*Д. т. н. С. Ю. ЛУЗИН, к. т. н. О. Б. ПОЛУБАСОВ*

Россия, г. С.-Петербург, АО “Авангард”
E-mail: luzin1@rol.ru

Дата поступления в редакцию
18.03 2003 г.
Оппонент *к. т. н. А. А. НИКОЛЕНКО*
(ОНПУ, г. Одесса)

# НЕПЕРЕБОРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯРНОСТИ ВЫХОДОВ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ МНОГОВЫХОДНЫХ АВТОМАТОВ

*С высокой степенью вероятности варианту полярности, получившему минимальную оценку, будет соответствовать действительно оптимальный вариант.*

В настоящее время среди методов логического синтеза отсутствуют быстрые методы для определения, какая из двух реализаций, непосредственно функции или ее инверсии, будет более эффективной (т. е. будет содержать меньшее число термов после минимизации), что подразумевает решение обеих задач и выбор лучшего варианта. Для многовыходных устройств количество вариантов является показательной функцией числа выходов, и просмотр всех вариантов является достаточно трудоемким.

В работе [1] описан метод минимизации системы булевых функций при фиксированной полярности выходов. В настоящей работе развиваются идеи работы [1] для оценки и выбора одного из вариантов полярности, обеспечивающего минимум суммарного числа термов при минимизации системы булевых функций.

Обозначим $I^0$, $I^1$ подмножества элементов $n$-мерного булева пространства $I^{(n)}=\{a_0,..., a_{2^n-1}\}$, на которых полностью определенная булева функция $f(X)\in F$, $X=\{x_0,...,x_{n-1}\}$ имеет соответственно нулевое и единичное значение [2, с. 25]. Системы булевых функций будем задавать в виде множества $\Psi_0=\{(\alpha_j, \beta_j)\}$ $(j=1,...p)$ пар в общем случае троичных векторов. Пару $(\alpha_j, \beta_j)$ будем называть обобщенным (на множестве функций) интервалом. Часть $\alpha_j$ обобщенного интервала назовем входной, а часть $\beta_j$ — выходной. Входная часть $\alpha_j=\{\alpha_j^{n-1},..., \alpha_j^0\}$ обобщенного интервала является интервалом в пространстве булевых переменных $X=\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$. Выходная часть $\beta_j=\{\beta_j^{m-1},..., \beta_j^0\}$ обобщенного интервала является двоичным вектором значений функций $f_0,..., f_i,..., f_{m-1}$ на интервале $\alpha_j$. При этом $\beta_j^i=1$, если $I_{\alpha j}\subseteq I_i^1$; $\beta_j^i=0$, если $I_{\alpha j}\subseteq I_i^0$.

Задача состоит в приведении исходного множества обобщенных интервалов $\Psi_0$, представляющих систему булевых функций $F$, к кратчайшему множеству обобщенных интервалов.

*Начальное решение*

Векторы $\beta_i$, $\beta_j$ — выходные части обобщенных интервалов — будем сравнивать поразрядно, чтобы установить между ними следующее отношение:

если $\forall k\in\overline{0,m-1}$, $\beta_i^k\le\beta_j^k$, то $\beta_i\subset\beta_j$.

Обозначим через $I_j$ объединение интервалов $\alpha_i$, для которых $\beta_i=j$ (т. е. выходные части совпадают и их числовой эквивалент равен $j$):

$$I_j=\bigcup_{\beta_i=j} I_{\alpha_i}.$$

Разобьем множество обобщенных интервалов $\Psi_0$ на классы —

$$\Psi_0=\bigcup_{j=0}^{2^m-1} I_j$$

и осуществим минимизацию для каждого класса $I_j$ в отдельности [3, 4].

