Д. т. н. С. Ю. ЛУЗИН, к. т. н. О. Б. ПОЛУБАСОВ

Россия, г. Санкт-Петербург, АО “Авангард”
E-mail: luzin1@rol.ru, pbas@rol.ru

Дата поступления в редакцию
18.03 2003 г.

Оппонент *к. т. н. В. С. СИТНИКОВ*
(ОНПУ, г. Одесса)

ВЫДЕЛЕНИЕ В ГРАФЕ НАИБОЛЬШЕГО ПОЛНОГО ПОДГРАФА В ЗАДАЧАХ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Показана целесообразность сочетания переборного алгоритма и методов редукции графа, не приводящих к потере наибольшего полного подграфа.

Задача нахождения в графе наибольшего полного подграфа, или максимальной клики [1, с. 46], является математической моделью ряда задач, возникающих при автоматизации монтажно-коммутационного проектирования. К этой задаче может быть сведена задача плотной упаковки разногабаритных объектов [2, с. 89] и компоновки узлов радиоэлектронной аппаратуры [3, с. 17]. Кроме того, к этой задаче сводится задача о минимальной раскраске графа [1, с. 75], которая используется для минимизации числа коммутационных слоев при проектировании топологии печатных плат и СБИС.

Большинство известных алгоритмов выделения наибольших полных подграфов (или максимальных клик) основано на полном или частичном переборе полных подграфов. В подобной постановке данная задача имеет экспоненциальную сложность уже потому, что требует в общем случае просмотра экспоненциального количества полных подграфов [4]. Поэтому структурные преобразования графов, не приводящие к потере информации о кликах графа и, в то же время, уменьшающие сложность исходного графа, представляют интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

В работе [2, с. 79] описан алгоритм, использующий процедуру разборки графа, основанную на последовательном удалении вершин, имеющих минимальную степень. В результате однократной разборки получают один из полных подграфов (не обязательно наибольший), который запоминается в качестве предварительного решения. Затем аналогичным образом разбираются подграфы, построенные на множестве вершин, являющихся окрестностями каждой из удаленных вершин. Подобная процедура также не дает существенного сокращения перебора при наличии в графе экспоненциального числа клик.

В настоящей работе рассмотрены способы сокращения перебора, позволяющие построить алгоритм нахождения максимума клик, имеющий полиномиальную оценку сложности для широкого класса графов.

Нахождение максимума клик методом редукции графа

Как уже отмечалось выше, процедура разборки графа, описанная в [2], неэффективна при экспоненциальном количестве клик. Так, например, графы Муна—Мозера [5] с $3n$ вершинами содержат 3^n клик, каждая из которых содержит только n вершин, в то время как степень каждой из вершин равна $3n–2$. При наличии в графе подобных подграфов могут иметь место случаи, когда вершина графа, имеющая минимальную степень и подлежащая, по [2], удалению, входит в максимальную клику графа. В подобных случаях алгоритм [2] не исключает практически полного перебора клик графа. Очевидно, удалять можно лишь вершины, отсутствие которых не влияет на наличие максимума клик в оставшейся части графа.

Отличительной особенностью NP-трудных многоэкстремальных задач (таких, например, как нахождение максимума клик или задача о покрытии множествами) является то, что в тех случаях, когда число экстремумов велико, большинство из них имеет одинаковое значение. То есть сложность состоит не столько в том, чтобы найти экстремум, сколько в том, чтобы убедиться в экстремальности найденного значения. В частности, в [5] показано, что если в графе все клики различаются по числу входящих в них вершин, то количество клик $\mathrm{P}(n)\approx n-[\log_2 n]$. Напротив, если все клики содержат одинаковое число вершин, то $P(n)$ достигает максимального значения.

Приведем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем:

X_i — множество вершин, смежных с вершиной x_i;

$\bar{X}_i$ — множество вершин, не смежных с вершиной x_i;

$|X|$ — мощность множества X;

$mcl(X_k)$— максимальное множество попарно смежных вершин в подграфе, порожденном множеством вершин X_k.

Опишем методы редукции графа, не приводящие к утрате максимума клик.

1. Пусть дан граф $G(X, V)$, где X — множество вершин, V — множество ребер. Выделим некоторую вершину $x_i \in X$. Пусть также $\bar{X}_i = X_i' \cup X_i''$, где X_i' — множество вершин из $\bar{X}_i$, смежных хотя бы с одной вершиной из X_i, а $X_i'' = \bar{X}_i \setminus X_i'$.

