

УДК 531.38

©2011. М.П. Харламов, П.Е. Рябов, А.Ю. Савушкин, Г.Е. Смирнов

ТИПЫ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

В соответствии с классификацией, принятой в теории интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем, вычислены типы критических точек всех рангов интегрального отображения задачи о движении гири Ковалевской в двойном силовом поле.

Ключевые слова: гири Ковалевской, двойное поле, тип критической точки.

1. Исходные соотношения. Обобщение случая С.В. Ковалевской, найденное благодаря вкладу авторов работ [1–3], до сих пор мало изучено. Система, описывающая движение гири Ковалевской с условиями типа Ковалевской в двух силовых полях (например, поле силы тяжести и магнитном), является непригодной интегрируемой гамильтоновой системой с тремя степенями свободы. Соответствующие уравнения Эйлера–Пуассона запишем в виде

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda) + \beta_3, & 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2, \\ \dot{\alpha}_2 &= \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\beta}_2 &= \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3, \\ \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned}$$

Здесь $\omega_i, \alpha_j, \beta_k$ – компоненты в подвижных осях вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости тела и векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, характеристических для силовых полей, т.е. векторов, направленных по оси симметрии поля, с модулем, включающим в себя всю скалярную характеристику взаимодействия тела и поля. Таким образом, векторы центра масс и магнитного момента поля становятся единичными. В частности, геометрические интегралы приводятся к виду

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = a^2, \quad \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = b^2, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \quad (1)$$

Их совместный уровень в $\mathbb{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ обозначим через \mathcal{P}^6 . Меняя при необходимости порядок векторов в подвижной системе отсчета и считая задачу несимметричной, получим $a > b > 0$. Первые интегралы в инволюции таковы:

$$\begin{aligned} H &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1 - \beta_2, \\ K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 + \\ &\quad + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3 + 2\omega_2\beta_3], \\ G &= \frac{1}{4}(M_\alpha^2 + M_\beta^2) + \frac{1}{2}(\omega_3 - \lambda)M_\gamma - b^2\alpha_1 - a^2\beta_2. \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00043, 10-01-97001).

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} M_\alpha &= 2\omega_1\alpha_1 + 2\omega_2\alpha_2 + (\omega_3 + \lambda)\alpha_3, & M_\beta &= 2\omega_1\beta_1 + 2\omega_2\beta_2 + (\omega_3 + \lambda)\beta_3, \\ M_\gamma &= 2\omega_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + 2\omega_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + (\omega_3 + \lambda)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \end{aligned}$$

Введем интегральное отображение

$$J = H \times K \times G : \mathcal{P}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

Множество его критических точек состоит из движений тела специального вида. Во-первых, это положения равновесия (критические точки ранга 0). Их в рассматриваемой системе ровно четыре [4]. Во-вторых, это так называемые особые периодические движения – такие замкнутые траектории, которые сами являются орбитами всех трех гамильтоновых полей, определенных общими интегралами H, K, G , т.е. орбитами пуассонова действия на шестимерном фазовом пространстве. Они составлены из критических точек ранга 1. В это семейство входят и сепаратрисы, возникающие при бифуркации особых периодических движений при прохождении через неустойчивое положение равновесия. Все решения такого вида найдены и сведены к эллиптическим квадратурам в работе [5]. Критические точки ранга 1 организованы в двумерные многообразия.

Наконец, в критическое множество входят двумерные торы Лиувилля, которые также являются орбитами пуассонова действия, т.е. не получены в результате случайной соизмеримости частот на движении общего вида. Двумерные торы состоят из критических точек ранга 2 и формируют множества, которые почти всюду являются четырехмерными симплектическими многообразиями. Слова “почти всюду” здесь существенны, так как топология таких почти многообразий достаточно сложна и до конца не выяснена даже в случае нулевого гиростатического момента, когда соответствующие системы сведены к квадратурам [6, 7]. Однако в рассматриваемой задаче имеется их аналитическое описание [8, 9]. Приведем здесь необходимые понятия и формулы.

