(\psi^0_k - \psi^0_j)$.

Уравнения (20) содержат в качестве неизвестных только углы ψ_k, которые определяют форму упругой линии. Из уравнений замкнутости (9), линеаризованных в окрестности решения (19), получаем

$$\psi_3 = \psi_1, \quad \psi_4 = \psi_2, \quad \theta_4 = -\theta_1 - \theta_2 - \theta_3.$$

После исключения этих переменных и реакций связи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ из уравнений (20) имеем

$$\begin{gathered}(2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)\ddot{\psi}_1 + (2a + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)\ddot{\psi}_2 = 0,\\ (2a + \varepsilon_1 + \varepsilon_3)\ddot{\psi}_1 - (2a + \varepsilon_2 + \varepsilon_4)\ddot{\psi}_2 + 8\kappa_1(\psi_1 - \psi_2) = 0,\end{gathered} \tag{23}$$

где $a = A' + 8\mu$.

Рассматривая (23), как систему относительно переменных ψ_1 и $y_0 = \psi_1 - \psi_2$, получаем после исключения циклической переменной ψ_1 уравнение для определения y_0:

$$\ddot{y}_0 + by_0 = 0, \tag{24}$$

где $b = b(\varepsilon_k, \kappa_1, a) > 0$. Из (24) следует, что соответствующее ему характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни и необходимые условия устойчивости по переменной y_0 выполнены. Значит, в данном случае форма моделируемой упругой линии устойчива.

Выделим два частных случая.

$$1. \qquad \varepsilon_k = \varepsilon, \quad k = 1, 2, 3, 4; \tag{25}$$

$$2. \ \ \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0. \tag{26}$$

В первом случае получаем замкнутую систему, состоящую из четырех несимметричных одинаковых тел, а во втором – из одного несимметричного тела и трех одинаковых гироскопов Лагранжа. Определим для этих систем необходимые условия устойчивости относительного положения равновесия.

4. Случай одинаковых несимметричных тел. Пусть ε_k $(k = \overline{1,4})$ удовлетворяет условию (25). Тогда система (23) приводится к виду

$$\ddot{y}_1 = 0, \qquad (a + \varepsilon)\ddot{y}_0 + 2\kappa_1 y_0 = 0, \tag{27}$$

здесь $y_1 = \psi_1 + \psi_2, y_0 = \psi_1 - \psi_2$.

Отсюда, как и в общем случае, следует наличие циклической переменной y_1, характеризующей движение системы как целого, и устойчивость по переменной y_0, определяющей форму замкнутой оси.

Из суммы четырех уравнений (22) получаем уравнение, зависящее только от суммы углов φ_k:

$$B\ddot{x}_s + \varepsilon\Omega^2 x_s = 0, \tag{28}$$

где $x_s = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$ – переменная, характеризующая вращение системы как целого.

В зависимости от знака ε, из (28) имеем: при $\varepsilon > 0$, то необходимые условия устойчивости выполнены, а при $\varepsilon < 0$ – движение неустойчиво. Полученный результат соответствует случаю вращения одного твердого тела вокруг большей либо средней оси [10].

Остальные уравнения систем (21) и (22) после исключения θ_4 и x_s могут быть преобразованы к виду

$$\begin{gathered}
(A' + a)\ddot{z}_1 + 2(D + \varepsilon\Omega^2 + 2\varkappa_1)z_1 + (B - \varepsilon)\Omega\dot{x} - 2\varkappa_2\Gamma x = 0,\\
B\ddot{x} - 2(B - \varepsilon)\Omega\dot{z}_1 + \varepsilon\Omega^2 x + 4\varkappa_2(x - \Gamma z_1) = 0,
\end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}
a\ddot{z}_0 + (D + \varepsilon\Omega^2)z_0 - (B - \varepsilon)\Omega\left(\frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{2} + \dot{x}_2\right) - \varkappa_2\Gamma x_0 = 0,\\
a\ddot{\theta} + (D + \varepsilon\Omega^2)\theta + (B - \varepsilon)\Omega\left(\frac{\dot{x} + \dot{x}_0}{2} + \dot{x}_2\right) - \varkappa_2\Gamma(x + 2x_2) = 0,\\
B\ddot{x}_0 - (B - \varepsilon)\Omega(\dot{\theta} + \dot{z}_0) + (2\varkappa_2 + \varepsilon\Omega^2)x_0 - 2\varkappa\Gamma z_0 = 0,\\
B\ddot{x}_2 + (\varepsilon\Omega^2 + 2\varkappa_2)x_2 + \frac{(B - \varepsilon)\Omega}{2}(2\dot{z}_1 + \dot{z}_0 - \dot{\theta}) - \varkappa_2 x + \varkappa_2\Gamma(2z_1 - \theta) = 0.
\end{gathered} \tag{30}$$