Если $X_i'' \neq \varnothing$, то все клики, содержащие вершины из X_i'', входят в подграф, порожденный $\bar{X}_i$, и задача поиска максимума клик разбивается на две:

поиск максимума клик в подграфе, порожденном $X\backslash X''_i$;

поиск максимума клик в подграфе, порожденном $\overline{X}_i$.

Пример

Граф, изображенный на **рис. 1**, имеет диаметр, равный 4. Выделим вершину x_1 и ее окрестность X_1. В подграфе, порожденном $\overline{X}_1=\{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, множество вершин $X'_1=\{x_5, x_6\}$ имеет связи с вершинами из X_1, а множество $X''_1=\{x_7, x_8, x_9\}$ не связано ни с одной вершиной из X_1.

При изложении последующих методов редукции считаем, что декомпозиция в соответствии с п. 1 осуществлена и $\overline{X}_i=X'_i$, т. е. $\overline{X}_i$ содержит только вершины, смежные с вершинами из X_i.

2. Пусть подграф, порожденный $\overline{X}_i$, содержит изолированные вершины, тогда удаление этих вершин не повлияет на наличие максимума клик в оставшейся части графа (**рис. 2**).

Действительно, наличие в подграфе, порожденном X_i, некоторой изолированной вершины x_m означает, что $X_m \subseteq X_i$ и, следовательно, подграф, порожденный $x_m \cup X_m$, не может содержать большей клики, чем подграф, порожденный $x_i \cup X_i$.

3. Пусть в графе G имеется k+1 вершин, для которых

$$x_i \cup X_i = x_j \cup X_j,\ (i, j \in \overline{1, k};\ i \neq j). \qquad (1)$$

Тогда если в подграфе, порожденном X'_m, есть вершины, степень которых не превосходит k, то удаление этих вершин не повлияет на наличие максимума клик в оставшейся части графа.

Пусть X^k — множество вершин, для которых выполняется (1). Обозначим через $A(X^k)$ (от adjacent — смежный) множество вершин, смежных с каждой вершиной из X^k; соответственно $\overline{A}(X^k)$ — множество вершин, не смежных ни с одной вершиной из X^k; $A'(X^k)$ — множество вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из $\overline{A}(X^k)$.

Пусть $x_i \in X^k$ и $x_p \in X'_i$, причем вершина x_p в подграфе, порожденном X'_i, имеет степень, не превосходящую k. Пусть также $X^p \subseteq X'_i$ — наибольшее множество попарно смежных вершин в подграфе, порожденном X'_i, такое, что $x_i \in X^p$. Тогда $|X^p| \leq k$.

Пусть $A(X^p)$ — множество вершин, смежных с каждой вершиной из X^p. Очевидно, что $A(X^p) \subseteq X'_k$. Поскольку $|X^p| \leq |X^k|$, то вершину x_p можно удалить.

4. Пусть подграф, порожденный множеством вершин $X_q \cap X_i$ $(x_q \in X_i)$, содержит изолированные вершины, тогда можно удалить ребра, соединяющие x_q с этими вершинами.

5. Пусть подграф, порожденный X'_i, является полным и для любой вершины из X'_i выполняется

$$x_t \cup X_t = x_s \cup X_s\ (x_t,\ x_s \in X_i;\ t \neq s),$$

тогда

$$mcl(X\backslash\{x_i\}) = mcl(X'_i) \cup mcl(X_i \cap X_t),$$

т. е. задача сводится к нахождению максимума клик в подграфе, порожденном $X_i \cap X_t$.

6. Пусть $k_j=|X_j \cap X_i|$ (k_j — число вершин из X_i, смежных с вершиной $x_m \in X'_i$),

$l_m=|X_j \cap X_i|$ (l_m— число вершин из X_i, смежных с вершиной $x_m \in X'_i$),

$$Q=|mcl(x_i \cup X_i)|,$$

$$P=|mcl(X'_i)|.$$

Пусть также $Q>P$ (в противном случае количество клик в графе невелико), тогда если $k_j \leq Q-P$, то вершину $x_k \in X'_i$ можно удалить вместе с инцидентными ей ребрами.

7. Пусть $x_i \in X_m$, $x_j \in X_i$, тогда если $l_m+k_j \leq Q$, то можно удалить ребро, соединяющее x_m с x_j, а k_j и l_m уменьшить на единицу.