Бифуркационная диаграмма отображения (2) содержится в объединении следующих (пересекающихся) подмножеств пространства $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ [8]:

1) прямых

$$\Pi_- : \begin{cases} k = (a + b)^2 \\ g = -ab(h - \frac{\lambda^2}{2}) \end{cases}, \quad \Pi_+ : \begin{cases} k = (a - b)^2 \\ g = ab(h - \frac{\lambda^2}{2}) \end{cases};$$

2) поверхности

$$\Pi_1 : \begin{cases} k = p^2 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \frac{\lambda^2}{2})s + 3s^2 - \frac{p^4 - r^4}{4s^2}, \\ g = (h - \frac{\lambda^2}{2} - s)s^2 + \frac{p^4 - r^4}{4s}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \end{cases} \quad (3)$$

3) поверхности

$$\Pi_2 : \begin{cases} k = -2\lambda^2(h - \frac{\lambda^2}{2} - 2s) - \lambda^4 + \frac{r^4}{4s^2}, \\ g = \frac{1}{2}p^2(h + \frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2s^2 - \frac{r^4}{4s}, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4)$$

Здесь и далее используются обозначения $p^2 = a^2 + b^2$, $r^2 = a^2 - b^2$.

Множества Π_{\pm} порождены семействами маятниковых движений, в которых ось колебаний ортогональна обоим силовым полям (существование таких движений для динамически симметричного гиростата с произвольным отношением осевого и экваториального моментов инерции в двойном поле впервые указано в [10]):

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta &\equiv \pm ab\mathbf{e}_3, & \omega &= \dot{\varphi}\mathbf{e}_3, \\ \alpha &= a(\mathbf{e}_1 \cos \varphi - \mathbf{e}_2 \sin \varphi), & \beta &= \pm b(\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi), \\ & & \ddot{\varphi} &= -(a \pm b) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с выбором знака обозначим множество точек такого семейства через \mathcal{M}_{\pm} . Это – два двумерных многообразия, диффеоморфных цилиндру.

Множество критических точек интегрального отображения, лежащих в прообразе поверхности Π_i , назовем критической подсистемой \mathcal{M}_i ($i = 1, 2$). Множества $\mathcal{M}_{1,2}$ почти всюду являются четырехмерными многообразиями. Нетрудно видеть, что семейство \mathcal{M}_- целиком содержится в \mathcal{M}_1 , а семейство \mathcal{M}_+ пересекается с подсистемой \mathcal{M}_1 только по движениям со значениями энергии за пределами интервала

$$\frac{\lambda^2}{2} - 2\sqrt{ab} < h < \frac{\lambda^2}{2} + 2\sqrt{ab}. \quad (6)$$

Пересечения многообразий \mathcal{M}_{\pm} с критической подсистемой \mathcal{M}_2 также легко находятся. Это – движения, лежащие на уровнях h , содержащих положения равновесия (по два уровня в каждом семействе). Кроме того, в каждом из семейств имеется по одному уровню h , попадающему в \mathcal{M}_2 , движения на котором оказываются вырожденными как критические точки ранга 1. Соответствующие значения энергии указываются ниже при исследовании типов критических точек.

Введем систему комплексных координат

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ & z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3. \end{aligned}$$

Для параметров p, r имеем представление:

$$p^2 = \frac{1}{2}(x_1x_2 + y_1y_2) + z_1z_2, \quad r^4 = (x_1y_2 + z_1^2)(x_2y_1 + z_2^2). \quad (7)$$

Описание множеств $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ можно получить следующим образом [8]. Множество \mathcal{M}_1 есть замыкание подмножества в фазовом пространстве \mathcal{P}^6 , заданного уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{w_1 w_2 (w_3 - \lambda)} \{w_1 (w_3 - \lambda) [x_2 w_1 + z_2 (w_3 + \lambda)] + \\ &\quad + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda)\}, \\ y_2 &= -\frac{1}{w_1 w_2 (w_3 - \lambda)} \{w_2 (w_3 - \lambda) [x_1 w_2 + z_1 (w_3 + \lambda)] + \\ &\quad + x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом фигурирующий в (3) параметр s – постоянная частного интеграла S_1 на \mathcal{M}_1 :

$$S_1 = \frac{x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 + z_1 z_2 (w_3 + \lambda)}{2 w_1 w_2 (w_3 - \lambda)}. \quad (9)$$

