PACS: 05.70.–a, 62.50.–p

И.Р. Венгеров

ТЕПЛОФИЗИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ (Обзор)
IV. МОДЕЛИ МАКРОУРОВНЯ

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
ул. Р. Люксембург, 72, г. Донецк, 83114, Украина

Статья поступила в редакцию 27 января 2006 года

Завершение обзора, публиковавшегося в № 1–3 ФТВД за 2006 г. Рассмотрены макроскопические модели механики сплошных сред и теории тепломассопереноса при частных и взаимосвязанных процессах переноса импульса, тепла и массы. Сформулированы принципы дальнейшего развития парадигмы ТФДТ, изложены некоторые результаты, полученные в этом направлении.

1. Модели механики сплошных сред

1.1. Классификация моделей

Основным матаппаратом макромоделей процессов переноса импульса, тепла и массы являются дифференциальные уравнения в частных производных и краевые задачи для них. Классификация этих моделей «7НЕ» была изложена в первой части настоящего обзора (ФТВД **16**, № 1 (2006)).

Для физиков-экспериментаторов и инженеров, работающих в области физики твердого тела, привычна иная классификация – по видам и физическим особенностям деформирования. В рамках реологии (науки о нестационарном деформировании (либо течении) любых, в том числе твердых, тел в различных термодинамических и физико-механических условиях [33][*]) рассматриваются три главных направления (класса моделей): теории упругости, пластичности и ползучести [18,33,36,38,45,139,170,171,197–204]. Широкое распространение получили и «смешанные» модели: вязкоупругости, вязкопластичности, упругопластичности и др. [33,36,139,197,202,203].

В теории упругости различают модели: статические и динамические; линейные и нелинейные; одномерные, плоские и трехмерные; изотропные и анизотропные. Поскольку теория упругости является идейным ядром и составной частью теорий пластичности и ползучести, она играет ведущую роль в развитии

[*] В данной части обзора используется сквозная нумерация литературных источников и формул (см. № 1–3 ФТВД за 2006 г.).

методов ТФДТ. Для разработки проблемы идентификации моделей по экспериментальным данным на первом этапе наиболее важны динамические модели изотропной одно- и двумерной линейной упругости в перемещениях (уравнения Ламе) – базисные модели упругости.

В теории пластичности особо важны понятия простого и сложного нагружения, активной и пассивной деформации, что сильно усложняет используемый матаппарат по сравнению с таковым в теории упругости. С практической точки зрения есть два направления моделирования. В первом исследуется ход упругопластического деформирования тела и поле напряжений в нем при заданном законе нагружения. Во втором определяются параметры внешней нагрузки, при превышении которых происходит разрушение (определение несущей способности конструкции). Все теории пластичности (а их много, что свидетельствует о неудовлетворительном состоянии теории) относятся к одному из двух видов: теориям упругопластических деформаций (в их основе – уравнения связи между напряжениями и деформациями) и пластического течения (в основе – уравнения связи напряжений и скоростей деформаций). Проверенной экспериментально и логически непротиворечивой является теория малых упругопластических деформаций [33].

В теории ползучести рассматриваются неравновесные деформационные процессы. Различают кратковременную и длительную ползучесть, т.е. изменение во времени деформаций и напряжений, обусловленных начальным (остающимся постоянным) нагружением. Изменения деформации при постоянной нагрузке (упругое последействие) и напряжения при постоянной деформации (релаксация) – две разновидности процесса ползучести. Единая теория ползучести отсутствует, широко применяются эмпирические методы [204]. Имеются два класса наиболее употребительных, в силу их простоты и возможности экспериментальной проверки, моделей ползучести, использующих представления об упруго- и пластически-вязких телах.

1.2. Модели упругости, пластичности, ползучести

Модели упругости являются основой реологии, однако базисное уравнение динамической теории упругости в перемещениях (Ламе) [36]:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)}\Delta\mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} \qquad (98)$$

имеет существенный недостаток с точки зрения его адекватности для описания диссипативных (эволюционных) процессов – оно волновое (гиперболическое). В (98) $\mathbf{u}$ – вектор смещения точки среды; ρ – ее плотность; E, ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Другим недостатком (98) является то, что коэффициенты E и ν – адиабатические, выражающиеся через изотермические (равновесные) коэффициенты и абсолютную температуру тела (т.е. различные для точек с разной температурой – см. (47)). Кроме того, вывод (98) сопровождается большим количеством оговорок и дополнительных гипотез (см. [36, с. 10,11,14,16,19,21,28,31,124]), относящих это уравнение к нулевому приближению теории (аналогом (98) в гидродинамике является уравнение Эйлера для идеальной жидкости).

Более реалистично приближение, учитывающее вязкость (диссипацию) среды. Оно следует из общего вида уравнения движения [36]:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{99}$$

где $\ddot{u}_i$ – декартовы компоненты ускорения (i, k = 1, 2, 3), ρ – плотность среды, σ_{ik} – компоненты тензора напряжений. Если $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)}$, т.е. тензору, линейному по деформациям u_{ik} (обобщенный закон Гука), то правая часть (99), записанная в векторном виде, совпадает с правой частью (98). Для учета вязкости σ_{ik} записывается в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \sigma'_{ik}, \quad \sigma'_{ik} = \eta_{iklm} v_{lm}, \tag{100}$$

где σ'_{ik} – компоненты диссипативного (вязкостного) тензора напряжений, η_{iklm} – компоненты тензора вязкости, $v_{lm} = \dot{u}_{lm}$ – компоненты тензора скоростей деформации. Подстановка первого из соотношений (100) в (99) дает искомое первое приближение – уравнение упругости с учетом диссипации. Для изотропного тела

$$\sigma'_{ik} = 2\eta\left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll}\right) + \zeta v_{ll} \delta_{ik}, \tag{101}$$

где η, ζ – коэффициенты соответственно сдвиговой и объемной вязкости. Выражение для $\partial\sigma'_{ik}/\partial x_k$ в векторном виде формально совпадает с правой частью (при исключении градиента давления) уравнения движения вязкой жидкости (Навье–Стокса), так что правая часть (98) будет теперь содержать операторы $\Delta\mathbf{u}$, grad div $\mathbf{u}$, $\Delta\dot{\mathbf{u}}$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{u}}$ и четыре константы – E, ν, η, ζ, являющиеся таковыми лишь приближенно. Таким образом, учет реальных свойств среды (диссипации) в рамках парадигмы ведет к достаточно громоздкой математической конструкции.