При изменении полярности функций изменяется только код класса, при этом множество элементов в классах не меняется. Соответственно не меняется и оценка числа покрывающих данный класс интервалов. Первоначально, как и в случае с фиксированной полярностью, осуществим минимизацию каждого класса в отдельности и в качестве грубой оценки для каждого варианта полярности возьмем сумму полученных оценок за вычетом оценки класса, для которого $\beta_i=0$ при данном варианте полярности. Затем для каждого класса определим варианты полярности, при которых можно произвести расширение или разборку интервалов класса, приводящие к уменьшению оценки для данного класса, и на соответствующую величину уменьшим оценку для данного варианта полярности. По завершении обработки всех классов выбирается вариант полярности, имеющий минимальную результирующую оценку.

*Определение*

Пару кодов $\beta_l$ и $\beta_k$ будем называть смежными, если:

1. $\forall i\in\{1,..., m\}$, $\beta_l^i\le\beta_k^i$.
2. Ни один из кодов не состоит из одних нулей.

Будем называть правильным направлением смежности направление от кода с меньшим индексом (количеством единиц в коде) к коду с большим индексом.

Пусть мы хотим использовать для расширения интервала с кодом $\beta_l$ интервал с кодом $\beta_k$. Если коды $\beta_l$ и $\beta_k$ изначально ортогональны $(\exists i\in\{1,..., m\}, \beta_l^i\ne\beta_k^i)$, то первое необходимое условие смежности возникает только при таком изменении полярности, когда один из кодов переходит в код из одних единиц, а другой — в код из одних нулей, т. е. не удовлетворяет второму условию.

Пусть коды $\beta_l$ и $\beta_k$ смежны, причем $\beta_l$ содержит меньше единиц, чем $\beta_k(\beta_i \subset \beta_k)$. При изменении полярности несовпадающих разрядов направление смежности меняется на обратное $(\beta_k \subset \beta_i)$. И в том, и в другом случае отношение смежности сохраняется при всех вариантах полярности, которые изменяют только совпадающие разряды в $\beta_l$ и $\beta_k$.

Пусть коды не ортогональны и не смежны. Выделим в них ортогональные подкоды $\beta_{l*}$ и $\beta_{k*}$:

$$\beta^i_{l*} = \begin{cases} \beta^i_l, & \beta^i_l \neq \beta^i_k \\ *, & \beta^i_l = \beta^i_k \end{cases} .$$

Отношение смежности может возникнуть только при таком изменении полярности, когда один из этих подкодов становится кодом, содержащим только нули, а другой — только единицы. При этом совпадающие позиции кодов могут принимать любые значения, кроме всех нулей. Таким образом, если в кодах совпадают $k$ позиций, то число возможных вариантов полярности, приводящих эти коды в отношение смежности, равно $2(2^k-1)$.

Например, пусть

$\beta_l = 1010100$, $\beta_k = 0101000$.

Тогда ортогональные подкоды будут иметь вид

$\beta_{l*} = 10101{*}{*}$, $\beta_{k*} = 01010{*}{*}$,

и возможны 6 вариантов полярности, при которых коды становятся смежными —

$(\beta_l \subset \beta_k)$:

$\beta_l = 0000001$, $\beta_k = 1111101$;

$\beta_l = 0000010$, $\beta_k = 1111110$;

$\beta_l = 0000011$, $\beta_k = 1111111$;

$(\beta_k \subset \beta_l)$:

$\beta_l = 1111101$, $\beta_k = 0000001$;

$\beta_l = 1111110$, $\beta_k = 0000010$;

$\beta_l = 1111111$, $\beta_k = 0000011$.

Пусть множество обобщенных интервалов $\Psi_0$ разбито на классы —

$$\Psi_0 = \bigcup_{j=0}^{2^m-1} I_j$$

и осуществлена минимизация для каждого класса в отдельности.

Для каждого из классов $I_j$ получена оценка $\theta_j$ числа покрывающих интервалов.