В свою очередь, множество \mathcal{M}_2 есть замыкание подмножества в фазовом пространстве \mathcal{P}^6 , заданного уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{(w_1 w_2 + \lambda w_3)(w_2 x_1 + \lambda z_1) \lambda} [w_2 (w_1^2 + x_1)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 - \\ &\quad - x_1 x_2 w_3 + 2 z_1 z_2 \lambda) + x_2 (w_1 w_3 + z_1)(w_1 z_1 - x_1 w_3) \lambda - \\ &\quad - (x_1 w_3^2 - 2 z_1 w_1 w_3 - z_1^2) z_2 \lambda^2], \\ y_2 &= \frac{1}{(w_1 w_2 + \lambda w_3)(w_1 x_2 + \lambda z_2) \lambda} [w_1 (w_2^2 + x_2)(x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2 - \\ &\quad - x_1 x_2 w_3 + 2 z_1 z_2 \lambda) + x_1 (w_2 w_3 + z_2)(w_2 z_2 - x_2 w_3) \lambda - \\ &\quad - (x_2 w_3^2 - 2 z_2 w_2 w_3 - z_2^2) z_1 \lambda^2]. \end{aligned} \quad (10)$$

Параметр s бифуркационной поверхности (4) – постоянная частного интеграла S_2 на \mathcal{M}_2 :

$$S_2 = \frac{x_1 x_2 w_3 - x_2 z_1 w_1 - x_1 z_2 w_2 - \lambda z_1 z_2}{2 \lambda (w_1 w_2 + \lambda w_3)}.$$

Подсистемы $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ пересекаются также по множеству критических точек ранга 1, составляющих семейство особых периодических движений, заданных уравнениями (27), (29), (30) работы [5]. Их для краткости здесь не повторяем. Указанная система уравнений, на которую будем далее ссылаться как на уравнения (ОПД), выражает все фазовые переменные через одну переменную w , физический параметр λ и два вспомогательных параметра σ, u , связанных соотношением

$$\begin{aligned} \lambda^2 (\lambda^2 + \sigma)^2 u^5 + (\lambda^2 + \sigma) [2 p^2 \lambda^4 - (\lambda^2 + \sigma)^3 \sigma] \sigma u^4 + \\ + r^4 \lambda^6 \sigma^2 u^3 + 2 r^4 \lambda^4 \sigma^4 (\lambda^2 + \sigma)^2 u^2 - r^8 \lambda^8 \sigma^6 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Изменение единственной свободной переменной $w(t)$ определяется дифференциальным уравнением (32) работы [5], которое интегрируется в эллиптических функциях.

Отметим, что обращение в нуль знаменателей в выражениях, связанных с подсистемами $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, приводит либо к той части движений вида (5), которая лежит в \mathcal{M}_1 , либо к движениям ранга 1, описанным системой (ОПД). Условия существования последних подробно исследованы в [11].

Цель настоящей работы – вычислить в терминах введенных параметров аналитические характеристики, выражающие тип критических точек в смысле определения [12]. Знание типа критической точки интегрируемой системы отвечает и на все вопросы, связанные с характером устойчивости проходящей через нее траектории. Для положений равновесия и маятниковых движений (5) тип критических точек был представлен в докладе [13]. В частности, было показано, что интервал (6) для движений семейства \mathcal{M}_+ отвечает особенности типа “фокус-фокус”.