Модели пластичности при простом нагружении опираются на положение (основное и для нелинейной теории упругости) о том, что зависимость между интенсивностями напряжений и деформацией при сложном напряженном состоянии для каждой точки тела совпадает с таковой для напряжения и удлинения в случае простого растяжения того же тела [33]. Если для этого тела в испытаниях на растяжение-сжатие установлена зависимость

$$\sigma = A\left(\frac{\varepsilon}{B}\right)^m \tag{102}$$

(где σ, ε – соответственно напряжение и относительное удлинение образца, A, B, m = const), то для пластической деформации следует положить

$$\sigma_i = A\left(\frac{\varepsilon_i}{B}\right)^m, \tag{103}$$

где A, B, m не совпадают с таковыми для (102), а σ_i, ε_i – соответственно интенсивности напряжений и деформаций, в пределах упругости связанные зависимостью $\sigma_i = E\varepsilon_i$:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right]^{1/2},$$
$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)}\left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2\right]^{1/2}. \tag{104}$$

Если результаты испытания на простое растяжение за пределом упругости представлены в виде

$$\sigma = E(1 - \omega)\varepsilon, \tag{105}$$

то для сложного напряженного состояния того же материала

$$\sigma_i = E(1 - \omega)\varepsilon_i, \tag{106}$$

где E – модуль упругости материала (обычный), $\omega = \Psi(\varepsilon)$ – аналитическая функция относительного удлинения (отличная от нуля только в области пластического деформирования). В (106) принимается, что $\omega = \Psi(\varepsilon_i)$. Таким образом, аналог закона Гука для пластической деформации принимает (в плоском случае) вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'}(\sigma_x - \nu'\sigma_x), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E'}(\sigma_y - \nu'\sigma_x), \quad E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \nu' = \frac{1}{2}. \tag{107}$$

Математический аппарат теории малых упругопластических деформаций состоит из трех статических уравнений (совпадающих с таковыми уравнениями теории упругости), шести геометрических соотношений, таких же, как в теории упругости, шести физических уравнений, определяющих свойства упругопластического тела. Для плоской задачи последние сводятся к следующим:

$$\sigma_x - \sigma_{av} = 2G'\varepsilon_x, \quad \sigma_y - \sigma_{av} = 2G'\varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = G'\gamma_{xy},$$
$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[6(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2\right]^{1/2}, \quad G' = G[1 - \omega(\varepsilon_i)]. \tag{108}$$

Как видно, даже для двумерной задачи теория достаточно сложна.

Теория пластического течения опирается на такие гипотезы: 1) направления максимальной скорости скольжения и максимального касательного напряжения в каждой точке совпадают; 2) материал при пластической деформации несжимаем. Связь между σ_i и $\dot{\varepsilon}_i$ задается в виде

$$\sigma_i = M\dot{\varepsilon}_i, \quad M = M(\dot{\varepsilon}_i). \tag{109}$$

Уравнения теории следуют из уравнений малых упругопластических деформаций при формальной замене $\varepsilon_x \to \dot{\varepsilon}_x$, $\frac{\partial u}{\partial x} \to \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$, $\varepsilon_i \to \dot{\varepsilon}_i$ и т.д. Решение задач теории пластичности в перемещениях часто осуществляется методом «упругих» решений. Формулы теории упругости трансформируются с учетом соотношений

$$G' = G(1 - \omega), \quad \omega = 1 - \sigma_i/3G\varepsilon_i, \quad \tau_{xy} = G(1 - \omega)\gamma_{xy}$$

и т.д. Здесь G, G' – постоянный и переменный модули упругости, $\omega = \omega(\varepsilon_i)$ – функция А.А. Ильюшина. Уравнение Ламе для x-компоненты смещения принимает вид

$$(\lambda + G)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + G\nabla^2 u + \rho X = R_x G, \qquad (110)$$

где λ, G – упругие модули; X – компонента объемной силы; $\Theta = 3\varepsilon_{\mathrm{av}}$;

$$R_x = \omega\left(\nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial\omega}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\Theta\right) + \frac{\partial\omega}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \qquad (111)$$

Решение осуществляется методом последовательных приближений, причем в первом приближении $\omega = 0$ и (11) становится однородным, т.е. получается обычная задача теории упругости. Затем по найденным компонентам смещения u, ϑ, w определяются все необходимые величины, и по формулам типа (111) вычисляются правые части (110) для решения задачи второго приближения. Процедура повторяется нужное число раз. Ясно, что громоздкость применяемых методов не позволяет использовать их для решения неординарных задач – моделей совместно протекающих процессов деформирования и тепломассопереноса.

Модели ползучести зачастую рассматриваются как квазистатические, т.е. в деформационных расчетах силами инерции пренебрегают. Для модели линейного упруговязкого тела исходным является выражение [33]:

$$\sigma + n\dot{\sigma} = E\varepsilon + Hn\dot{\varepsilon}, \qquad (112)$$

где E – «длительный», а H – «мгновенный» модули упругости; E, H, n = const. При начальном условии $\varepsilon(0) = \varepsilon(t)|_{t\to 0} = \varepsilon_0 = \sigma_0/H$ решение (112) имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \sigma_0\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{E}\right)\exp\left(-\frac{Et}{Hn}\right). \qquad (113)$$

Если при $t = t_0$ разгрузить тело (т.е. положить $\sigma_0 = 0$), то, начиная с этого момента, из (113) следует

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{E(t - t_0)}{Hn}\right). \qquad (114)$$

При $t \to \infty$ $\varepsilon(t) \to 0$, т.е. деформация исчезает (тело упругоползучее).