Пусть текущая полярность выходных сигналов считается нулевой. В качестве грубой оценки $\Theta^k$ числа покрывающих интервалов для системы функций при некоторой полярности $k$ возьмем сумму полученных оценок за вычетом оценки $\theta_k$:

$$\Theta^k = \sum_{j=0}^{2^m-1} \theta_j - \theta_k .$$

Затем рассмотрим возможность расширения интервалов некоторого класса $I_j$ за счет использования термов из других классов. Для этого:

— определим минимальный интервал, включающий все термы класса $I_j$;

— для каждого из термов, принадлежащих дополнению $I_j$ до найденного интервала, найдем класс, в который он входит (для осуществления расширения интервалов класса $I_j$ с использованием термов некоторого класса $I_k$ необходимо выполнение условия смежности: $\beta_j \subset \beta_k$);

— для каждого из найденных классов определим функцию равнозначности:

$\beta_{jk} = \beta_j \sim \beta_k$,

где ~ — логический оператор эквивалентности, применяемый поразрядно. Результат логической операции равен 1, если оба операнда имеют одинаковое значение (либо оба равны 0, либо оба равны 1):

$$\beta^i_{jk} = \begin{cases} 0, & \beta^i_j \neq \beta^i_k \\ 1, & \beta^i_j = \beta^i_k \end{cases} ;$$

— ранжируем выделенные классы в порядке увеличения числа единиц в векторе $\beta_{jk}$;

— осуществляем проверку возможности расширения интервалов класса $I_j$ с использованием термов выделенных классов в заданном порядке, при этом, рассматривая класс $\beta_{jk}$, используем для расширения интервалов класса $I_j$ также термы любого класса $I_l$, для которого справедливо $\beta_{jk} \subset \beta_{jl}$. В случае уменьшения оценки $\theta_j$ класса $I_j$ уменьшаем на соответствующую величину оценку для варианта полярности $\Theta^m$, где $m = \beta_j \oplus \beta_{jk}$.

*Пример*

Дана система функций:

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2 x_3 ;$$

$$f_2 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_1 ;$$

$$f_3 = \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2 x_3 = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3$$

или, в сокращенной записи:

$f_1 = \Sigma 0, 1, 6, 7;$

$f_2 = \Sigma 1, 3, 5, 7;$

$f_3 = \Sigma 2, 3, 4, 5.$

Получим обобщенные интервалы и разобьем их на классы:

| 000 | 001 | 010 | 100 | 011 | 101 | 110 | 111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,6 | | 2,4 | 1,7 | | 3,5 | |

Получим оценки для различных вариантов полярности (оценка текущего варианта — $\Theta^0$):

$\Theta^0 = 8$; $\Theta^1 = 6$; $\Theta^2 = 8$; $\Theta^3 = 6$;

$\Theta^4 = 6$; $\Theta^5 = 8$; $\Theta^6 = 6$; $\Theta^7 = 8$.

Найдем минимальный интервал, включающий термы класса $I_1$:

$0 \cup 6 = 6$; $0 \cap 6 = 0$; $\Rightarrow \{0, 2, 4, 6\}$.

Недостающие термы $\{2, 4\}$ находятся в классе $I_4$.

Определим функцию равнозначности:

$\beta_{1-4}=\beta_1 \sim \beta_4=\beta_2$.

Оценка $\theta_1$ класса $I_1$ уменьшилась на единицу (один интервал вместо двух), соответственно, уменьшаем на единицу оценку для варианта полярности $\Theta^m$, где $m=\beta_1\oplus\beta_2=3$:

$\Theta^3:=\Theta^3-1=5$.

Термы классов $I_1$ и $I_4$ взаимодополняемы до интервала $\{0, 2, 4, 6\}$, поэтому функции равнозначности идентичны.

Оценка $\theta_4$ класса $I_4$ уменьшается на единицу при использовании термов класса $I_1$. Это возможно при варианте полярности $m=\beta_4\oplus\beta_2=6$:

$\Theta^6:=\Theta^6-1=5$.

Аналогично, при рассмотрении возможности расширения интервалов классов $I_3$ и $I_6$ на единицу уменьшаются оценки для вариантов полярности $\theta^1$ и $\theta^4$, соответственно.