2. Критические точки ранга 2. Тип критической точки x_0 ранга 2 в интегрируемой системе с тремя степенями свободы вычисляется следующим образом. Необходимо указать первый интеграл F , такой, что $dF(x_0) = 0$ и $dF \neq 0$ в окрестности этой точки. Тогда, в частности, точка x_0 оказывается неподвижной для гамильтонова поля $\text{sgrad } F$ и можно вычислить линеаризацию этого поля в точке x_0 – симплектический оператор A_F в шестимерном касательном пространстве к фазовому пространству в точке x_0 . Этот оператор будет иметь четыре нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид $\mu^2 - C_F$. При $C_F < 0$ получим точку типа “центр” (соответствующий двумерный тор – эллиптический, является устойчивым многообразием в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства трехмерных регулярных торов), а при $C_F > 0$ получим точку типа “седло” (соответствующий двумерный тор – гиперболический, существуют движения, асимптотические к этому тору, лежащие на трехмерных сепаратрисных поверхностях).

В нашей задаче ситуация осложнена тем, что фазовое пространство задано в \mathbb{R}^9 тремя неявными уравнениями (1) и вычислять ограничения операторов на касательные пространства затруднительно. Однако функции в левых частях уравнений (1) служат функциями Казимира для естественного продолжения на \mathbb{R}^9 скобки Пуассона симплектической структуры пространства $T\mathcal{SO}(3)$, поэтому при вычислении симплектических операторов вида A_F они лишь добавляют три нулевых корня в характеристический многочлен, имеющий в целом девятую степень. Таким образом, мы заранее знаем, что при условии $\text{sgrad } F = 0$ искомый коэффициент C_F есть коэффициент при μ^7 в характеристическом многочлене $Z_F(\mu)$ оператора A_F в \mathbb{R}^9 :

$$Z_F(\mu) = -\mu^7(\mu^2 - C_F).$$

Сам же оператор A_F вычисляется и при наличии вырожденных скобок Пуассона (для рассматриваемого здесь пространства \mathbb{R}^9 они определены явно

в [1]). Отметим, что при вычислении характеристического многочлена через определитель соответствующей (9×9) -матрицы трудности для некоторых функций оказываются слишком высоки даже при использовании мощных современных систем аналитических вычислений. Однако, заранее зная в данном случае структуру искомого многочлена, можем найти

$$C_F = \frac{1}{2} [\text{trace}(A_F^2) - (\text{trace } A_F)^2] = \text{trace}(A_F^2)/2,$$

так как след любого симплектического оператора равен нулю.

Теорема 1. *Тип критических точек ранга 2 в критической подсистеме \mathcal{M}_1 определяется знаком квадрата характеристического показателя*

$$\mu^2 = \frac{1}{2s} \left[12s^4 - 8\left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)s^3 + p^4 - r^4 \right] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + p^2 \right], \quad (12)$$

где s – значение параметра в соответствующей точке (3) поверхности Π_1 . Критические точки имеют тип “центр” при $\mu^2 < 0$ и тип “седло” при $\mu^2 > 0$. При $\mu = 0$ критические точки вырождены. На поверхности Π_1 множество вырожденных критических точек отвечает ребру возврата и линии касания с поверхностью Π_2 .

Доказательство. Рассмотрим функцию $L = 2G - (p^2 - \tau)H + sK$. Вычисляя ее косой градиент в точках (8) и приравнивая его к нулю, найдем

$$s = S_1, \quad \tau = T_1 = p^2 + 2S_1\left(S_1 - H + \frac{\lambda^2}{2}\right). \quad (13)$$

Подчеркнем, что подстановки этих значений s, τ нужно выполнить *после* вычисления $\text{sgrad } L$. Поэтому полученное поле $\text{sgrad } L$ обращается в нуль лишь в самой рассматриваемой точке, но не в ее окрестности, следовательно, основное требование к интегралу L выполнено. Здесь и далее при проверке тождеств либо соотношений, подобных равенствам (13), используются представления (7).