В случае наличия у стержня постоянной, далее не меняющейся деформации $\varepsilon = \varepsilon_0$ = const, из (112) следует

$$\sigma = \sigma(t) = E\varepsilon_0 + (\sigma_0 - E\varepsilon_0)\exp\left(-\frac{t}{n}\right). \qquad (115)$$

Эта зависимость описывает релаксацию (убывание до $E\varepsilon_0$) напряжения при $t \to \infty$.

Основные уравнения теории установившейся ползучести (когда $\dot{\varepsilon}_i$ = const) следуют, как и ранее, из уравнений теории упругости, модифицированных методом, аналогичным теории пластичности, а именно:

1) для величины $\dot{\varepsilon}_i$ применяем ранее приведенные формулы;

2) предполагаем, что $\dot{\varepsilon}_i$ связана с интенсивностью напряжений так же, как скорость одномерной установившейся ползучести связана с растягивающим (сжимающим) напряжением и известна заранее, $\dot{\varepsilon}_i = \psi(\sigma_i)$;

3) результаты экспериментов с одномерной ползучестью представляются в виде $\sigma_i = M^*(\varepsilon_i)\dot{\varepsilon}_i$;

4) физические уравнения связей напряжений и скоростей деформации приводятся к виду, учитывающему условие несжимаемости ($\dot{\varepsilon}_{\mathrm{av}} = 0$):

$$\sigma_x - \sigma_{\mathrm{av}} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\dot{\varepsilon}_x, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\dot{\varepsilon}_i}\dot{\gamma}_{xy} \text{ и т.д.}$$

Таким образом, имеется формальная аналогия теории установившейся ползучести с теориями упругопластических деформаций и течения.

1.3. Многоуровневые модели

Разработка новых материалов и эксплуатация изделий из них потребовали уточнения и усложнения известных реологических моделей, включения в них информации о структуре и свойствах вещества на микро- (атомно-молекулярном) и мезоуровнях (учет различных дефектов, межзеренных границ, неоднородности химического состава). Появились модели, сочетающие феноменологический подход с микроскопическим, причем первый играл основную роль, определяя макропараметры описания и форму уравнений, а второй – вспомогательную, устанавливая связи между макро- и микропараметрами либо вводя в уравнения различные формы нелокальности [9,10,12,17,18,30,36,139,140,205–207].

В случае временно́й нелокальности говорят о «среде с памятью», предполагается, что «память» обусловлена особенностями микроструктуры среды [30,139]. Координатная нелокальность в уравнениях движения также обусловлена особенностями структуры материала (в особенности кристаллов) и взаимодействий микро- и мезоструктурных единиц [30,140].

Известны также модели неоднородных сред, в которых осуществляется усреднение по объемам, содержащим представительное количество микро- и макрообъектов, и находятся эффективные поля и параметры [205–207]. В этих подходах макроописание содержит в себе информацию о микро- и мезоструктуре вещества и его кинетических свойствах, которая фактически постулируется, поскольку не известна. Если уравнение движения содержит нелокальные (т.е. интегральные) операторы, то идентификация вида и параметров ядер таких операторов по результатам механических испытаний – трудная задача. Определение эффективных параметров (модулей упругости, коэффициентов Пуассона и т.п.) по структурным моделям аналогично вычислению кинетических коэффициентов методами статистической физики, когда результат зависит от произвольно выбранного вида взаимодействия атомов. Известно, что во всех сколько-нибудь ответственных теплофизических и гидродинамических моделях используются параметры переноса, определенные экспериментально, а не расчетным путем. Поэтому наиболее перспективным с практической точки зрения представляется использование простых локальных моделей сплошной среды с обязательной экспериментальной их идентификацией.

Третьим, относительно новым, направлением в развитии реологических моделей, является так называемая структурно-аналитическая механика (САМ) [10–12]. Ее появление призвано, как считают авторы работы [10], способствовать преодолению неполноты макроскопического описания, объединению методов механики сплошной среды (где структура материала считается известной) и физики твердого тела (где анализ структуры – задача исследований). Основная идея САМ – решение обеих задач в самосогласованной постановке, при которой решение краевых задач механики сплошной среды сочетается с решением задач эволюции структуры (в частности, движения дислокаций) в рамках ФТТ.

Реализация этой сложной программы потребовала введения усложненных моделей сплошной среды (среды Коссера и др.), тензоров моментных напряжений, понятий мотора и моторного анализа и др. Простейшее уравнение движения при этом имеет вид

$$\rho\ddot{U}_l = \nabla_i\sigma_{il} - \tfrac{1}{2}e_{ikl}\nabla_k\nabla_i\mu_{ij} - \tfrac{1}{2}e_{ikl}\nabla_k M_i + F_l, \tag{116}$$

где $\sigma_{ij} = \partial\Pi/\partial\varepsilon_{ij}$ – силовые напряжения, $\mu_{ij} = \partial\Pi/\partial\chi_{ij}$ – моментные напряжения, П – плотность упругой энергии, F_l – компоненты объемных сил, M_i – компоненты объемных моментов, e_{ikl} – символы Леви–Чевита, $\chi_{lk} = \nabla_l\omega_k$, $\omega_k = \tfrac{1}{2}e_{ikl}\omega_{ij}$, $\omega_{ij} = \nabla_i U_j$.

При построении модели двухуровневой среды [10] на микроуровне (внутри структурных элементов) задаются поля перемещений. Вводится тензор микродисторсии $\beta_{ij}^{(1)} = \nabla_i^{(1)}U_j^{(1)}$. Предполагается отсутствие дисклинаций и вводятся пластическая дисторсия $\beta_{ij,p}^{(1)}$ и тензор плотности дефектов на микроуровне $\alpha_{ij}^{(1)} = -e_{ikl}\nabla_k^{(1)}\beta_{ij,p}^{(1)}$, скорость генерации пластической дисторсии $\dot{\beta}_{ij,p}^{(1)} = -e_{ikl}\upsilon_k^{(1)}\alpha_{lj}^{(1)}$. На втором уровне (макроуровне) «точками» среды служат элементы первого уровня, вводятся средняя по объему V_1 элемента первого уровня дисторсия

$$\psi_{ij} = \frac{1}{V_1}\int\limits_{V_1}\beta_{ij}^{(1)}\,\mathrm{d}V$$

и тензор макродисторсии $\beta_{ij}^{(2)} = \nabla_i^{(2)}U_j^{(2)}$. После громоздких преобразований в итоге получены уравнения макроуровня:

$$\rho\ddot{U}_j^{(2)} = \nabla_i^{(2)}\sigma_{ij} + F_j\,;\;\; \nabla_k^{(2)}\mu_{kij} + \sigma_{ij} - \tau_{ij} + M_{ij} = \frac{1}{3}\rho d_{ik}^{(2)}\ddot{\psi}_{kj}\,, \tag{117}$$

