2П

УДК 519.1

В.І. Петренюк
Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград, Україна
pz@kdtu.kr.ua

Властивості 2-незведених простих графів

Запропоновано спосіб побудови 2-незведених простих графів шляхом приклеювання кількох пар ребер до 3-мінімального площинного графа.

Вступ

Нехай G – простий скінчений граф із множиною вершин G^0 та множиною ребер G^1, вкладений 2-клітинно в орієнтований 2-багатовид У_n роду $\gamma(\sigma_n)=n$. Основні поняття та позначення взяті із [1]. Згідно з [2], [3] будемо називати граф G n-незведеним, якщо кожен його власний підграф H має рід $\gamma(H)=n$, а сам $\gamma(G)=n+1$; причому 2-незведений граф назвемо нетороїдальним.

Розглянемо задачу вивчення структурних властивостей 2-незведених графів без 1-підрозділених ребер їх деякими внутрішніми точками.

Для цього використаємо метод φ-перетворень та поглянемо на 2-незведений граф без 1-підрозділених ребер як на такий граф роду 2 із мінімальною кількістю ребер, який, з одного боку, є φ-образом деякого графа G_1 та зірки $St_n(g_0)$ при φ-перетворенні, визначеному на кінцевих вершинах зірки та множині точок M_1 графа G_1, яка має число досяжності t, $t>1$, та характеристику θ, $и\geq 0$; а із іншого боку, є φ-образом деякого графа G_2 та графа $\sum_{i=1}^{m} u_i$ із k-штук окремих ребер, тобто графа mK_2, при φ-перетворенні, визначеному на кінцевих точках ребер та множині точок M_2 графа G_2, яка має число досяжності t, та характеристикою и, $t\geq 1$, $и\geq 0$.

Основні результати

Лема 0. Для k-незведеного графа G маємо наступні твердження:

1. Існує щонайбільше 2k непустих підмножин N_i ($N_i \subset G^0 \cup G^1$) множини точок графа G, таких, що для довільного i існує j, i≠j, i, j=1(1)k та виконується рівність $t_{G-u}(N_i \cup N_j)=2$, де $u\in G^1$, $\partial U \subset N_i \cup N_j$.

2. Видалення довільного ребра u, $u \in G^1$, або «звільняє» одну із k ручок 2-багатовида σ_k, або «виконує» рівність $t_{G-u}(N_i \cup N_j)=1$, за умови, що $(\partial u \cap (N_i=\varnothing) \vee (\partial u \cap N_j=\varnothing))$, тобто руйнує підграф $G\left[N_i \cup N_j\right]$.

3. Якщо має місце рівність $t_G(N_i \cup N_j) = 2$ для $\{H_i, H_j\} \subset G^0 \cup G^1$, то існує найменший за включенням підграф $H_{ij} = H(N_i \cup N_j)$ графа G, який має рід $г(H_{ij}) \le k-1$ та містить частинний підграф, гомеоморфний K_4 чи $K_{2,3}$, чи $K_4^{(1)}$, чи K_4^*, чи $K_4^{*(1)}$.

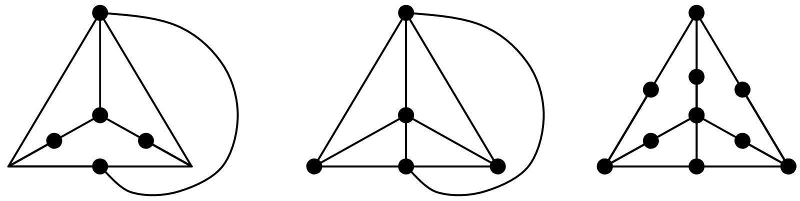


Рисунок 1 – Графи $K_4^{(1)}$, K_4^*, $K_4^{*(1)}$

Лема 1. Нехай G – t-мінімальний площинний граф, $X = \{x_i\}_1^m$, $X \subseteq G^0 \cup G^1$, $t_G(X) = t$, $\gamma = 2$, $t > 0$, $и \ge 0$ та задано φ-перетворення наступним чином:

$$\varphi(G + \sum_{i=1}^{k} u_i, \{x_i\}_1^k + \{\partial u_i\}_{i=1}^k) \to (Y, \{x_i\}_1^k).$$