Вычислим $\text{trace}(A_L^2)/2$, подставим значения (13), затем – (7) и (9), и, в последнюю очередь, учтем уравнения (8). Найденное выражение через исходные фазовые переменные средствами компьютерной алгебры разлагается на множители, которые дают искомое значение (12). Техника преобразований здесь фактически совпадает с той, которая применялась в [8] при вычислении скобок Пуассона инвариантных соотношений, определяющих критические подсистемы. Характер критических точек определяется знаком величины (12). Тот факт, что при равенстве ее нулю критические точки вырождены (т.е. нельзя указать другого интеграла с ненулевым характеристическим значением), вытекает из того, что коэффициент при G в функции L отличен от нуля, а равенство $dG = 0$ приводит к критическим точкам ранга 1. Связь множества $\mu^2 = 0$ с геометрическими свойствами поверхностей $\Pi_{1,2}$ проверяется непосредственно. \square

Теорема 2. Тип критических точек ранга 2 в критической подсистеме \mathcal{M}_2 определяется знаком квадрата характеристического показателя

$$\mu^2 = -\frac{1}{s} [8\lambda^2 s^3 - r^4] \left[2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + p^2 \right], \quad (14)$$

где s – значение параметра в соответствующей точке (4) поверхности Π_2 . Критические точки имеют тип “центр” при $\mu^2 < 0$ и тип “седло” при $\mu^2 > 0$. При $\mu = 0$ критические точки вырождены. На поверхности Π_2 множество вырожденных критических точек отвечает ребру возврата и линии касания с поверхностью Π_1 .

Для доказательства снова возьмем функцию L , вычислим ее косой градиент и убедимся, что он обращается в нуль на многообразии \mathcal{M}_2 , т.е. в силу уравнений (9), но уже в подстановке

$$s = S_2, \quad \tau = T_2 = 2\lambda^2 S_2.$$

Вычисляя матрицу линеаризации поля $\text{sgrad } L$ и находя след ее квадрата, исключим переменные y_1, y_2 с помощью уравнений (10). Получим искомое выражение (14). Дальнейшие рассуждения такие же, как и в доказательстве теоремы 1.

3. Критические точки ранга 1. Для вычисления типа критической точки x_0 ранга 1 нужно найти два интеграла F_1, F_2 , независимых в проколотовой окрестности x_0 , таких, что в самой точке $dF_1 = 0, dF_2 = 0$, симплектические операторы A_{F_1}, A_{F_2} независимы и существует их линейная комбинация, имеющая четыре различных собственных значения. Здесь и далее под дифференциалом функции, заданной на всем пространстве \mathbb{R}^9 , понимается ограничение полного дифференциала на касательное пространство к фазовому пространству \mathcal{P}^6 , заданному геометрическими интегралами. Простые уравнения, позволяющие проверять условие $dF = 0$ на \mathcal{P}^6 не вводя неопределенных множителей для ограничений (1), приведены, например, в [5].

Как показано в [5], особые периодические движения, заданные уравнениями (ОПД), принадлежат пересечению критических подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. Фиксируем точку x_0 на таком решении и пусть

$$s_i = S_i(x_0), \quad \tau_i = T_i(x_0), \quad L_i(x) = L(x)|_{s=s_i, \tau=\tau_i} \quad (i = 1, 2).$$

Как следует из приведенных выше результатов, дифференциалы функций L_1, L_2 в точке x_0 равны нулю и отличны от нуля в близких к ней точках. Симплектические операторы, порожденные функциями L_1, L_2 в точке x_0 , в разложении по собственным подпространствам будут отличны от нуля лишь на двумерных подпространствах в $T_{x_0}\mathcal{P}^6$, трансверсальных, соответственно, к многообразиям $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, и иметь на этих подпространствах собственные числа $\pm\mu_1, \pm\mu_2$, определенные равенствами (12) с $s = s_1$ и (14) с $s = s_2$. Если ни одно из чисел μ_1, μ_2 не равно нулю, то поверхности Π_1, Π_2 пересекаются

трансверсально, упомянутые двумерные подпространства образуют прямую сумму, и потому найдется линейная комбинация функций L_1, L_2 , симплектический оператор которой имеет все различные собственные числа. Хотя это рассуждение и не совсем строго, но его можно подтвердить прямым вычислением. Таким образом, если $J(x_0)$ принадлежит трансверсальному пересечению бифуркационных поверхностей, то точка x_0 является невырожденной.