где

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_{ij}^{l}}, \quad \tau_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{ij}^{l}}, \quad \mu_{kij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \chi_{kij}^{l}}, \ldots$$

Громоздкость и сложность моделей, рассмотренных далее в [10] и [12], нарастает. Авторов не смущает, что введение все новых и новых величин ведет за собой и включение в описание новых, заведомо не известных параметров, определение которых экспериментально – неразрешимая задача. Анализ моделей САМ [10,12] приводит к «диагнозу», ранее сформулированному для аналогичных построений в других областях механики [208]: мы имеем дело с «механикоподобной» математикой, практическое использование методов и результатов которой невозможно.

2. Модели диффузии

2.1. Процессы твердотельной диффузии

Ряд макромоделей диффузии уже был рассмотрен ранее (ФТВД, 2006, № 2, 3). Отвлекаясь от микромеханизмов диффузии, всю совокупность феноменологических математических моделей ее в твердых телах можно классифицировать следующим образом: объемная диффузия, каналируемая, реакционная и диффузия в физико-химических процессах.

Объемной диффузией называются диффузионные процессы, протекающие в объеме монокристалла или в зернах поликристаллических тел. Модели объемной диффузии обычно используются для интерпретации результатов экспериментов и определения коэффициентов диффузии [2,7,32,41]. Рассматриваются одно-, двух- и трехмерные модели диффузии и взаимной диффузии в средах однородных и неоднородных, одно- и многофазных, линейных и нелинейных, стационарных и нестационарных (с изменением во времени коэффициента диффузии или (и) изменяющимся местоположением границ областей). Неоднородность систем макроскопическая: рассматриваются слоистые, неоднородные и слоисто-неоднородные системы [8,32,39,43].

К ***каналирумой диффузии*** относят ее «ориентированные» разновидности: диффузию вдоль межзеренных границ (зернограничную), вдоль поверхностей кристалла, вдоль протяженных дефектов, по направлению действия сил (различного происхождения) [15,41,42,131,193]. Сюда же относятся различные модели «аномального» массопереноса (при ударной деформации тел) [32,209–212]. Специфика моделей каналируемой диффузии заключается в их маломерности (одно- и двумерные системы) и бóльших (иногда – на несколько порядков) коэффициентах диффузии. Иногда рассматриваются модели взаимодействующих видов массопереноса – объемной и каналируемой диффузии (классический пример – модель Фишера).

Реакционной диффузией называется [32] класс диффузионных процессов, связанных с образованием и ростом слоя новой фазы, ростом эпитаксиальных слоев [8,19,114]. Сюда же относятся имеющие диффузионную природу процессы сварки разнородных металлов, коррозионные процессы, процессы химико-термической обработки и гомогенизации гетерогенных сплавов. Процессы термической деградации композитов также сопровождаются реакционной диффузией.

Диффузия в физико-химических процессах является главенствующим процессом в совокупности их, одновременно протекающих на поверхности кристаллов и в порах пористых тел. Это процессы окисления, фазовых переходов, абсорбции, адсорбции, фильтрации, осмоса, электропереноса, химических реакций [7,8,32,39,41,43,78,89,93]. Поскольку физико-химические процессы протекают практически при всех твердотельных технологических процессах, прогноз диффузионных процессов и управление ими является актуальной задачей, стимулирующей развитие методов построения и исследования соответствующих математических моделей [41,48,82,84,85,93,97,112,114].

2.2. Математические модели диффузии

При большом разнообразии твердотельных систем и диффузионных процессов в них вполне обозримо число различных классов математических моделей, многие из которых адекватны для различных на первый взгляд ситуаций [32,131]. Наиболее полным обзором этих моделей является монография [131], в которой рассмотрены два класса моделей: 1) с постоянным коэффициентом диффузии (одно-, двух- и трехмерная диффузия при различных условиях в областях простейших форм); 2) с переменным коэффициентом диффузии (зависящим от пространственных координат, времени или концентрации). Такая классификация моделей имеет свои преимущества, однако носит частный характер. Анализ моделей, рассмотренных в [131] (и во всех других известных источниках), показывает, что их совокупность может быть описана семью пунктами (кластерами) – классификацией «7НЕ» (см. подразд. 3.3. в ФТВД № 1, 2006).

Основным вопросом моделирования процессов массопереноса в деформируемых телах является построение уравнений диффузии в нестационарной (с переменными размерами области, плотностью и другими параметрами) среде. Несмотря на наличие работ, в которых такие задачи рассматриваются [8,39,42,114,131,209], общее решение проблемы отсутствует.

3. Модели теплопереноса

Модели теплопереноса в твердых телах крайне многочисленны (литературные источники, число которых легко увеличить, ранее уже приводились). В [138] было показано, что вся совокупность моделей охватывается классификацией «7НЕ». Как и в случае диффузии, моделирование теплопроводности в нестационарных (с изменяющимся размером областей) системах встречается с трудностями [11,29,31]. Подробное рассмотрение моделей теплопереноса в настоящей работе излишне, поскольку имеется большое число монографий и обзоров [11,25,27–31,63,64,78,90,92,94–101,117,132–138,155,174,175,213].