8. Пусть вершина $x_k \in X'_i$ имеет максимальное значение $|X_k \cap X_i|$, тогда если в подграфе, порожденном $X_k \cap X_i$, имеются вершины, степень которых меньше $Q-P$, то можно удалить ребра, соединяющие эти вершины с вершинами из X'_i.

9. Пусть граф представляет собой соединение [6, с. 37] k графов, т. е. в графе G множество вершин X разбито на k непересекающихся классов:

$$X=\bigcup_{j=1}^{k} X^j \quad (\forall i, j \in \overline{1, k}\ \exists X^i \cap X^j = \varnothing),$$

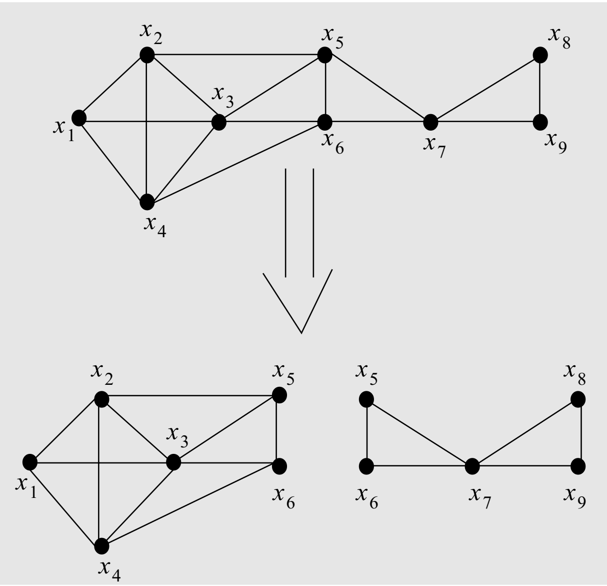

Рис. 1. Декомпозиция графа с диаметром, большим двух

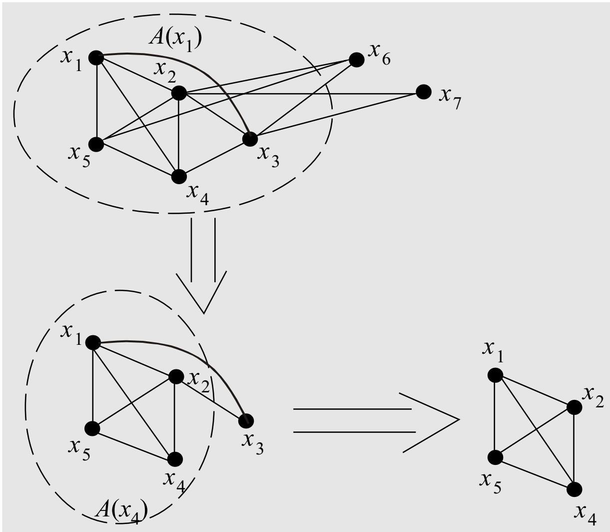

Рис. 2. Удаление вершин (x_6, x_7, а затем x_3), окрестности которых принадлежат несмежной с ними вершине (x_1, а затем x_4)

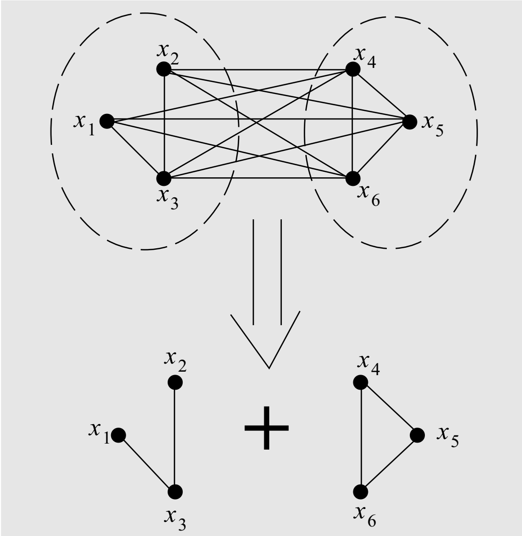

Рис. 3. Соединение графов

и при этом вершины, принадлежащие различным классам, попарно смежны (**рис. 3**). Тогда

$$mcl(X)=\sum_{j=1}^{k} mcl(X^{j}) .$$

Отметим, что число клик в таком графе равно произведению числа клик каждого из подграфов, образованных вершинами разных классов, однако приведенное разбиение позволяет при переборе заменить произведение суммой.