Теорема 3. *Критические точки ранга 1, лежащие на траекториях особых периодических движений, являются невырожденными за исключением случаев, когда точка в \mathbb{R}^3 , образованная значениями первых интегралов, лежит в одном из следующих подмножеств:*

- 1) ребре возврата поверхности Π_1 , заданном на ней уравнением

$$12s^4 - 8\left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)s^3 + p^4 - r^4 = 0; \quad (15)$$

- 2) ребре возврата поверхности Π_2 , заданном на ней уравнением

$$8\lambda^2 s^3 - r^4 = 0; \quad (16)$$

- 3) кривой касания поверхностей Π_1, Π_2 , заданной на них одним и тем же уравнением

$$2s^2 - 2\left(h + \frac{\lambda^2}{2}\right)s + p^2 = 0. \quad (17)$$

Теперь для определения типа невырожденной критической точки ранга 1, т.е. такой точки x_0 , что $J(x_0)$ не удовлетворяет ни одному из уравнений (15)–(17), достаточно указать хотя бы один интеграл, у которого косою градиент в точке x_0 равен нулю, а соответствующий симплектический оператор имеет четыре ненулевых собственных значения. В качестве такого интеграла можно взять функцию $K - 2\sigma H$, послужившую в [5] исходной для построения множества особых периодических движений.

Теорема 4. *Пусть фиксирован параметр λ , а константы σ, u удовлетворяют уравнению (11). Тогда тип невырожденной критической точки, заданной уравнениями (ОПД), определяется знаками следующей пары квадратов характеристических показателей (собственных чисел симплектического оператора, порожденного интегралом $K - 2\sigma H$):*

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= -\frac{4(u^3 + r^4\lambda^4\sigma^3)}{u\lambda^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)}; \\ \nu_2^2 &= \frac{u^2(\lambda^2 + \sigma)^2 - r^4\lambda^4\sigma^2}{u^4\lambda^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)} [u^3\lambda^2 - u^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)^2(\lambda^2 + 4\sigma) + r^4\lambda^6\sigma^3]. \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением.

Отметим, что в точках особых периодических движений значения частных интегралов S_1, S_2 имеют достаточно простой вид [5]:

$$s_1 = \frac{r^4\lambda^4\sigma^2 - u^2(\lambda^2 + \sigma)^2}{2u^2\lambda^2}, \quad s_2 = -\frac{u}{2\lambda^2\sigma}.$$

Применение компьютерной системы аналитических вычислений показывает, что обращение в нуль какой-либо из величин (18) влечет, в силу уравнения (11), выполнение одного из условий (15)–(17). Это еще раз подчеркивает связь вырожденных точек и геометрических особенностей бифуркационных поверхностей. По сказанному выше, вычислять показатели типа (18) еще для одного интеграла нет необходимости.

Описание типов точек на траекториях маятниковых движений (5), анонсированное в [13], получим, заметив, что траектории семейств M_{\pm} состоят из критических точек первых интегралов

$$G_{\pm} = \frac{2}{(a \mp b)\sqrt{ab}}(G \mp abH).$$

Здесь постоянные множители введены для упрощения выражений собственных чисел.

Теорема 5. *Критические точки семейства M_{-} невырождены для всех значений энергии, кроме*

$$h = \frac{(a+b)^4 + (a-b)^2\lambda^4}{2(a+b)^2\lambda^2}.$$

Тип этих точек определяется знаками пары квадратов собственных чисел симплектического оператора интеграла G_{-} :

$$\nu_{1,2}^2 = -h + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{4ab\lambda^2}{(a+b)^2} \pm \sqrt{\left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 + 4ab}.$$

