Д. т. н. В. М. НИКОЛАЕНКО, к. т. н. О. В. НИКОЛАЕНКО

Украина, г. Одесса, Гос. политехнический ун-т
E-mail: NVM@RTF.OSPU.ODESSA.UA

Дата поступления в редакцию
14.11 2000 г.
Оппонент *д. т. н. А. И. КАЗАКОВ*

АППРОКСИМАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МАКРОМОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ МЕТОДОМ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Метод гладкой кривой позволяет аппроксимировать характеристики термозависимых макромоделей электронных устройств с требуемой точностью и ограниченной кривизной.

Автоматизированное схемотехническое и функционально-логическое проектирование электронной аппаратуры (ЭА) основано на использовании макромоделей и гипермоделей входящих в ее состав устройств, характеристики которых являются функциональными зависимостями от ряда параметров, в том числе и температуры [1,2]. При этом формирование указанных машинных представлений базируется на экспериментальных и справочных данных, требующих применения аппроксимации как процедуры их компактного описания [3].

Естественные процессы, протекающие в полупроводниковых приборах и пассивных элементах ЭА, в основном носят плавный характер, без проявления резких выбросов, в то время как традиционные методы аппроксимации нелинейных зависимостей, например, на основе полиномов Лагранжа, Ньютона, Бесселя, Якоби и др. [4], не гарантируют выполнение вышеотмеченной особенности. В определенной степени рассматриваемая задача может быть решена, если воспользоваться методом на основе сглаженной сплайн-аппроксимации [5] или методом со сглаживающим дополнением [6]. Однако отдельные недостатки этих методов стимулируют дальнейшее развитие этого направления. В частности, предлагаемый метод *гладкой кривой* позволяет реализовать сглаженную аппроксимацию характеристик электронных устройств с минимумом квадратов их отклонений от заданных зависимостей.

В основу предлагаемого метода аппроксимации характеристик макромоделей электронных устройств положен следующий континуальный критерий:

$$\Lambda(\tilde a) = \int_{T_1}^{T_m} \left\{ \alpha[g(\tilde a,\xi) - f(\xi)]^2 + \beta\left[\frac{\partial^2 g(\tilde a,\xi)}{\partial \xi^2} \Bigg/ \left(1 + \left(\frac{\partial g(\tilde a,\xi)}{\partial \xi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - k(\xi)\right]^2 \right\} d\xi = \min, \tag{1}$$

где $\tilde a = \{a_0,\ldots,a_n\}$ – параметры функции $g(\cdot)$, аппроксимирующей характеристику $f(\cdot)$;
$k(\cdot)$ – заданные значения кривизны кривой, представляющей $f(\cdot)$;
α и β – весовые коэффициенты составляющих критерия аппроксимации по точности и гладкости, соответственно;
$[T_1, T_m]$ – интервал аппроксимации по аргументу T.

Квадратичный вид функции $\Lambda(\cdot)$ (1) позволяет записать условие ее минимума в виде

$$\frac{\partial \Lambda(\tilde a)}{\partial a_k} = 0,\ k = \overline{0,n}. \tag{2}$$

Дискретный аналог критерия (1) представим следующим образом:

$$\Lambda(\tilde a) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \alpha[g(\tilde a,T_i) - f_i]^2 + \beta\left[\frac{\partial^2 g(\tilde a,T_i)}{\partial T^2} \Bigg/ \left[1 + \left(\frac{\partial g(\tilde a,T_i)}{\partial T}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} - k_i\right]^2 \right\} = 0, \tag{3}$$

где $f_i = f(T_i)$, $k_i = k(T_i)$.