Здесь введены новые переменные и обозначения:

$$z_1 = \theta_1 + \theta_3, \quad x = x_1 + x_3,$$

$$z_0 = \theta_1 - \theta_3, \quad \theta = 2\theta_2 + z_1, \quad x_0 = x_1 - x_3, \; x_k = \varphi_k - \varphi_{k-1} \; (\varphi_0 = \varphi_4);$$
$$A' = A + mc^2, \; \mu = mc^2/4, \; D = \Omega^2(a - B) - k_1(\Gamma^2 - 2) + k_2\Gamma^2.$$

Разыскивая решение системы (29), (30) в виде разложения переменных по $e^{\lambda t}$, получаем характеристическое уравнение в виде

$$\Delta = \Delta_2\Delta_4 = \sum_{i=0}^{2}(a_i\lambda^{2i})\sum_{j=0}^{4}(b_j\lambda^{2j}) = 0, \tag{31}$$

где
$$\Delta_2 = \tilde{\varepsilon}(\alpha + 1)\nu^2 + \{[2(\alpha - \rho)\tilde{\varepsilon} + 2\rho^2 + (\alpha + 1)\rho]\omega^2 +,$$

$$+2[\varkappa(\gamma + 2) - \gamma + 2]\tilde{\varepsilon} + 4\varkappa(\alpha + 1)\}\nu + 2\rho(\alpha - \tilde{\varepsilon} + \rho)\omega^4 +$$

$$+2\{4\varkappa(\alpha - \tilde{\varepsilon}) + \rho[\varkappa(\gamma + 6) - \gamma + 2]\}\omega^2 - 8\varkappa(\gamma - 2),$$