Критические точки семейства M_{+} невырождены для всех значений энергии, кроме

$$h = \frac{\lambda^2}{2} \pm 2\sqrt{ab}, \quad h = \frac{(a-b)^4 + (a+b)^2\lambda^4}{2(a-b)^2\lambda^2}.$$

Тип этих точек определяется знаками пары квадратов собственных чисел симплектического оператора интеграла G_{+} :

$$\nu_{1,2}^2 = h - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{4ab\lambda^2}{(a-b)^2} \pm \sqrt{\left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 - 4ab}.$$

В частности, на интервале значений энергии (6) оператор имеет четыре комплексных собственных числа, поэтому соответствующие критические точки ранга 1 на траекториях M_{+} имеют тип “фокус-фокус”.

4. Критические точки ранга 0. Особенность нулевого ранга предполагает, в частности, равенство $dH = 0$, что возможно лишь в неподвижных точках гамильтоновой системы. Здесь их ровно четыре:

$$c_k : \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\varepsilon_1 a, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, \varepsilon_2 b, 0), \quad (19)$$

где $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ и $k = 1, \dots, 4$. Упорядочим c_k по возрастанию h :

$$h_1 = -a - b, \quad h_2 = -a + b, \quad h_3 = a - b, \quad h_4 = a + b.$$

Тогда $c_1, c_4 \in \mathcal{M}_+$, $c_2, c_3 \in \mathcal{M}_-$. Точки (19) принадлежат обоим критическим подсистемам $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ за одним исключением, а именно, точка c_4 самого верхнего положения равновесия не принадлежит \mathcal{M}_1 , если $h = a + b$ лежит в интервале (6).

Как показано в работе [4], индекс Морса гамильтониана H в точке c_k равен $k - 1$, что в значительной мере определяет поведение системы в ее окрестности. В частности, отсюда сразу следует, что лишь самое нижнее положение равновесия устойчиво. Однако исследование характера неустойчивости остальных точек и строгая классификация требуют вычисления типа этих точек как критических точек интегрального отображения.

Теорема 6. *Точки $c_{1,2}$ для всех значений $\lambda \geq 0$ являются невырожденными критическими точками ранга 0 интегрального отображения. При этом c_1 имеет тип “центр-центр-центр”, c_2 — тип “центр-центр-седло”. Точка c_3 при всех $\lambda \geq 0$ имеет тип “центр-седло-седло”, однако, размерность алгебры симплектических операторов в этой точке падает до двух при $\lambda^2 = q_-$, где*

$$q_- = \frac{(a + b)^2}{a - b}.$$

Точка c_4 является невырожденной при значениях $\lambda^2 \notin \{q_+, q_1, q_2\}$, где

$$q_+ = \frac{(a - b)^2}{a + b}, \quad q_1 = 2 \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right)^2 < q_2 = 2 \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right)^2. \quad (20)$$

Она имеет тип “седло-седло-седло” при $\lambda^2 < q_1$, “седло-фокус-фокус” при $\lambda^2 \in (q_1, q_2)$, и “седло-центр-центр” при $\lambda^2 > q_2$, значение $\lambda^2 = q_+$ отвечает падению размерности алгебры операторов и на тип не влияет.

Доказательство. Поскольку все точки c_k являются невырожденными критическими точками гамильтониана в смысле Морса, то в этих точках также $dK = 0, dG = 0$. Независимость операторов A_H, A_K, A_G в точках (19) проверяется непосредственно в пространстве \mathbb{R}^9 и нарушается лишь для точек $c_{3,4}$ при значениях $\lambda^2 = q_{\mp}$ соответственно. Одновременно иметь по паре совпадающих собственных чисел эти три оператора могут лишь в точке c_4 при $\lambda^2 = q_{1,2}$, где q_1, q_2 определены в (20). Переменную характеристического многочлена оператора A_H в точке $c_k \in \mathbb{R}^9$ обозначим через \varkappa . После сокращения на множитель \varkappa^3 , отвечающий геометрическим интегралам, этот