Дальнейшая корректировка оценок может осуществляться за счет проверки возможности "разборки" интервалов различных классов.

Термы, смежные с термами класса $I_1$, находятся в классах $I_3$ и $I_4$ ($\{1, 7\}$ и $\{2, 4\}$, соответственно). Для выполнения условий $\beta_3\subset\beta_1$ и $\beta_4\subset\beta_1$ необходимо, чтобы, как минимум, $\beta_1=\beta_3\oplus\beta_4$. Соответствующий вариант полярности $m=\beta_1\oplus\beta_1=6$:

$\Theta^6:=\Theta^6-2=3$.

Классы $I_3$, $I_4$ и $I_6$ разбираются при вариантах полярности 4, 3 и 1, соответственно.

Таким образом, для четырех вариантов полярности из восьми оценка $\Theta=3$.

В частности, для варианта полярности 6 (инвертируется значение второй и третьей функций) разбиение обобщенных интервалов на классы имеет вид:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 001 | 011 | |
| | | | |
| 000 | 010 | 101 | 111 |
| 3,5 | 2,4 | 1,7 | 0,6 |
| | 100 | 110 | |
| | | | |

Модифицированная система функций:

$$f_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3\ ;$$

$$\bar{f}_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 = \bar{x}_1\ ;$$

$$\bar{f}_3 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3 = x_2x_3 \vee x_2x_3$$

или, в сокращенной записи:

$f_1=\sum 0, 1, 6, 7;$

$\bar{f}_2=\sum 0, 2, 4, 6;$

$\bar{f}_3=\sum 0, 1, 6, 7.$

Видно, что модифицированная система функций использует только три различных терма.

***

Следует отметить, что при независимой "разборке" оценка не обязательно будет точной, причем возможна погрешность подсчета как в бóльшую, так и в меньшую стороны. Тем не менее, с высокой степенью вероятности варианту полярности, получившему минимальную оценку, будет соответствовать действительно оптимальный вариант.

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Голов А. В., Лузин С. Ю. Эффективный алгоритм синтеза многовыходных комбинационных автоматов // Технология и конструирование в электронной аппаратуре.— 1999.— № 1.— С. 39—40.

2. Ачасова С. М. Алгоритмы синтеза автоматов на программируемых матрицах.— М.: Радио и связь, 1987.

3. Лузин С. Ю. Асимптотически оптимальный метод получения простых импликант // Автоматика и выч. техника.— 2000.— Вып. 1.— С. 80—84.

4. Лузин С. Ю. Минимизация булевых функций с использованием спектра индексов // Автоматика и выч. техника.— 2001.— Вып. 3.— С. 56—63.

## НОВЫЕ КНИГИ

НОВЫЕ КНИГИ

**Крылов О. В. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТАХ.— М.: Радио и связь, 2002.— 104 с.**

Книга детально знакомит читателей с основами метода конечных элементов, начиная с изгиба балки до построения глобальных матриц жесткости упругих систем, задач теплопроводности, диффузии и определения собственных форм при колебаниях.

Построены матрицы жесткости одномерных, двухмерных и трехмерных элементов. Рассмотрены конечные элементы высших порядков.

Книга предназначена для студентов и аспирантов технических университетов, инженеров и научных работников, специализирующихся в численных методах расчёта сложных технических систем.

**Котоусов А. С. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАДИОСИСТЕМ.— М.: Радио и связь, 2002.— 224 с.**

Даются общие сведения о системах радиосвязи, радиолокации и радионавигации, рассматриваются специфические свойства каналов радиосвязи и их статические характеристики, вопросы оптимального обнаружения и различения сигналов. Излагаются основные принципы измерения параметров состояния объектов наблюдения в радиолокации и радионавигации, оптимальные методы выделения радиосигналов в системах передачи непрерывных сообщений. Рассматриваются задачи оптимального разделения ожидаемых и мешающих сигналов в системах радиосвязи.

Для студентов вузов, обучающихся по направлению "Радиотехника".