Якщо Y – 2-незведений, то мають місце наступні твердження:

1. $(k \in \{2,3\}) \wedge (t \in \{3,4\})$.
2. Якщо $k = 2$, то для підмножин точок $N_1 = \{x_i\}_{i=1}^2$ та $N_2 = \{x_i\}_{i=3}^4$ маємо наступні співвідношення:

   a) $t_G(\bigcup_{i=1}^{2} N_i) = 3$ та $(t_G(N_i) = 2, i = 1,2$;

   b) видалення чи стягування довільного ребра u, $u \in G^1$, приведе до рівності $t_{G^1}(N_i) = 1$ хоча б для деякого i;

   c) φ-образи ребер u_1, u_2 своїми парами кінцевих вершин $\varphi\{\partial u_i\}u_i$ розділяють одне одного на площині 2-клітини Δ та належать межі однієї 2-клітини Δ, $\Delta \in \sigma_1(G,f)$, де f – вкладення G в σ_1, яке реалізує $и_G(X)$, причому $(f(G^0) \subset \partial\Delta) \wedge (f(G^1) \not\subset \partial\Delta)$.

3) Якщо k = 3, то для кожного i, i = 1,2,3, $N_i = \{x_{i1}, x_{i2}\}$, маємо:

   a) $(t_G(N_i) = 2) \wedge (t_G(\bigcup_{i=1}^{3} N_i) = 3)$;

   b) видалення чи стягування довільного ребра $u \in G^1$ дає рівність $t_{G^1}(N_i) = 1$, де $G^1 \in \{G \setminus u, Gu\}$, хоча б для деякого i, i=1,2,3;

   c) φ-образи ребер u_i, i=1,2,3, мають ту властивість, що пари кінцевих вершин розділяють на площині 2-клітини Δ одна одну та належать межі $\partial\Delta$, $\Delta \in G_1(G,f)$, де f реалізує $и_G(X)$.

Лема 2. Нехай задано φ-перетворення графа $G + \sum_{i=1}^{k} u_i$ в Y, визначене на множині вершин графа kK_2 та множині точок 3-мінімального графа G.

1. Якщо довільне 2-клітинне вкладення графа G в σ_1, яке реалізує t, t = 3, та $и_G(G^0) = и,\ и \in \{0,1\}$, має таку 2-клітину s, $s \in y_1(G,f)$, що $f(G^0 \cup G^1) \subseteq \partial s$ та існує підграф H графа Y, який містить $\bigcup_{i=1}^{k} \partial u_i$, гомеоморфний $K_{3,3}$, то $1 \le г(Y) \le 2$.

2. Якщо при довільному 2-клітинному вкладенні графа G в σ_1, яке реалізує $t_G(G^0)$, $t_G(G^0) = 3$, та характеристику $и_G(x)$, але не існує 2-клітини s, такої, що $f(G^0 \cup G^1) \subseteq \partial s$, та кожне ребро u_j, j = 1,2, однією зі своїх вершин до різних підмножин N_i, N_j, таких, що $t_G(N_i \cup N_j) = 2$, то $1 \le г(Y) \le 2$.

Лема 3. Нехай визначено φ-перетворення графа $G + \sum_{i=1}^{k} u_i$ на графі Y, яке задане так, як у лемі 1.1, на множині вершин графа kK_2 та деякій множині X, складеній з точок x_i, $X = \{x_i\}_1^{2k}$, $X \subseteq (G^0 \cup G^1)$, де G – 3-мінімальний площинний граф.

Для k = 2 мають місце наступні твердження:

1. Якщо $t_G(X) = 3$ та $\partial и_G(X) = 1$, то $г(Y) = 1$.