4. Неординарные модели

4.1. Взаимосвязанный тепло- и массоперенос

Математические модели взаимосвязанного переноса тепла и массы в линейной постановке изучены давно (работы А.В. Лыкова и его школы [25,31,133,153]). Нелинейные модели начали исследоваться недавно

[31,214]. Система линейных уравнений в «каноническом» виде (модель сушки капиллярно-пористого влажного тела) [153]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_{11}\nabla^2 T + K_{12}\nabla^2 U\,,\quad \frac{\partial U}{\partial t} = K_{21}\nabla^2 U + K_{22}\nabla^2 T\,,\quad K_{ij} = \text{const}\ (i, j = 1, 2). \tag{118}$$

Здесь T – температура, U – влагосодержание тела (аналог концентрации). Система (118) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \tilde{K}_{11}\nabla^2 T + \tilde{K}_{12}\frac{\partial U}{\partial t}\,,\quad \frac{\partial U}{\partial t} = \tilde{K}_{21}\nabla^2 U + \tilde{K}_{22}\frac{\partial T}{\partial t}\,, \tag{119}$$

где $\tilde{K}_{ij}$ просто выражается через K_{ij} $(i, j = 1, 2)$.

Известны различные обобщения модели [118], в частности на случаи гиперболических и нелинейных уравнений переноса [153,214]. Система последних имеет вид [214]:

$$\begin{aligned} C_1(U_1)\frac{\partial U_1}{\partial t} &= A_1\,\mathrm{div}(\lambda_1(U_1)\nabla U_1) + B_1\,\mathrm{div}(\lambda_2(U_2)\nabla U_2)\,, \\ C_2(U_2)\frac{\partial U_2}{\partial t} &= A_2\,\mathrm{div}(\lambda_2(U_2)\nabla U_2) + B_2\,\mathrm{div}(\lambda_1(U_1)\nabla U_1)\,. \end{aligned} \tag{120}$$

После линеаризации (замена $\lambda_i(U_i)$ и $C_i(U_i)$ на постоянные в некоторых достаточно узких диапазонах значений U_i $(i = 1, 2)$) система (120) переходит в (118).

Специфика переноса в твердых телах состоит в том, что зависимость коэффициентов переноса (диффузии, теплопроводности, теплоемкости) от температуры сильнее, чем от концентрации примесей (которая обычно мала и слабо влияет на параметры). Поэтому важно получить конкретизацию уравнений (120) для приближения «твердотельной нелинейности», когда перенос массы линеен, а перенос энергии (тепла) нелинеен. Для одномерного случая уравнения Онзагера (подстановка которых в уравнения баланса тепла и массы и дает искомую разновидность (120)) были получены в виде [117]:

$$q_T = -\lambda_\Sigma(T)\frac{\partial T}{\partial x} - D_T(T)\frac{\partial \rho}{\partial x}\,, \tag{121}$$

$$q_\rho = -D(T)\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho D(T)}{2T}\frac{\partial T}{\partial x}\,. \tag{122}$$

Здесь q_T, q_ρ – плотность потока соответственно тепла и массы;

$$\lambda_\Sigma(T) = \lambda(T) + \frac{\rho D_T(T)}{2T}\,,\quad D_T(T) = \frac{kTD(T)}{2m_0}\,,\quad D(T) = \frac{h}{3}\left(\frac{kT}{m_0}\right)^{1/2}\,,$$

где k – постоянная Больцмана, m_0 – масса частиц, h – постоянная решетки. Для коэффициентов уравнений (121) и (122) выполняется правило симметрии кинетических коэффициентов $L_{ik} = L_{ki}$ [117].

4.2. Модели термомеханики

Модели этого класса описывают взаимосвязанные процессы теплопереноса и деформирования (упругого, пластического, ползучести) твердых тел. Известны модели термодиффузии [11,30,31,34], термопластичности [31,200,202] и модели теплопереноса в растягиваемых телах (термин «термоползучесть» не является общепринятым) [11,215,216].

Термоупругость. Система уравнений нестационарной связанной термоупругости имеет вид [34]:

$$\rho\ddot{\mathbf{U}} = \mu\nabla^2\mathbf{U} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{U} + \mathbf{F} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T\nabla T\,, \qquad (123)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \Phi - (3\lambda+2\mu)C_V^{-1}\alpha_T T_0 \mathrm{div}\dot{\mathbf{U}}\,, \qquad (124)$$

где $\mathbf{U}$, T – соответственно смещение и температура в точке тела; μ, λ – модули упругости, α_T – коэффициент линейного теплового расширения (средний по интервалу (T_0, T); T_0 – начальная температура тела; a, C_V – соответственно температуропроводность и удельная объемная теплоемкость тела; $\mathbf{F}$ – объемная сила, действующая на тело; Φ – функция плотности источников тепла в теле (не связанных с деформированием). Последний член в правой части (123) – сила, обусловленная термическим расширением тела, а в правой части (124) – теплогенерация, связанная с изменением объема (деформированием) тела. Система уравнений (123), (124) линейна, коэффициенты в ней считаются постоянными, что делает ее достаточно грубым приближением. Ограничением приложения этой модели являются также условия $(T - T_0)/T_0 << 1$ и $T_0 = \mathrm{const}$, принятые при ее выводе [34]. Известны нелинейные и нестационарные обобщения этой модели [28–31,217], в приложениях они практически не применяются. Использование модели в конкретных областях основано, напротив, на редукциях системы (123), (124) различного рода [35,101,318,219].

Термопластичность. Вывод уравнений термопластичности основывается на представлении свободной энергии F в виде [31]:

$$\mathrm{d}F = S\mathrm{d}T + \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} + \psi_\beta \mathrm{d}\rho_\beta, \qquad (125)$$

где ψ_β – химический потенциал компонента β, ρ_β – его концентрация. Использование разложения F в ряд по степеням инвариантов тензора деформации, гипотезы о малости деформаций и соотношений теории пластичности после достаточно сложных выкладок приводит к уравнению движения в перемещениях:

$$\mu(1-\omega)\nabla^2\mathbf{U} + \left(\lambda+\mu-\frac{1}{3}\mu\omega\right)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathbf{U} + 2\left(\mathbf{\Phi}_\varepsilon, \mathrm{grad}\left[\mu(1-\omega)\right]\right) +$$

$$+\,\mathrm{grad}\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\omega\right)\mathrm{div}\,\mathbf{U} - \mathrm{grad}\left[(2\mu+3\lambda)\frac{V-V_0}{3V_0}\right] + \mathbf{F} = \rho\ddot{\mathbf{U}}\,. \qquad (126)$$