С учетом записи (3) условие (2) может быть представлено в форме

$$\sum_{i=1}^{m} \left\{ \alpha[g(\tilde a,T_i) - f_i]\frac{\partial g(\tilde a,T_i)}{\partial a_k} + \beta\left[\frac{\partial^2 g(\tilde a,T_i)}{\partial T^2} - k_i A_i^{3/2}\right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\partial^3 g(\tilde a,T_i)}{\partial T^2 \partial a_k} A_i - 3\frac{\partial^2 g(\tilde a,T_i)}{\partial T^2}\frac{\partial^2 g(\tilde a,T_i)}{\partial T \partial a_k}\frac{\partial g(\tilde a,T_i)}{\partial T} \right] \Bigg/ A_i^4 \right\} = 0,$$
$$k = \overline{0,n}, \tag{4}$$

где $A_i = 1 + \left(\frac{\partial g(\tilde a,T_i)}{\partial T}\right)^2$.

Решение системы нелинейных уравнений (4) одним из традиционных методов [4, с. 190] позволяет определить параметры a_i ($i = \overline{0,n}$) аппроксимирующей функцией $g(\cdot)$ с минимумом суммы квадратов отклонений в заданных узлах T_i ($i = \overline{1,m}$), а также с минимумом суммы квадратов отклонений кривизны кривой $g(\cdot)$ от заданных значений k_i ($i = \overline{1,m}$).

При решении вышеописанной задачи аппроксимации часто удобно в качестве функции $g(\cdot)$ использовать алгебраический полином

$$g(\tilde{a},T)=\sum_{s=0}^{n}a_sT^s, \tag{5}$$

возможность применения которого, как известно [7, с. 202], оговаривается теоремой Вейерштрасса.

Тогда система уравнений (4) с учетом выражения (5) примет вид

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\alpha\left(\sum_{s=0}^{n}a_sT_i^s-f_i\right)T_i^k+\beta\left[\sum_{s=2}^{n}s(s-1)a_sT_i^{s-2}-k_iB_i^{3/2}\right]\times\right.,$$
(6)
$$\times\left[k(k-1)T_i^{k-2}B_i-3\left(\sum_{s=2}^{n}s(s-1)a_sT_i^{s-2}\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\sum_{j=1}^{n}ja_sT_i^{j-1}\right)kT_i^{k-1}\right]\Big/B_i^4\right\}=0,\quad k=\overline{0,n}, \tag{6}$$

где $B_i=1+\left(\sum_{s=1}^{n}sa_sT_i^{s-1}\right)^2$.

Соотношения (6) могут быть решены так же, как и система уравнений (4), на основе традиционных методов [7, с. 661]. Более эффективный путь их решения реализуется методом простой итерации или методом Зейделя [4, с. 207]. В последнем случае уравнения (6) приводятся к следующей форме:

$$a_0^{(p+1)}=\frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i-\sum_{s=1}^{n}a_s^{(p)}\left(\sum_{i=1}^{m}T_i^s\right)\right];$$

$$a_k^{(p+1)}=\left(\sum_{i=1}^{m}T_i^{2k}\right)^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}f_iT_i^k-\sum_{s=0}^{k-1}a_s^{(p+1)}\left(\sum_{i=1}^{m}T_i^{s+k}\right)-\right.$$
$$-\sum_{s=k+1}^{n}a_s^{(p)}\left(\sum_{i=1}^{m}T_i^{s+k}\right)-\frac{\beta}{\alpha}\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{s=2}^{k-1}s(s-1)a_s^{(p+1)}T_i^{s-2}+\right.$$
$$\left.+\sum_{s=k}^{n}s(s-1)a_s^{(p)}T_i^{s-2}-k_iC_i^{3/2}\right]\left[k(k-1)T_i^{k-2}C_i-\right.$$
$$-3\left(\sum_{s=2}^{k-1}s(s-1)a_s^{(p+1)}T_i^{s-2}+\sum_{s=k}^{n}s(s-1)a_s^{(p)}T_i^{s-2}\right)\times$$
$$\left.\left.\times\left(\sum_{j=1}^{k-1}ja_s^{(p+1)}T_i^{j-1}+\sum_{j=k}^{n}ja_s^{(p)}T_i^{j-1}\right)kT_i^{k-1}\right]\Big/C_i^4\right\},\ k=\overline{1,n}, \tag{7}$$

где $C_i=1+\left(\sum_{s=1}^{k-1}sa_s^{(p+1)}T_i^{s-1}+\sum_{s=k}^{n}sa_s^{(p)}T_i^{s-1}\right)^2$; p – номер итерации.