2. Якщо $t_G(X) = 1$, $\partial и_G(X) = \partial и$, t > 3, то маємо нерівність $г(Y) \le t - \partial и - 1$.

3. Якщо $t_G(X) = 4$, $\partial и_G(X) = 0$, $и_G(x) = 0$, то маємо $1 \le г(Y) \le 2$.

4. Якщо $t_G(x)$ = 4 та існує принаймні 4 копії різних підграфів H_i, i = 1(1)4, гомеоморфних $K_{2,3}$ чи K_4 і таких, що не мають спільних простих циклів, причому кожна пара точок (x_i, x_j) така, що $x_i \neq x_j$, належить різним H_i, H_j, то тоді $г(Y) = 4$, де k = 2.

Твердження 1. Нехай G – t-мінімальний площинний граф, в якому $t_G(G^0) = t,\ \theta_G(G^0) = \theta$, та задано N – множину всіх різних підграфів, гомеоморфних K_4 чи $K_{2,3}$ та таких, що не мають спільних точок.

Якщо в G існує множина N і |N| = n, виконується φ-перетворення

$$\varphi\left(G + St_n(g_{io}), \sum_{j=1}^{Mi} \left(a_{j0} + g_j\right)\right) \to \left(\Im, \cdot \{a_j\}_{j=L}\right) \cdot M \ \le |\, G^0\, |$$

та виконується співвідношення $(N = N_1 + N_2) \wedge (|N_i| = n_j) \wedge (i = 1,2)$, то тоді $\gamma(\Im) \le n_1 + n_2 = n$.

Доведення. Ідея доведення полягає в тому, що кожна H_1, H_2 пара різних елементів n множини N_i, i = 1,2, матиме φ-образ, гомеоморфний 1-зв'язному графу $H = K' + K''$, де $K',\ K'' \in \{K_{2,3}, K_4\}$, рід якого дорівнює 1. Дійсно, це так, оскільки $\varphi^{-1}(H) = St_n(g_0) + \sum_{i=1}^{k} H_i$.

Твердження 2. Нехай G – t-мінімальний площинний граф, такий, що $t_G(G^0) = t,\ Q_G(G^0) = 0,$ N_1 – множина всіх різних H_{ij}, i = 1,...,k, j=1(1)k_i, підграфів графа G, які гомеоморфні K_4 чи $K_{2,3}$ та утворюють максимальний за включенням 1-зв'язний підграф графа G, $G\left[\bigcup_{\forall ij} H_{ij}\right]$, де $|N_i| = n_i, i = 1(1)k$.

Якщо має місце наступне φ-перетворення графа $G+St_{n_i}(g_{io})$ на граф φ, визначене формулою $\varphi\left(G+St_{n_i}(g_{io}),\sum_{j=1}^{k}\sum_{j_1=1}^{kj}\left(a_{1j}\underset{\bullet}{+}g_{ij}\right)\right)\rightarrow\left(\Im,\left\{\{g_{ij_1}\}_{i=1}^{k}\right\}_{j_1=1}^{ki}\right)$, то має місце нерівність $\gamma(\Im)\le\gamma(G)+\sum_{j=1}^{k}\left\lceil\frac{k_j}{2}\right\rceil$.

Доведення. Нехай виконуються умови твердження 2, якщо до пари графів H_1, H_2, таких, що гомеоморфні або K_4, або $K_{2,3}$ та мають спільну вершину, то $\varphi(H_1\cup H_2)$ буде 2-зв'язним графом роду 1. Тобто кожна пара перенумерованих підграфів додаватиме 1 до $\gamma(G)$, $\gamma(G)=\emptyset$, а таких пар буде $\left\|\left\lceil\frac{k_j}{2}\right\rceil\right\|$. Тому $\gamma(\Im)\le\gamma(G)+\sum_{j=1}^{k}\left\lceil\frac{k_j}{2}\right\rceil$…