В (126) присутствуют добавочные, по сравнению с (123), функции: ω – функция А.А. Ильюшина; $\left(\mathbf{\Phi}_\varepsilon, \nabla\left[\mu(1-\omega)\right]\right)$ – скалярное произведение тензора деформации $\mathbf{Ф}_\varepsilon$, выраженного через компоненты вектора **U**, на вектор $\nabla\left[\mu\left(1-\omega\right)\right]$; μ, λ – переменные модули; $(V - V_0)/V_0$ – относительное изменение удельного объема, обусловленное теплопереносом, фазовыми и химическими превращениями,

$$\frac{V-V_0}{V_0}=3\left[\alpha_T(T-T_0)+\sum_{\beta=1}^{B}\alpha_\beta(\rho_\beta-\rho_{\beta0})\right]. \tag{127}$$

Параметры α_T и α_β в (127) определяются функциями

$$\alpha_T=\frac{1}{T-T_0}\int\limits_{T_0}^{T}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial T}\mathrm{d}T\,,\quad \alpha_\beta=\frac{1}{\rho_\beta-\rho_{\beta0}}\int\limits_{\rho_{\beta0}}^{\rho_\beta}\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\rho_\beta}\mathrm{d}\rho_\beta\,, \tag{128}$$

где L – линейный размер тела. Уравнение теплопереноса, совместно с уравнением движения (126) дающее модель термопластичности, приводится к виду [31]:

$$\rho C_V\frac{\partial T}{\partial t}=\mathrm{div}(\lambda_{TT}\nabla T)+\mathrm{div}(\lambda_{T\beta}\nabla\rho_\beta)+\mu_\beta\frac{\partial\rho_\beta}{\partial t}+\Pi_T-\Pi_D\,, \tag{129}$$

где λ_{TT} – коэффициент теплопроводности; $\lambda_{T\beta}$ – «перекрестный» коэффициент, описывающий поток тепла, образованный переносом β-го компонента; Π_T, Π_D – плотности источников тепла соответственно обычных и обусловленных деформированием тела. Величина Π_D выражается через параметры деформирования и температуру:

$$\Pi_D=T\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon_{kk}\frac{\partial}{\partial T}\left[(3\lambda+2\mu)\right]\frac{V-V_0}{3V_0}\right\}. \tag{130}$$

Таким образом, модель термопластичности – это система уравнений (126) и (129).

Модели теплопереноса в растягиваемых телах. В теплопереносе существует класс моделей переноса (теплопроводности, диффузии), именуемых «краевой задачей для областей с подвижной границей» [8,11,31]. Им посвящена обширная литература, однако анализ показывает [117], что речь идет о двух подклассах задач: задач Стефана (модели фазовых переходов) и задач для «достраиваемых» или «обрезаемых» областей. К деформируемым (растягиваемым или сжимаемым) телам эти модели отношения не имеют.

Моделей теплопереноса в растягиваемых телах мало [214,216]. В работе [215] рассматривается растяжение высоковязкого цилиндрического тела в теплопроводной среде, сопровождающееся ее нагреванием. Деформация цилиндра (удлинение по продольной координате z и уменьшение радиуса $r^*(t)$, описываемое с помощью радиальной координаты r) выражалась уравнением неразрывности

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\upsilon_r)+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}=0\,,\quad r^*(t)=r_0\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}\mathrm{d}t'\right). \tag{131}$$

Теплоперенос в растягиваемом цилиндре описывался уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon_r\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{a}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+C_V^{-1}\Phi(r,z),\quad r\in\left(0,r^*(t)\right). \tag{132}$$

Эта модель является «полусвязанной»: если температура тела $T = T(r,z,t)$ зависит от радиальной скорости деформации υ_r (уравнение (132)), то поле скоростей $\upsilon = \upsilon(r,z,t)$ определяется только гидродинамической частью задачи.

Более простая одномерная модель теплопроводности в движущемся и одновременно растягиваемом стержне предложена в [216]. Деформация и движение стержня описываются «эффективной» скоростью, входящей в конвективный член уравнения теплопереноса:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon_e\frac{\partial T}{\partial x}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{133}$$

Здесь $\upsilon_e = (\upsilon_0 + \alpha x)(1 + \alpha t)^{-1}$, где υ_0 – скорость поступательного движения, α – скорость растяжения, $\alpha = \dot{\varepsilon}$ (ε – относительное удлинение). Как можно судить по [215,216], обе модели построены «вручную», какие-либо общие принципы их построения для нестационарных систем отсутствуют. Метод введения в (133) «эффективной» скорости υ_e сомнителен.

4.3. Модели массомеханики

Для этих моделей справедлива та же классификация, что использована для моделей термомеханики, т.е. массоупругость, массопластичность и диффузия в растягиваемых телах. В силу аналогии между описанием тепло- и массопереноса соответствующие неординарные модели близки к моделям теплопереноса.

Массоупругость. Величина свободной энергии единицы объема изотропной среды, содержащей примеси с малой концентрацией C [8]:

$$F(\varepsilon_{ij},C)=F(0,C)+G\left(\varepsilon_{ik}-\frac{\delta_{ik}}{3}\varepsilon_{ll}\right)^2+\frac{1}{2}K\varepsilon_{ll}^2-\beta C\varepsilon_{ll}, \tag{134}$$

где G, K – упругие постоянные, ε_{ik} – компоненты тензора деформации. Из (134) следует

$$\sigma_{ij}(\bar{r})=\left(\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_C=-\beta\delta_{ij}C(\bar{r})+K\delta_{ij}\varepsilon_{ll}(\bar{r})+2G\left(\varepsilon_{ij}-\frac{\delta_{ij}}{3}\varepsilon_{ll}\right),$$

откуда находятся деформации, обусловленные примесью:

$$(\varepsilon_{ij})_{\sigma_{ij}=0}=\frac{\beta\delta_{ij}}{3K}C=\delta_{ij}\omega C.$$