Для улучшения сходимости часто целесообразно использовать нормирование значений аргумента и функции или применять двухэтапный итерационный процесс (7). Для такого процесса на первом этапе определяются начальные значения $a_k^*(k=\overline{0,n})$ из системы линейных уравнений (7) при α=1, β=0. Второй же этап ($\beta\neq0$) позволяет скорректировать решение с учетом минимизации кривизны полинома (5).

Значения коэффициентов α и β в (1)—(7) выбираются исходя из кривизны аппроксимируемой кривой $f(\cdot)$. Если принять α=1, то чем больше кривизна, тем меньшим следует выбирать значение весового коэффициента β. В ряде случаев для усиления влияния второй части критерия (1) можно рекомендовать использовать требование $k_i^*\to0$.

В отдельных случаях практический интерес имеют отрицательные значения коэффициентов β, влияющие на увеличение кривизны аппроксимирующей зависимости $g(\cdot)$. Иногда удобно применять частные значения коэффициентов α и β для отдельных участков функции $f(\cdot)$ из интервала аппроксимации $[T_1,\ T_m]$ (4) —

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\alpha_i[g(\tilde{a},T_i)-f_i]\frac{\partial g(\tilde{a},T_i)}{\partial a_k}+\right.$$
$$+\beta_i\left[\frac{\partial^2 g(\tilde{a},T_i)}{\partial T^2}-k_iA_i^{3/2}\right]\left[\frac{\partial^3 g(\tilde{a},T_i)}{\partial T^2\partial a_k}A_i-3\frac{\partial^2 g(\tilde{a},T_i)}{\partial T^2}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{\partial^2 g(\tilde{a},T_i)}{\partial T\partial a_k}\frac{\partial g(\tilde{a},T_i)}{\partial T}\right]\Big/A_i^4\right\}=0,\ k=\overline{0,n},$$

где α_i и β_i ($i=\overline{1,m}$)– соответствующие весовые коэффициенты.

Простым примером, иллюстрирующим особенности предложенного подхода, может служить процесс аппроксимации зависимости времени задержки распространения $\tau^{0,1}_{\text{зд.р}}$ от температуры T для элемента ЭСЛ при построении их термозависимых макромоделей для функционально-логического проектирования [2]. В **таблице** приведены значения отдельных показателей аппроксимирующих полиномов, полученных на основе соотношений (7) для различных величин коэффициентов α и β, —

$$\begin{aligned}
&g_1(T)=4{,}458196-5{,}383261\cdot10^{-2}T+8{,}282638\cdot10^{-4}T^2\\
&(\alpha_1=1;\ \beta_1=0;\ S_{\varepsilon1}=14{,}925\cdot10^{-1};\ S_{k1}=11{,}54\cdot10^{-3});\\
&g_2(T)=4{,}483670-4{,}841437\cdot10^{-2}T+7{,}484431\cdot10^{-4}T^2\\
&(\alpha_2=1;\ \beta_2=10^4;\ S_{\varepsilon2}=11{,}5536\cdot10^{-1};\ S_{k2}=10{,}45\cdot10^{-3});\\
&g_3(T)=4{,}591148-2{,}555604\cdot10^{-2}T+4{,}116535\cdot10^{-4}T^2\\
&(\alpha_3=1;\ \beta_3=10^5;\ S_{\varepsilon3}=14{,}760\cdot10^{-1};\ S_{k3}=57{,}58\cdot10^{-4}),
\end{aligned} \tag{8}$$

где $g_i(\cdot)$ определены в наносекундах, T – в °C;

$$S_{\varepsilon i}=\sum_{s=1}^{m}|\varepsilon_{is}|=\sum_{s=1}^{m}|g_i(T_s)-f_s|;$$

$$S_{ki}=\sum_{s=1}^{m}|k_i(T_s)|=\sum_{s=1}^{m}\left|\frac{\partial^2 g_i(T_s)}{\partial T^2}\left[1+\left(\frac{\partial g_i(T_s)}{\partial T}\right)^2\right]^{-3/2}\right|,\ i=\overline{1,3}.$$

Здесь (8) $S_{\varepsilon i}$ – сумма модулей отклонений аппроксимируемой и аппроксимирующей функций; $S_{\kappa i}$ – сумма модулей кривизны аппроксимирующей функции.