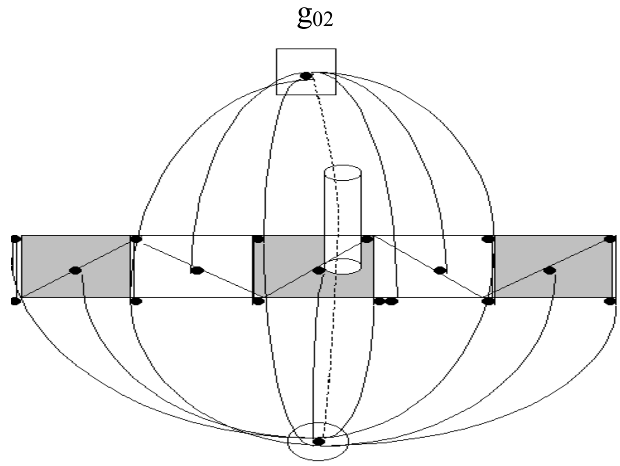


Рисунок 2 – Ілюстрація до твердження 2

На рис. 2 наведена ілюстрація до твердження 2, де множина N_1 складена із «заштрихованих» підграфів $K_{2,3}$, множина N_2 – із незаштрихованих $K_{2,3}$. Ребро (g_{01}, g_{02}) треба стягнути в точку, тобто $\gamma(\Im)=2$.

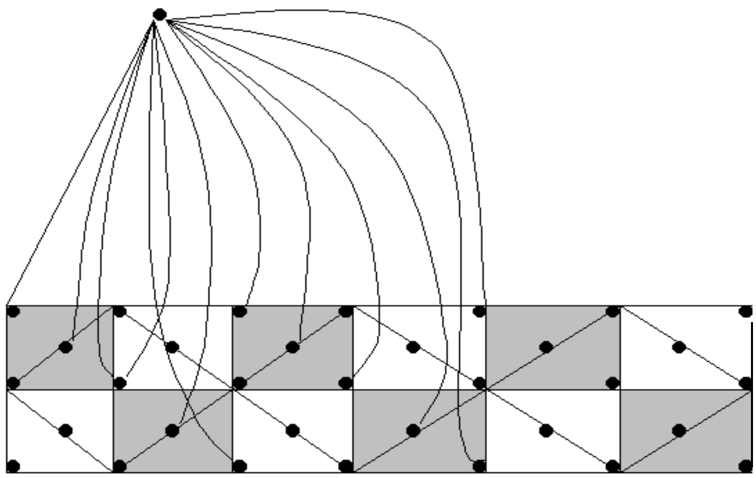


Рисунок 3 – Ілюстрація до твердження 2, де N_1 – заштрихований однозв'язний підграф графа $\Im$ роду $\gamma(\Im)=3-1-1=1$

Теорема 1. Нехай G – площинний граф, $X \le G^0VG^1$ – множина точок, $t_6(X)=2, X=\{\{g_{j1}\}^2{}_{j1}\}\{g_{i1},g_{i2}\}=X_i mK_2$ – граф із m копій графа K_2, що має одне ребро. Якщо кожне ребро графа Y суттєве відносно роду $\gamma(\mathrm{Y}), \gamma(\mathrm{Y})=2,$ при операціях видалення чи стягування в точку цього ребра, то існує φ-перетворення графа $G+mK_2$, визначене наступним чином: $\varphi(G+mK_2,\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{m}(g_{ij_0}+g_i))\longrightarrow(Y,\{g_i^*\}_1^m)$, де $(mK_2)^0=\{\{g_{ij}\}_{i=1}^m\}_{j=1}^2,\ X=\{g_i\}_1^{2m},\ t_G(X)=2$, де $m\in\{2,3\}$.