Если при этом вершины в каждом из классов попарно несмежны, то максимальная клика может быть получена выбором по одной вершине из каждого класса.

Вероятность того, что произвольный граф будет обладать подобным свойством, весьма мала, к тому же рекурсивное применение к такому графу второго правила редукции за линейное время редуцирует граф до максимальной клики. Однако в графе G можно выделить подграф G' подобного вида, в подграфе $G\backslash G'$ — подграф G'' подобного вида и т. д. Подобное выделение полезно тем, что дает представление о размере максимальной клики в подграфе без выбора конкретной клики и без перебора всех клик данного подграфа. Выбор конкретных клик из, возможно, экспоненциального относительно числа вершин подграфа их количества осуществляется уже на основе анализа подматриц, связывающих подграфы G', G''…, и соответствующих их разбиений.

Дополнительная польза от подобного представления графа — возможность получения оценки максимального числа клик в графе (произведение числа вершин в классах разбиения).

Пример

Рассмотрим граф G, изображенный на **рис. 4**. В нем 12 клик, из них девять содержат по четыре вершины и три клики содержат по три вершины. Первые восемь из n приведенных выше методов редукции не позволяют упростить данный граф.

На **рис. 5** представлена матрица смежности графа, преобразованная в соответствии с описанным алгоритмом.

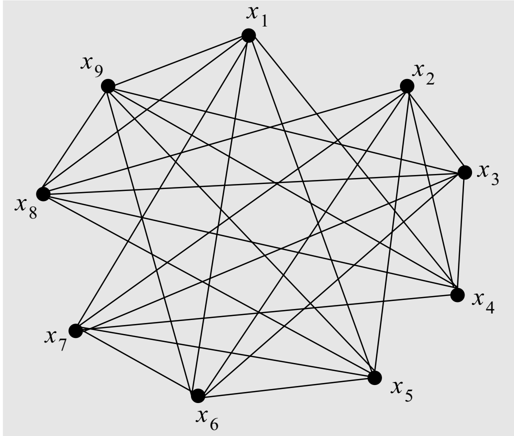

Рис. 4. Регулярный граф степени 6

	1	2	7	8	4	5	6	3	9
1	**0**	**0**	1	1	1	1	1	0	1
2	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	**0**	**0**	1	1	1	1	0
8	1	1	**0**	**0**	1	1	0	1	1
4	1	1	1	1	**0**	**0**	0	1	1
5	1	1	1	1	**0**	**0**	1	0	1
6	1	1	1	0	0	1	**0**	**1**	1
3	0	1	1	1	1	0	**1**	**0**	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	**0**

Рис. 5. Преобразованная матрица смежности графа

Подграф G', порожденный множеством вершин $\{x_1, x_2, x_4, x_5, x_7, x_8\}$, разбит на три пустых подграфа ($\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_7, x_8\}$) с попарно смежными вершинами. Подграф $G\backslash G'$, порожденный множеством вершин $\{x_3, x_6, x_9\}$, — полный. Он также является кликой, поскольку в подматрице связи между подграфами G' и $G\backslash G'$ нет ни одной строки, содержащей только единицы.

Любая совокупность вершин, взятых по одной из множеств $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_7, x_8\}$, дает полный подграф с тремя вершинами. Увеличить размер полного подграфа до четырех вершин можно, если на множестве $\{x_3, x_6, x_9\}$ есть вершина, смежная хотя бы с одной вершиной каждого из подмножеств $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_7, x_8\}$. Этим свойством обладают все вершины подмножества $\{x_3, x_6, x_9\}$. Пятивершинный полный подграф может быть получен, если подматрица, связывающая подграфы $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_7, x_8\}$ и $\{x_3, x_6, x_9\}$, содержит три одинаковых строки, взятых по одной для каждого из подмножеств $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_5\}$, $\{x_7, x_8\}$ (или пару столбцов, пересечение которых содержит хотя бы по одной единице в каждой паре строк). Поскольку эти условия не выполняются, то максимум клик графа содержит четыре вершины, например, $\{x_1, x_5, x_6, x_7\}$.

Заметим, что максимум клик найден без выделения всех (и даже части) клик.

Обсуждение комбинаторной сложности алгоритма

Первый из приведенных выше методов редукции графа позволяет осуществить декомпозицию для всех графов с диаметром, большим двух. Очевидно, что если некоторый граф содержит полиномиальное количество клик, то даже алгоритм, основанный на перечислении клик, выделит максимальную из них за полиномиальное время. Поэтому наибольший интерес представляет эффективность применения описанных методов на графах, количество клик в которых является показательной функцией количества вершин.