Здесь $\omega = \beta/3K$ – линейный коэффициент концентрационного расширения – аналог α_T в термоупругости. Стационарное (при $\ddot{\mathbf{U}}=0$) уравнение массоупругости в перемещениях принимает вид

$$3\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{U}-\frac{3}{2}\left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\right)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{U}=3\omega\operatorname{grad}C\,. \qquad (135)$$

Полная модель массоупругости включает в себя, наряду с (135), и уравнение диффузии. Для твердого раствора сферической симметрии уравнение (135) приводится к легко интегрируемому виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{2U}{r^2}=\left(\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\omega\frac{\mathrm{d}\,C(r)}{\mathrm{d}\,r}\,. \qquad (136)$$

Уравнение диффузии в упругом поле в предположении постоянной диффузионной подвижности примесных атомов:

$$\frac{\partial C}{\partial t}=b\nabla(C\nabla\mu)\,, \qquad (137)$$

где b – подвижность, μ – химический потенциал диффундирующих частиц. С учетом соотношений

$$D=bkT,\ \ \mu=\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{\varepsilon_{ij},T}=\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial C}\right)_{\varepsilon_{ij},T}$$

уравнение (137) для случая сферической симметрии приводится к виду

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left\{\left[1+\frac{\Omega}{kT}\left(U_0+6K\omega^2\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\right)C\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2C\right\}, \qquad (138)$$

т.е. к уравнению с эффективным коэффициентом диффузии

$$D_{\text{eff}}=D\left[1+\frac{\Omega}{kT}\left(U_0+6K\omega^2\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\right)C(r)\right],$$

где Ω – полный объем, U_0 – энергия смешения твердого раствора. Таким образом, несмотря на определенную «диффузионную специфику», модель массоупругости по формально-структурным признакам близка к модели термоупругости.

Массопластичность: В пластически деформируемой среде плотность потока массы [8]:

$$q_m=-D(t)\nabla C+\upsilon C\,, \qquad (139)$$

где υ – локальная скорость перемещения среды, C – локальная концентрация. Из условия несжимаемости материала при пластическом деформировании и уравнения непрерывности следует (для одномерного случая):

$$\frac{\partial C}{\partial t}=D(t)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\upsilon_x\frac{\partial C}{\partial x}\,. \qquad (140)$$

Для однородной среды $\upsilon_x = x\dot{l}/l$, где $l = l(t)$ – толщина образца, x – расстояние точки материала от поверхности образца. Уравнение (140) принимает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(t)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{\dot{l}}{l}x\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{141}$$

Однородные граничные условия второго рода для (141) таковы:

$$\left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=l(t)} = 0. \tag{142}$$

Подстановками

$$\xi = \frac{l_0}{l(t)}x, \quad \tau = \int_0^t \frac{l_0^2}{l^2(t')}D(t')\,\mathrm{d}t'$$

(где l_0 – начальная толщина образца) задача (141), (142) приводится к виду

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}, \quad \left.\frac{\partial C}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \left.\frac{\partial C}{\partial \xi}\right|_{\xi=l_0} = 0. \tag{143}$$

Решение задачи (143) при любых начальных условиях затруднений не вызывает.

Изложенный подход [8] более прост (так как рассматривается частный случай), чем ранее изложенный для модели термопластичности [31]. Там же (в [31]) имеется вывод уравнений массопластичности, аналогичный выводу уравнений термопластичности. Сама модель массопластичности близка к модели термопластичности [31].

Диффузия в области переменных размеров рассматривалась в [32,209]. Для тела, испытывающего однородную деформацию растяжения или сжатия, диффузия описывается уравнением

$$D\exp(-2\varepsilon)\frac{\partial^2 C}{\partial x'^2} = \frac{\partial C}{\partial t}, \tag{144}$$

где $x' = x - \upsilon t$ – координата в подвижной системе координат Ox', движущейся с постоянной скоростью относительно системы Ox; $\varepsilon = \ln(l/l_0)$, l_0, l – размеры тела соответственно в исходный и произвольный моменты времени. Рассмотрение модели в [32] завершается замечаниями авторов, сильно снижающими ее значимость. Суть их состоит в констатации экспериментально обнаруженного сильного изменения коэффициентов диффузии в зависимости от скорости деформации.

5. Принципы развития парадигмы

5.1. Выводы по анализу парадигмы

Исходя из поставленной цели – определения тех элементов теплофизической парадигмы, которые могут быть интегрированы в формирующуюся (находящуюся лишь в самой начальной стадии развития) парадигму ТФДТ – сформулируем краткие выводы, вытекающие из осуществленного рассмотрения моделей микро-, мезо- и макроуровня.

Модели микроуровня. 1. В рамках физической механики решаются задачи взаимодействия и движения в микросистемах (с характерными размерами до 10 nm). Температура и концентрации примесей в этих задачах играют роль параметров. Модели преследуют цель объяснения и, частично, описания поведения микросистем и для интерпретации данных макроэкспериментов не годятся. Взаимодействие различных процессов переноса не описывается. 2. Модели твердотельной диффузии (диффузионные модели микроуровня) оперируют коэффициентами диффузии, энергиями активации и диффузии – микропараметрами, для которых получены различные формулы, сделаны в ряде случаев численные оценки. Макроперенос и влияние полей концентраций примесей на процессы деформирования эти модели не описывают. 3. Модели теплофизики конденсированного состояния основное внимание уделяют выводу формул для коэффициентов теплопроводности при различной структуре твердого тела и действующих механизмов теплопереноса. Интерес представляют имеющиеся зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, давления и других макропараметров. Методы тепловых расчетов и учета взаимодействия полей температур и деформаций отсутствуют.

Модели мезоуровня. 4. К системам мезоуровня применяются методы классической и неравновесной термодинамики, позволяющие устанавливать связи между деформационными и теплообменными характеристиками. Полученные формулы могут быть полезны при построении макроскопических моделей. 5. Большинство этих формул, в особенности относящихся к тепломассопереносу, содержат величины макроуровня. Специфических для мезоуровня моделей, отличных от микро- и макромоделей, не обнаружено. Зачастую тепло- и массоперенос в мезосистемах описывается макромоделями, обоснования этого (с учетом ограничений макроописания) отсутствуют. 6. Наносистемы образуют подкласс мезосистем и имеют выраженную специфику, никак не учитываемую, так как в моделях деформирования преобладает микроподход, а в моделях тепломассопереноса – макроподход. Встречаются нуль-мерные модели теплопереноса, базирующиеся на балансовых – обыкновенных дифференциальных – уравнениях.