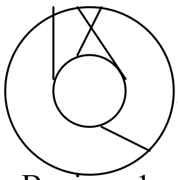
Доведення. Розглянемо φ-перетворення площинного графа G та графа $3K_2$, $3\mathrm{K}_2=(\{(a_{i1},a_{i2}\})_{i=1}^3,\{U_i\}_{i=1}^3),$ де $\partial u_i=\{a_{i1},a_{i2}\},$ визначене наступною формулою: $\varphi(G+3K_2,\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(g_{ij}+a_{ij}))\longrightarrow(Y,\{\{g_{ij}\}_{i=1}^3\}_{j=1}^2)$. Якщо $t_G(X_K)=2,$ де $X_K=\{\{g_{ij}\}_{i=K}\}_{j=1}^2$, то, як відомо, $\gamma(Y)=\gamma(G)+1$ для кожного $k=1,2,3$. Будемо вважати, що граф Y не містить ребер, несуттєвих відносно $\gamma(Y)$. Якщо $t_G(X_1UX_2)=2$, то $\gamma(Y)\le\gamma(G)+1$, то можливо побудувати таке вкладення графа Y в δ_1, при якому ребра $\varphi(u_1)U\varphi(u_2)$ розміщені на ручці h, $h=h(i_1,i_2)$, де $\{i_1,i_2\}\subset\delta_0(G,f), f-2-$вкладення графа G в δ_1, при якому $f(X_1)UX_2)\subset\bigcup_{i=1}^{2}\delta\gamma_{ii}$. Розміщення на ручці h φ-образів ребер u_1,u_2 даватиме один із двох наступних варіантів розміщення ребер:

1) $\varphi(u_1),\varphi(u_2)$ розділяють одне одного своїми кінцевими вершинами, розміщеними на $\delta h(i_1,i_2)$, де $\delta h(i_1,i_2)=\delta i_1U\delta_2$ (тобто перехрещені);

2) $\varphi(u_1),\varphi(u_2)$ не розділяють парами своїх кінцевих вершин одне одного, тобто не перехрещуються.

В цьому варіанті на ручці можливо розмістити ще одне ребро $\varphi(u_3)$, яке не повинно перехрещуватися з жодним із ребер $\varphi(u_2)$, $i=1,2$.

Графічно ці варіанти матимуть вигляд:



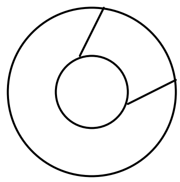


Рисунок 4

Розглянемо варіант 1. Доведемо, що $\gamma(GY+u_3)=2$ та $h=h(i_1i_2)-2$ – ручка до до 2-клітин i_1,i_2. Дійсно, якщо приклеїти до 2-клітин i_1,i_2 ще одну ручку h, так, щоб не дотикатися до регулярних 2-клітин $i_i,i_i\subset i_{iu}\delta_i$, то на цій ручці має розташовуватися $\varphi(u_3)$. Дійсно, це так, оскільки ребра $\varphi(u_1),\varphi(u_2)$, вкладені на $h(i_1,i_2)$, розділяють множини кінцевих вершин одне одного і вкладення ребра $\varphi(u_3)$ в h не можливе. Таким чином $\gamma(Y)\le 2$. Якщо припустити, що $\gamma(Y)=1$, то це означатиме, що існує інше подання графа Y як φ-образу площини G_1 при

$\varphi(G_1 + mK_2, \sum\sum (g_{ij} + a_{ij})) \longrightarrow (Y_1\{\{g_{ij}^*\}_{i=1}^{i}\}_{j=1}^{a})$, де $m < 3$. Згідно з нашим припущенням матимемо, що для довільного вкладення $f : Y^1 \longrightarrow \delta_1$ маємо принаймні для деякого ребра співвідношення: що $f(u) \subset h(i_1, i_2) \wedge ((u \in K_{3.3}^1) \vee (u \in K_5^1))$.

Тоді множина точок X має число досяжності 1, оскільки $(X \subset G_1 U G_1^0)$, бо має місце включення $f(U(u_i, \delta u_i) \cap X = \varnothing$. Маємо суперечність умові.