$$\Delta_4 = \nu^4\tilde{\varepsilon}^2\alpha^2 + \{[-2\alpha(-\alpha+\rho)\tilde{\varepsilon}^2 + 2\alpha\rho(\rho+\alpha)\tilde{\varepsilon}]\omega^2 + 2\alpha(-\gamma+2\varkappa+\varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon}^2 +$$
$$+4\alpha^2\varkappa\tilde{\varepsilon}\}\nu^3 + \{[(\alpha^2+\rho^2-4\alpha\rho)\tilde{\varepsilon}^2 - 2\rho(\rho+\alpha)(\rho-2\alpha)\tilde{\varepsilon} + \rho^2(\rho+\alpha)^2]\omega^4 +$$
$$+[(-4\rho\varkappa+2\rho\gamma+2\alpha\varkappa\gamma-2\rho\varkappa\gamma-2\alpha\gamma)\tilde{\varepsilon}^2 + (8\rho\alpha\varkappa + +2\rho^2\varkappa\gamma - 4\rho\alpha\gamma +$$
$$+4\rho^2\varkappa - 2\rho^2\gamma + 8\alpha^2\varkappa + 4\rho\alpha\varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon} + 4\rho\varkappa\alpha(\rho+\alpha)]\omega^2 + (-\gamma+2\varkappa+\varkappa\gamma)^2\tilde{\varepsilon}^2 +$$
$$+4\varkappa\alpha(\varkappa\gamma+2\varkappa-2\gamma)\tilde{\varepsilon} + 4\varkappa^2\alpha^2\}\nu^2 + \{[2\rho(-\alpha+\rho)\tilde{\varepsilon}^2 -$$
$$-2\rho(\rho+\alpha)(2\rho-\alpha)\tilde{\varepsilon} + 2\rho^2(\rho+\alpha)^2]\omega^6 + [(-2\rho\varkappa\gamma+2\rho\gamma-4\varkappa\alpha)\tilde{\varepsilon}^2 +$$
$$+[4\rho\alpha\varkappa\gamma - 4\rho\alpha\gamma - 8\rho^2\varkappa + 4\alpha^2\varkappa)\tilde{\varepsilon} + 2\rho(\rho+\alpha)(4\rho\varkappa - \rho\gamma + \rho\varkappa\gamma +$$
$$+4\varkappa\alpha)]\omega^4 + [4\tilde{\varepsilon}^2\varkappa\gamma + 2\gamma(-4\varkappa\alpha + \varkappa^2\rho\gamma + 2\varkappa^2\alpha + \rho\gamma + 2\varkappa^2\rho - 4\rho\varkappa - 2\rho\varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon} +$$
$$+4\varkappa(\rho^2\varkappa\gamma + 2\rho^2\varkappa + 4\rho\alpha\varkappa + 2\alpha^2\varkappa + \rho\alpha\varkappa\gamma - \rho^2\gamma - 2\rho\alpha\gamma)]\omega^2 -$$
$$-4\gamma\varkappa(-\gamma+2\varkappa+\varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon} - 8\varkappa^2\alpha\gamma\}\nu + [\rho^2\tilde{\varepsilon}^2 - 2\rho^2(\rho+\alpha)\tilde{\varepsilon} + \rho^2(\rho+\alpha)^2]\omega^8 +$$
$$+[4\tilde{\varepsilon}^2\rho\varkappa - 2\rho(6\rho\varkappa + \rho\varkappa\gamma - \rho\gamma + 4\varkappa\alpha)\tilde{\varepsilon} + 2(4\rho\varkappa + 2\varkappa\alpha + \rho\varkappa\gamma - \rho\gamma)\rho(\rho+\alpha)]\omega^6 +$$
$$+[4\varkappa^2\tilde{\varepsilon}^2 - 4\varkappa(4\rho\varkappa + 2\varkappa\alpha + \rho\varkappa\gamma - 2\rho\gamma)\tilde{\varepsilon} - 12\rho^2\varkappa\gamma - 8\rho\alpha\varkappa\gamma +$$
$$+16\rho^2\varkappa^2 + 16\alpha\rho\varkappa^2 + 8\rho^2\varkappa^2\gamma + 4\varkappa^2\alpha^2 + 4\alpha\rho\varkappa^2\gamma + \rho^2\varkappa^2\gamma^2 -$$
$$-2\rho^2\varkappa\gamma^2 + \rho^2\gamma^2]\omega^4 + [8\varkappa^2\tilde{\varepsilon}\gamma - 4\varkappa\gamma(4\rho\varkappa + 2\varkappa\alpha + \rho\varkappa\gamma - \rho\gamma)]\omega^2 + 4\varkappa^2\gamma^2.$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$\nu = \frac{A}{k_1}\lambda^2, \quad \varkappa = \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega^2 = \frac{A\Omega^2}{k_1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{B}{A}, \quad \rho = \frac{\varepsilon}{A}, \quad \alpha = \frac{a}{A}, \text{ а } \gamma = \Gamma^2 - 2 > 0.$$

Необходимые условия устойчивости изучаемого решения системы (29), (30) будут выполнены, если характеристическое уравнение (31) имеет отрицательные действительные корни, т.е. когда в $\Delta_2(\nu)$ и $\Delta_4(\nu)$

$$1. \ a_i > 0 \ \ (i = \overline{0,2}), \quad b_j > 0 \ \ (j = \overline{0,4}); \tag{32}$$

$$2. \ a_1^2 - 4a_2a_0 > 0; \tag{33}$$

и выполнен критерий Покровского [11] для $\Delta_4(\nu)$:

$$3. \ F_1 > 0, \qquad 12F_1^2 - b_4^2F_2 > 0, \qquad F_2^3 - 27(F_3 - b_0F_1) > 0. \tag{34}$$

Здесь
$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}b_3^2 - \frac{1}{3}b_2b_4\right), \qquad F_2 = b_4b_0 - \frac{1}{4}b_2b_3 + \frac{1}{12}b_2^3,$$

$$F_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{6}b_1b_2b_3 - \frac{1}{2}b_1^2b_4 - \frac{1}{27}b_2^3\right).$$