S	T_s	f_s	ε_{1s}	ε_{2s}	ε_{3s}	k_{1s}	k_{2s}	k_{3s}
1	–10	5,2	$1{,}21\cdot10^{-1}$	$1{,}57\cdot10^{-1}$	$3{,}12\cdot10^{-1}$	$1{,}64\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$8{,}22\cdot10^{-4}$
2	0	4,3	$-1{,}58\cdot10^{-1}$	$-1{,}84\cdot10^{-1}$	$-2{,}91\cdot10^{-1}$	$1{,}65\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$8{,}23\cdot10^{-4}$
3	10	4,2	$1{,}97\cdot10^{-1}$	$1{,}26\cdot10^{-1}$	$-1{,}77\cdot10^{-1}$	$1{,}65\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$8{,}23\cdot10^{-4}$
4	30	4,1	$5{,}11\cdot10^{-1}$	$3{,}95\cdot10^{-1}$	$-9{,}50\cdot10^{-2}$	$1{,}66\cdot10^{-3}$	$1{,}50\cdot10^{-3}$	$8{,}23\cdot10^{-4}$
5	50	4,2	$3{,}63\cdot10^{-1}$	$2{,}66\cdot10^{-1}$	$1{,}42\cdot10^{-1}$	$1{,}65\cdot10^{-3}$	$1{,}50\cdot10^{-3}$	$8{,}23\cdot10^{-4}$
6	60	4,3	$9{,}00\cdot10^{-2}$	$2{,}68\cdot10^{-2}$	$-2{,}40\cdot10^{-1}$	$1{,}65\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$8{,}23\cdot10^{-4}$
7	80	5,4	$-5{,}25\cdot10^{-2}$	$-5{,}57\cdot10^{-4}$	$2{,}19\cdot10^{-1}$	$1{,}64\cdot10^{-3}$	$1{,}49\cdot10^{-3}$	$8{,}21\cdot10^{-4}$

Как следует из таблицы, кривизна первого аппроксимирующего полинома (8), в котором она не минимизирована, вдвое больше кривизны третьего полинома $g_3(\cdot)$, что привело к погрешности $g_1(\cdot)$ более 0,5 нс в рабочем диапазоне температур ($T\in[20°C, 40°C]$). Кроме того, приведенные данные иллюстрируют тот факт, что с ростом β уменьшается отклонение аппроксимирующего полинома от заданных значений $S_{\varepsilon i}$ и уменьшается кривизна функции $g_i(\cdot)$ (S_{ki}).

***

Таким образом, предложенный метод гладкой кривой позволяет аппроксимировать характеристики макромоделей электронных устройств с требуемой точностью и ограниченной кривизной, что дает возможность повысить эффективность автоматизированного схемотехнического проектирования электронной аппаратуры.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Николаенко В. М. Термофункциональное гипермоделирование нелинейных электронных схем.– Л.: Энергоатомиздат, 1988.
2. Николаенко О. В. Термозависимые макромодели для функционально-логического проектирования электронной аппаратуры // Технология и конструирование в электронной аппаратуре.– 1999.– № 2–3.– С. 49–52.
3. Автоматизация схемотехнического проектирования / В. Н. Ильин, В. Т. Фролкин, А. И. Бутко и др.– М.: Радио и связь, 1987.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989.
5. Николаенко В. М., Логвинов О. В. Сглаженная сплайн-аппроксимация при обобщенном макромоделировании // Известия вузов. Радиоэлектроника.– 1988.– № 9.– С. 69–71.
6. Николаенко О. В. Полиномиальная аппроксимация функциональных зависимостей со сглаживающим дополнением // Тр. Одес. политехнического ун-та.– 1998.– Вып. 2(6).– С. 140–142.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. – М.: Наука., 1973.