Розглянемо підвипадок 11. Припустимо, що виконано умову випадку 1 та $\gamma(G_1) = 1$, тоді будь-яке мінімальне вкладення f графа Y в δ_1 повинно мати властивість $f^1(mK_2^1) \subset h(i_1, i_2)$, причому всі ці m ребер не будуть перехрещуватися, тобто розділяти одне одного своїми кінцевими вершинами, ні між собою, ні з іншими ребрами. У такому разі можливо стягнути в точку кожне з двох ребер e_1, e_2, які належать різним числам межі δ h ручки $h = h(i_1, i_2)$, які суміжні двом ребрам з mK_2^u. Якщо граф Y немає зайвих ребер, то отримаємо, що ребра e_1, e_2 можливо стягнути в точку t_2, отримати із двох ребер, що належать множині $f(mK_2^1)$, одне кратне ребро, розміщене на ручці. Це означатиме, що граф Y має принаймні два ребра, не суттєвих відносно роду при операціях стягування, та одне ребро з множини $\varphi^{-1}(Y_{\epsilon_1\epsilon_2})$ можливо видалити. Все це містить протиріччя умові мінімальності графа Y відносно ряду припущення. Підвипадок 11 неможливий.

Розглянемо підвипадок 12. Припустимо виконування умови випадку $\gamma(G_1) = 0$. Оскільки $\gamma(Y_1) = 1$, то на єдиній ручці $h(i_1 i_2)$ розміщуються всі ребра з множини $\varphi(Y_1), \varphi(G_1^1)$ та не допускаються їх перехрещення. Те саме, як у підвипадку 11, можливо виявити зайві ребра графа Y відносно $\gamma(Y)$. Це буде суперечити умові, тобто підвипадок 12 неможливий.

Розглянемо варіант 2. В цьому випадку існують ребра, аналогічні тим ϵ_1, ϵ_2, які наведені у підвипадку 12 та є не суттєвими відносно роду $\gamma(Y)$ при стягуванні саме цих ребер в точку. Цей факт суперечить умові, що наш граф Y має всі ребра суттєвими відносно роду при операціях видалення ребра чи стягуванні їх в точку. Ця суперечність означатиме неможливість випадку 2.

Таким чином наше припущення щодо виконання нерівності $\gamma(Y) < 2$ суперечить умові суттєвості відносно роду $\gamma(Y)$ всіх ребер графа Y при видаленні чи стягуванні в точку кожного ребра. Тобто нерівність неможлива, звідси випливає виконання рівності $\gamma(Y) = 2$, то $\gamma(Y) \leq 2$. Доведення теореми закінчено.