Найдем области выполнения неравенств (32)–(34) при учете малости параметров $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $0 < \rho << \tilde{\varepsilon}$. Начнем с анализа неравенства (32). Из вида коэффициентов уравнений $\Delta_2(\nu) = 0$, $\Delta_4(\nu) = 0$ следует, что при сделанных предположениях о малости $\rho, \tilde{\varepsilon}$ коэффициенты a_i, b_j $(i = 0, 1, 2;$ $j = 0, 2, 3, 4)$ всегда больше нуля. Коэффициент b_1 будет положительным при

$$\omega^2 > \frac{\gamma}{\alpha} + \rho R_1(\tilde{\varepsilon}, \alpha, \varkappa).$$

Неравенство (33) приводится к виду

$$\{4\rho^4 + 4(1 - 2\tilde{\varepsilon} + \alpha)\rho^3 + [4\tilde{\varepsilon}^2 - 4(3+\alpha)\tilde{\varepsilon} + (\alpha+1)^2]\rho^2 + 4[2\tilde{\varepsilon}^2 - \alpha(\alpha+1)\tilde{\varepsilon}]\rho +$$
$$+4\tilde{\varepsilon}^2\alpha^2\}\omega^4 + \{[8(2\varkappa + 2 + \varkappa\gamma - \gamma)\tilde{\varepsilon} + 16\varkappa(\alpha+1)]\rho^2 + 8[(-2 + \gamma - \varkappa\gamma - 2\varkappa)\tilde{\varepsilon}^2 -$$
$$-4(\alpha+1)(-\gamma + \varkappa\gamma + 2 + 14\varkappa)\tilde{\varepsilon} + 8\varkappa(\alpha+1)^2)]\rho + 8(2\alpha - \alpha\gamma + 4\varkappa + 6\varkappa\alpha + \alpha\varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon}^2 -$$
$$-16\alpha\varkappa(\alpha+1)\tilde{\varepsilon}\}\omega^2 + 4(\varkappa\gamma + 2\varkappa - \gamma + 2)^2\tilde{\varepsilon}^2 + 16\varkappa(\alpha+1)(\varkappa\gamma + 2\varkappa - 2 + \gamma)\tilde{\varepsilon} +$$
$$+16\varkappa^2(\alpha+1)^2 > 0.$$

При $\rho << \tilde{\varepsilon}$ оно выполняется для всех значений ω.

Неравенства (34) могут быть представлены следующим образом:

$$f_1(\omega^2) = \sum_{i=1}^{2} d_{1i}(\tilde{\varepsilon}, \rho, \varkappa)\omega^{2i} > 0,$$

$$f_2(\omega^2) = \left(\rho^2 + (-\tilde{\varepsilon} + \alpha)\rho + \tilde{\varepsilon}\alpha\right)\omega^2 + (-\gamma + 2\varkappa + \varkappa\gamma)\tilde{\varepsilon} + 2\varkappa\alpha > 0,$$

$$f_3(\omega^2) = \sum_{i=1}^{6} d_{3i}(\tilde{\varepsilon}, \rho, \varkappa)\omega^{2i} > 0.$$

Сделанные предположения относительно малых параметров $\rho, \tilde{\varepsilon}$ позволили установить, что первые два неравенства выполняются всегда, а последнее – при условии

$$\omega^2 > \frac{\gamma}{\alpha} + \rho R_2(\tilde{\varepsilon}, \alpha, \varkappa). \tag{35}$$

Таким образом, анализ полученных условий (32)–(34) при учете малости $\rho, \tilde{\varepsilon}$ позволил оценить снизу значения скорости ω, при которых необходимые условия устойчивости выполнены. Отметим, что для случая симметричных тел при отсутствии начальной крутки условия (35) совпадают с полученными в [9].

Соотношения (32)–(34), определяющие область устойчивости в отсутствии предположения $\rho << \tilde{\varepsilon}$, могут быть проанализированы численно. Так, на рис. 1 при $\tilde{\varepsilon} = 0.05, \varkappa = 0.9$ область устойчивости в плоскости параметров ρ, u $(u = \omega^2)$ лежит справа от кривой 1.

Следует отметить появление особой кривой 2, на которой характеристическое уравнение (31) имеет кратные корни. Данный случай требует дополнительного исследования.