Модели макроуровня. 7. Модели механики сплошной среды (упругости, пластичности, ползучести) базируются на уравнениях Ламе, не описывающих диссипативные процессы. Модели пластичности весьма сложны, а ползучести – сильно идеализированы. Учет в моделях свойств реальных тел (нелинейности, сочетания упругости и вязкости и т.п.) ведет к сложным математическим конструкциям (в частности, нелинейным интегральным уравнениям). 8. Многоуровневые модели, относительно новые, в которых пытаются одновременно описать деформирование на разных уровнях по принципу «матрешки» (т.е. поглощения, путем усреднения, описания микроуровня описанием мезо- или макроуровня) дают весьма громоздкие, практически не пригодные для включения в неординарные модели, уравнения. 9. Неординарные модели, учитывающие взаимодействие различных видов переноса, строятся в рамках теорий термо- и массоупругости, термо- и массопластичности. Эти теории имеют серьезные (указанные выше) недостатки.

5.2. Направления развития парадигмы

Из изложенного следуют, на наш взгляд, такие направления развития парадигмы теплофизики деформируемых тел.

1. Выделение двух этапов: первого, на котором строится и исследуется базисная система моделей, и второго, на котором базисные модели обобщаются на более реалистические системы.

2. Базисные модели – линейные локальные модели деформирования и тепломассопереноса (ординарные модели) и модели взаимодействующих процессов (неординарные модели). Рассматриваются однородные системы простейшей формы (плита, цилиндр, шар).

3. Модели п. 2 обобщаются на неоднородные системы – слоистые и слоисто-неоднородные системы (с непрерывной неоднородностью в каждом из слоев).

4. Модели пп. 2 и 3 обобщаются на нестационарные системы – с переменными во времени параметрами или (и) с изменением со временем размеров системы.

5. Базисным уравнением деформирования вместо уравнения теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе) служит полученное гиперболическое (телеграфное) уравнение, которое обобщается на случаи пластической деформации и ползучести.

6. Ординарные модели тепломассопереноса в случае слабонестационарных систем строятся на основе известных моделей переноса в областях с движущейся границей и метода функций Грина.

7. Эти же модели для сильнонестационарных систем строятся на основе метода «диссипаторных цепочек» [117].

8. Модели «нанотеплофизики» строятся на основе конечно-разностных уравнений [117].

197. *Л.А. Толоконников*, Механика деформируемого твердого тела, Высшая школа, Москва (1979).
198. *В.Н. Ионов, В.В. Селиванов*, Динамика разрушения деформируемого тела, Машиностроение, Москва (1987).
199. *Механические* свойства материалов под высоким давлением, Х.Л. Пью (ред.), Мир, Москва (1973).
200. *Н.С. Можаровский, Е.А. Антипов*, Упругопластическое формирование и разрушение материалов при нестационарных силовых и тепловых воздействиях, Вища школа, Киев (1985).
201. *Л.С. Мороз*, Механика и физика деформаций и разрушения материалов, Машиностроение, Ленинград (1984).
202. *Л. Надаи*, Пластичность и разрушение твердых тел, Т. 2, Мир, Москва (1969).
203. *Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский*, Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести, Наукова думка, Киев (1981).
204. *Закономерности* ползучести и длительной прочности. Справочник, С.А. Шестериков (ред.), Машиностроение, Москва (1983).

205. *Т.Д. Шермергор*, Теория упругости микронеоднородных сред, Наука, Москва (1977).
206. *Б.Е. Победря*, Механика композиционных материалов, Изд-во МГУ, Москва (1984).
207. *С.К. Канаун, В.М. Левин*, Метод эффективного поля в механике композитных материалов, Изд-во Петрозав. гос. ун-та, Петрозаводск (1993).
208. *П.В. Харламов*, Очерки об основаниях механики. Миры, заблуждения и ошибки, Наукова думка, Киев (1995).
209. *Л.Н. Лариков, В.Ф. Мазанко, А.И. Носарь, В.М. Фальченко*, УФЖ **22**, 1518 (1977).
210. *Н.Б. Баландина, Б.С. Бокштейн, А.Л. Петелин, А.С. Островский*, Металлофиз. новейшие технол. **18**, № 4, 45 (1996).
211. *В.Ф. Мазанко, В.М. Фальченко, Д.С. Герцрикен*, Доп. НАН України № 7, 100 (2000).
212. *В.В. Арсенюк, Д.С. Герцрикен, В.Ф. Мазанко, В.М. Миронов*, Доп. НАН України № 8, 82 (2001).
213. *В.С. Новиков*, Промтеплотехника **11**, 11 (1989).
214. *Ю.А. Михайлов, Ю.Т. Глазунов*, Вариационные методы в теории нелинейного тепло- и массопереноса, Зинатне, Рига (1985).
215. *В.М. Шаповалов, Н.В. Тябин*, ИФЖ **52**, 160 (1987).
216. *В.В. Попов*, ИФЖ **52**, 161 (1987).
217. *Дж. Оден*, Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, Мир, Москва (1976).
218. *И.Е. Зино, Э.А. Тропп*, Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости, Изд-во ЛГУ, Ленинград (1978).
219. *К.В. Фролов, Ю.Л. Израилев, Н.А. Махутов и др.*, Расчет термонапряжений и прочности роторов и корпусов турбин, Машиностроение, Москва (1988).

I.R. Vengerov

THERMAL PHYSICS OF DEFORMABLE SOLIDS
(Review)
IV. MACROLEVEL MODELS

The closing part of the review, see HPPT 2006, N 1−3. Macroscopic models of the continuum mechanics, theories of heat and mass transfer for the processes of partial and correlated pulse, heat and mass transfer have been considered. Principles of the TDS paradigm development in the future have been formulated, some results relating to the subject have been set forth.