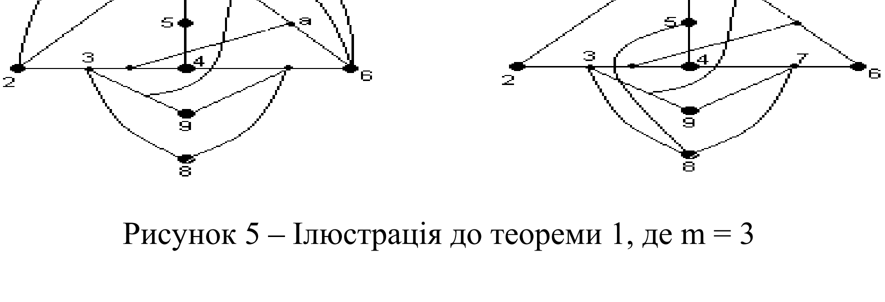


Рисунок 5 – Ілюстрація до теореми 1, де m = 3

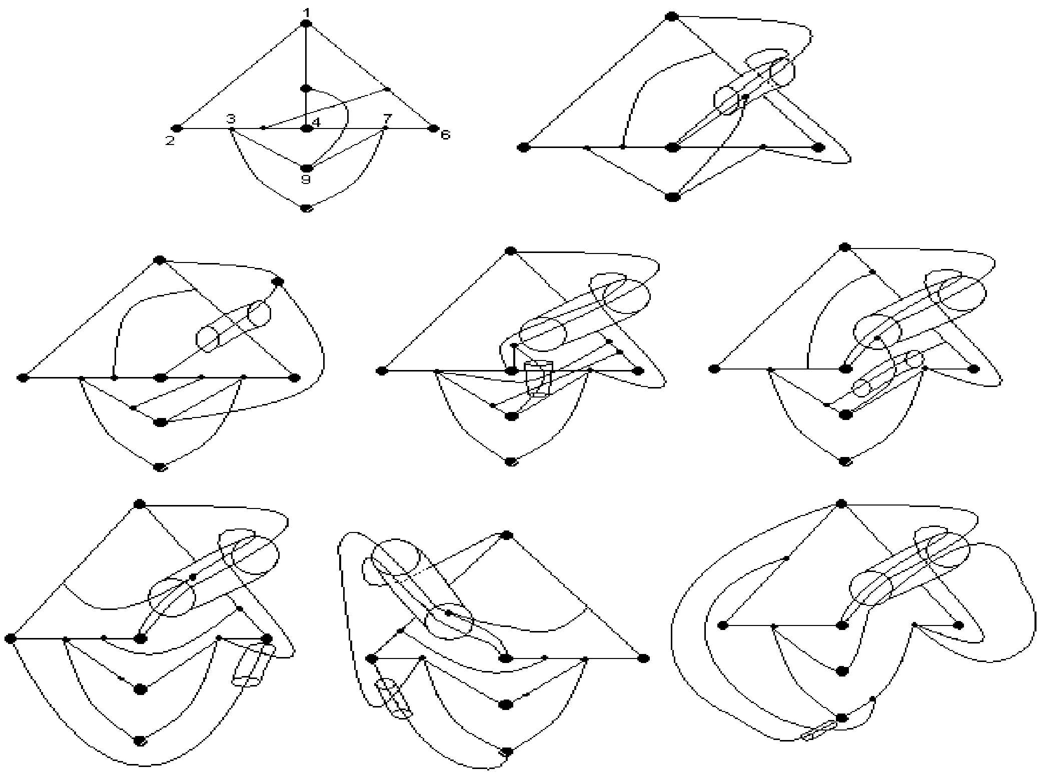


Рисунок 6 – Ілюстрація укладання φ-образу графа G на подвійному торі

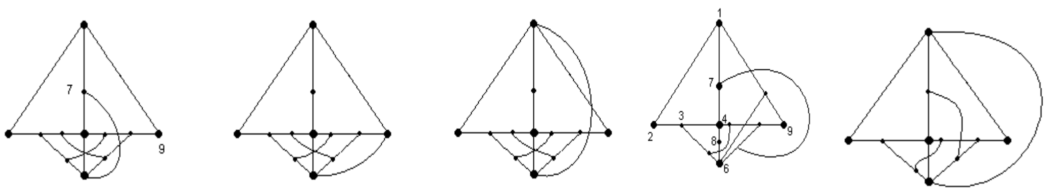


Рисунок 7 – Ілюстрація до результату для m = 3

Висновки

Запропонований спосіб побудови 2-незведених простих графів шляхом приклеювання кількох пар ребер до 3-мінімального площинного графа дозволяє побудувати поліноміальний алгоритм.

Література

1. Хоменко М.П. φ-перетворення графів. Препринт ИМ АНУ. – Київ, 1973.
2. Петренюк В.И. О структуре плоских графов с заданным числом достижимости некоторого множества точек. – Деп. рукопись в УкрНИИТИ N 814 19.08.1985.
3. Петренюк В.І. Оцінка роду переплетених графів. Частина І // Искусственный интеллект. – 2006. – № 3. –С. 214-226.

В.И. Петренюк

Свойства 2-несводимых простых графов
Предложен способ построения 2-несводимых простых графов приклеиванием нескольких пар ребер к 3-минимальному плоскостному графу.

Стаття надійшла до редакції 25.02.2008.