На рис. 2 показаны границы области устойчивости решения (11) в плоскости параметров ρ, u при различных значениях ρ и $\varkappa = 0.9$.

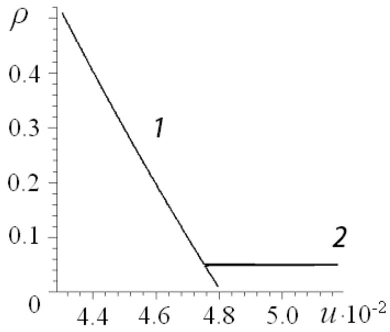

Рис. 1

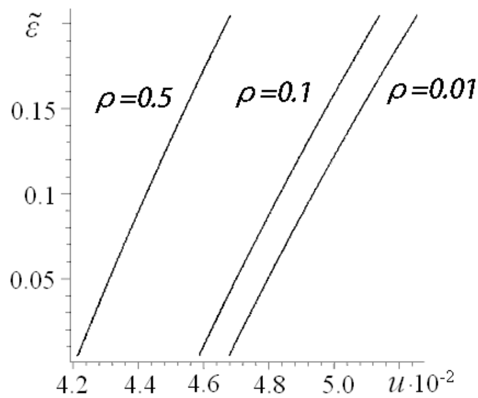

Рис. 2

5. Случай одного несимметричного тела. Пусть теперь ε_k $(k = \overline{1,4})$ удовлетворяют условию (26). При этом уравнения (23) для переменных ψ_1, ψ_2 будут такими

$$\begin{gathered}(2a+\varepsilon)\ddot{\psi}_1 + 2a\ddot{\psi}_2 = 0,\\ (2a+\varepsilon)\ddot{\psi}_1 - 2a\ddot{\psi}_2 + 8\kappa_1(\psi_1 - \psi_2) = 0.\end{gathered} \tag{36}$$

После исключения из (36) циклической переменной ψ_1 и введения новой переменной $y_0 = \psi_1 - \psi_2$ имеем

$$\frac{a(2a+\varepsilon)}{4a+\varepsilon}\ddot{y}_0 + 2\kappa_1 y_0 = 0. \tag{37}$$

Из (37), как и в предыдущем случае, следует устойчивость по переменной $y_0 = \psi_1 - \psi_2$, определяющей форму оси моделируемого стержня.

Система уравнений (21), (22) с учетом (9) приводится к виду

$$B\ddot{x}_s + \Omega_\varepsilon\{\dot{z}_0 + \dot{z}_1 + \Omega[(x_0 + x_s)/2 - x_2]\} = 0;$$

$$(a+A')\ddot{z}_1 + 2(D+2\kappa_1)z_1 + B\Omega\dot{x} - 2\kappa_2\Gamma x + \Omega_\varepsilon[\Omega(z_0+z_1) + \dot{x}_2 - (\dot{x}_0 - \dot{x}_s)/2] = 0;$$

$$B\ddot{x} - 2B\Omega\dot{z}_1 + 4\kappa_2 x - 4\kappa_2\Gamma z_1 + \Omega_\varepsilon\{\Omega[(x_0+x_s)/2 - x_2] + \dot{z}_0 + \dot{z}_1\} = 0;$$

$$a\ddot{z}_0 + Dz_0 - B\Omega[\dot{x}_2 + (x - x_0)/2] - \kappa_2\Gamma x_0 + \Omega_\varepsilon[-(\dot{x}_0+\dot{x}_s)/2 + \dot{x}_2 + \Omega(z_0+z_1)] = 0;$$

$$a\ddot{\theta} + D\theta + B\Omega[\dot{x}_2 + (\dot{x}+\dot{x}_0)/2] - \kappa_2\Gamma(x + 2x_2) = 0; \tag{38}$$

$$B\ddot{x}_0 - B\Omega(\dot{z}_0 + \dot{\theta}) + 2\kappa_2(x_0 - \Gamma z_0) + \Omega_\varepsilon\{\Omega[(x_0+x_s)/2 - x_2] + \dot{z}_0 + \dot{z}_1\} = 0;$$

$$B\ddot{x}_2 + B\Omega(2\dot{z}_1 + \dot{z}_0 - \dot{\theta})/2 - \kappa_2(x - 2x_2) + \kappa_2\Gamma(2z_1 - \theta) -$$

$$-\Omega_\varepsilon\{\Omega[(x_0+x_s)/2-x_2]+\dot z_0+\dot z_1\}=0,$$

где $\Omega_\varepsilon=\varepsilon\Omega/2$.