многочлен имеет следующие корни относительно \varkappa^2 :

$$\varkappa_1^2 = h_k, \quad \varkappa_{2,3}^2 = \frac{1}{4} \left[h_k - \frac{\lambda^2}{2} \pm \sqrt{\left(h_k - \frac{\lambda^2}{2} \right)^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2 ab} \right].$$

Поэтому A_H не является регулярным элементом соответствующей подалгебры лишь для точки c_4 при одном из условий $\lambda^2 = q_{1,2}$. Утверждение теоремы следует теперь из анализа знаков найденных корней. \square

Заключение. В работе представлена вся информация об аналитических характеристиках критических точек интегрального отображения для неприводимой интегрируемой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение гиростата типа Ковалевской в двойном силовом поле. С использованием условий существования критических движений, найденных в [11], предоставляется возможность построения диаграмм критических подсистем, т.е. таких множеств на плоскости констант двух независимых (почти всюду) первых интегралов, которые классифицируют критические точки по рангам и типам. После этого в большинстве случаев можно указать и характер бифуркации интегрального многообразия, происходящей при пересечении соответствующего участка бифуркационной поверхности в пространстве \mathbb{R}^3 констант общих интегралов. В силу высокой технической сложности задачи вряд ли можно рассчитывать на получение полной аналитической классификации топологических инвариантов (т.е. построения всех разделяющих поверхностей с указанием условий существования движений в пространстве всех параметров задачи), однако с помощью компьютерного моделирования можно построить новые интересные примеры трехмерной фазовой топологии.

1. *Богоявленский О.И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1984. – **48**, 5. – С. 883–938.
2. *Yehia H.M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, 3. – P. 169–172.
3. *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функци. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, 2. – С. 87–88.
4. *Зотьев Д.Б., Харламов М.П.* Изоэнергетические многообразия и области возможности движения твердого тела в двойном поле сил // Нелинейная динамика. – 2005. – **1**, 1. – С. 23–31.
5. *Харламов М.П.* Особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2007. – № 37. – С. 85–96.
6. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. мат. вестн. – 2004. – **1**, 4. – С. 564–582.
7. *Харламов М.П.* Обобщение 4-го класса Аппельрота: аналитические решения // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 20–30.
8. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. – 2007. – **3**, 3. – С. 331–348.

9. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // Hiroshima Math. J. – 2009. – **39**, 3. – P. 327–350.
10. *Yehia H.M.* On certain integrable motions of a rigid body acted upon by gravity and magnetic fields // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2001. – **36**, 7. – P. 1173–1175.
11. *Харламова И.И., Смирнов Г.Е.* Условия существования периодических движений гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 50–62.
12. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. – Ижевск: Изд-во РХД, 1999. – Т. 1. – 444 с.; Т. 2. – 448 с.
13. *Рябов П.Е.* Классификация особенностей в задаче о движении гиростата Ковалевской в двойном поле сил // X Междунар. конф. “Устойчивость, управление и динамика твердого тела”: Тез. докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2008. – С. 78.

M.P. Kharlamov, P.E. Ryabov, A.Y. Savushkin, G.E. Smirnov

Types of critical points of the Kowalevski gyrostat in double field

The problem of motion of the Kowalevski type gyrostat in double force field is considered. According to the classification used in the theory of Liouville integrable Hamiltonian systems, the types of critical points of all ranks of the integral map are calculated.

Keywords: *Kowalevski gyrostat, double field, type of critical point.*

М.П. Харламов, П.Е. Рябов, О.Ю. Савушкин, Г.Е. Смирнов

Типи критичних точок гіростата Ковалевської в подвійному полі

Відповідно до класифікації, прийнятої в теорії інтегровних за Ліувіллем гамільтонових систем, обчислено типи критичних точок всіх рангів інтегрального відображення задачі про рух гіростата Ковалевської в подвійному силовому полі.

Ключові слова: *гіростат Ковалевської, подвійне поле, тип критичної точки.*

*Волгоградский филиал РАНХиГС, Россия
Финансовый ун-т, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
mharlamov@vags.ru, glebevgen@yandex.ru*

Получено 10.11.11