Пусть G — полный k-дольный граф. В нем множество вершин разбито на k классов. Любая из вершин смежна со всеми вершинами, кроме вершин, принадлежащих классу, в который она входит. В таком графе любой подграф, порожденный произвольной совокупностью из k вершин, взятых по одной из каждого класса, представляет собой клику.

Пусть a_i — количество вершин в группе i. Тогда количество клик в графе

$$P=\prod_{i=1}^{k} a_i .$$

Заметим, что $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$.

Можно показать, что максимальное значение P при заданном k достигается, когда $a_1=a_2=...=a_k=n/k$, т. е. $\max P=(n/k)^k$.

Кроме того, максимум $P(k)$ достигается при $k=n/e$ (e = 2,718 ...).

В [5] показано, что максимальное количество клик в графе с n вершинами равно

$$P_{\max}(n)=\begin{cases} 3^{n/3} & n\equiv 0 \pmod 3 \\ 4\cdot 3^{(n-4)/3} & n\equiv 1 \pmod 3 \\ 2\cdot 3^{(n-2)/3} & n\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

В этой же работе содержится доказательство того, что граф, достигающий этих границ, единственный. Применение метода 2 дает возможность найти максимум клик в подобных графах за время, равное времени выделения одной из клик графа.

Действительно, выбирая некоторую вершину x_i, получаем, что подграф, порожденный множеством вершин X_i', содержит только изолированные вершины, следовательно, их можно удалить. Аналогичную ситуацию получаем при выборе следующей вершины в подграфе, порожденном X_i, и т. д. В результате будет получена клика, совпадающая с редуцированным графом, т. е. максимум клик.

Пример

На **рис. 6** изображен граф Муна—Мозера M_3 [5]. В нем 27 клик, содержащих по три вершины. Матрица смежности графа представлена на **рис. 7**. Множество вершин разбито на три класса: $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$ и $\{x_7, x_8, x_9\}$. Любая совокупность вершин, взятых по одной из каждого множества, образует клику, например $\{x_1, x_4, x_7\}$.

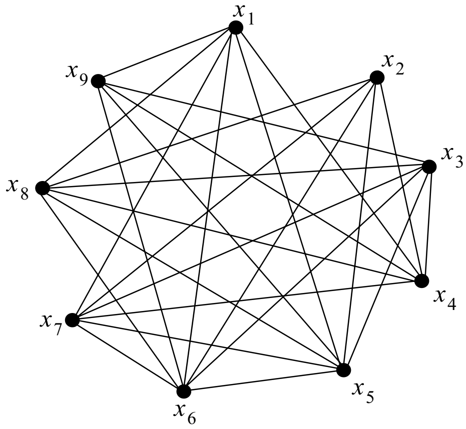

Рис. 6. Граф Муна—Мозера M_3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1
2	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1
3	**0**	**0**	**0**	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	**0**	**0**	**0**	1	1	1
5	1	1	1	**0**	**0**	**0**	1	1	1
6	1	1	1	**0**	**0**	**0**	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**
8	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**
9	1	1	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**

Рис. 7. Матрица смежности графа Муна—Мозера M_3

Заметим, что графы, изображенные на рис. 4 и 6, имеют одинаковое количество вершин и ребер. Граф на рис. 6 содержит больше клик, однако максимум клик в нем выделяется быстрее.

***

Целесообразный подход к эффективному решению задачи о клике заключается в сочетании некоторого переборного алгоритма и приведенных выше методов редукции, применяемых как к графу в целом, так и к его подграфам.

Если граф содержит подграфы с числом клик, экспоненциальным относительно числа вершин в этих подграфах, то приведенные выше методы редукции графа позволяют оборвать большинство ветвей дерева поиска. В тех же случаях, когда число клик в графе мало, задача может решаться переборным путем.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Кристофидес Н. Теория графов. – М.: Мир, 1978.
2. Бершадский А. М. Применение графов и гиперграфов для автоматизации проектирования РЭА и ЭВА.— Изд-во Саратовского ун-та, 1983.
3. Методы разбиения схем на конструктивно законченные части / Под ред. К. К. Морозова.— М.: Радио и связь, 1978.
4. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы.— М.: Мир, 1980.
5. Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math.— 1965.— Vol. 3.— P. 23—28.
6. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.