Характеристическое уравнение системы (38) имеет вид

$$\Delta=\sum_{i=0}^{7}(c_i\lambda^{2i}),$$

где c_i – полиномы от параметров $\omega,\rho,\tilde\varepsilon$:

$$c_7=4\tilde\varepsilon^4\alpha^2(\alpha+1),\quad c_6=\sum_{i=0}^{1}\beta_i^{(6)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},\quad c_5=\sum_{i=0}^{2}\beta_i^{(5)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},$$

$$c_4=\sum_{i=0}^{3}\beta_i^{(4)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},c_3=\sum_{i=0}^{4}\beta_i^{(3)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},\quad c_2=\sum_{i=0}^{4}\beta_i^{(2)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},$$

$$c_1=\sum_{i=0}^{4}\beta_i^{(1)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i},\quad c_0=\sum_{i=0}^{4}\beta_i^{(0)}(\rho,\tilde\varepsilon)\omega^{2i}.$$

Необходимые условия устойчивости решения (11) будут выполнены, когда характеристическое уравнение $\Delta=0$ имеет только действительные отрицательные корни. Исследования областей устойчивости в данном случае были проведены численно. Результаты расчетов показали, что нижняя граница области устойчивости положения равновесия решения (11) определена неравенством

$$\omega^2>\frac{\gamma}{\alpha-\varepsilon}+\rho R(\alpha,\varkappa,\varepsilon).$$

Таким образом, если исключить случай кратных корней характеристического уравнения, области устойчивости отличаются на величины порядка ρ от найденных ранее для симметричных тел [9].

1. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 33–39.
2. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 94–103.
3. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // Там же. – 2007. – Вып. 37. – С. 145–151.
4. *Bolgrabskaya I.A., Shchepin N.N.* Finite dimensional model of closed elastic systems// Proc. of the 9th conf. of dynamical systems – theory and applications (December 17–20, 2007, Lodz, Poland). – 2007. – **2**. – P. 135–143.
5. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Устойчивость положения равновесия замкнутой системы тел конфигурации “восьмерка”// Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 151–160.
6. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // Physiica. – 1986. – 21D. – P. 213–226.

7. *Бенхэм Дж.* Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
8. *Hoffman K.A.* Methods for determining stability in continuum elastic-rod models of DNA // Phil. Trans. R. Lond. A. – 2004. – **362**. – P. 1301–1315.
9. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Необходимые условия устойчивости относительного равновесия замкнутой "круговой" системы // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 94–103.
10. *Покровский П.М.* Об алгебраических уравнениях в связи с аналитическими функциями Вейерштрасса // Тр. отд-ния физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1883. – **6**, вып. 1. – С. 26–42.

I.A. Bolgrabskaya, N.N. Shchepin

Asymmetry in the closed elastic-systems

The finite dimensional model of the closed elastic rod with a circular configuration of its elastic axis is consider. The rod was modeled by means of system consisting of n nonsymmetric rigid bodies connected by elastic spherical joints. The possibility of equilibrium existence of such system in rotating co-ordinate system is studied. Necessary stability conditions of the relative equilibrium of the considered regime are obtained. The case of four bodies is studied in details.

Keywords: *finite dimensional model of the elastic rod, elastic spherical joint, relative equilibrium, asymmetry, stability.*

І.О. Болграбська, М.М. Щепін

Несиметрія в замкнених пружних системах

Розглянуто скінченновимірну модель замкненого пружного стержня із круговою конфігурацією його пружної осі. Стержень моделювався за допомогою системи n несиметричних твердих тіл, сполучених пружними сферичними шарнірами. Вивчено можливість існування у такої системи режиму рівноваги в обертовій системі координат. Отримано необхідні умови стійкості знайденого режиму відносної рівноваги. Детально вивчено випадок чотирьох тіл.

Ключові слова: *скінченновимірна модель пружного стержня, сферичний пружний шарнір, положення відносної рівноваги, несиметрія, стійкість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 01.10.11

bolg@iamm.ac.donetsk.ua