УДК 621.372.542

І.А. БЕЗВЕРБНИЙ

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ЦИФРОВОГО ФАЗОВОГО АНАЛІЗУ ОДНОТОНАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

I.A. Bezverbnyi

THE ONE-TONE SIGNAL DIGITAL PHASE ANALYSIS NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD

The signaling tone phase analysis method on basis of the sliding frequency analysis are proposed, the use of it in processor ADSP21xx (Analog Devices Inc.) applications performance capabilities and computational process realization features are rated in the work.

Пропонується цифровий метод фазового аналізу тонального сигналу на основі ковзного спектрального аналізу. Розглядаються можливості його застосування у приложеннях для процесорів ADSP21xx фірми Analog Devices та особливості реалізації обчислювального процесу.

Вступ. Використання фазового аналізу є актуальною проблемою в багатьох сферах життєдіяльності. Визначення фази отриманого тонального сигналу в режимі реального часу застосовується в багатьох галузях науки і техніки, зокрема радіо і зв’язку, акустичної локації. Здебільшого використовуються фазо-маніпульовані тональні сигнали певної частоти (поряд з частотною маніпуляцією). Впровадження цифрових методів фазової демодуляції однотонального частотно-маніпульованого сигналу суттєво спрощує проблему фазової демодуляції аналогових тональних сигналів узагалі. Найголовнішою перевагою вказаних методів є зменшення часу аналізу сигналу і вивільнення ресурсів системи обробки. Це дозволяє побудувати якісну швидкісну і малогабаритну систему зв’язку та локації на сучасних мобільних засобах за допомогою спеціалізованого контролера, виготовленого на базі дешевого сигнального процесора. Тому винайдення нових математичних методів є завданням важливим і актуальним.

У даній статті пропонується метод у вигляді послідовного алгоритму фазового аналізу сигналу. На протязі певного періоду сигнали розглядаються як синусоїди сталої частоти і змінної фази. Характер зміни фази для методу не суттєвий. Необхідним є визначення швидких cos- і sin-перетворень та значення максимальної за амплітудою гармоніки. Крім того розглядаються деякі аспекти реалізації методу в математичному забезпеченні сигнальних процесорів ADSP21xx фірми Analog Devices.

Аналіз фази отриманого сигналу за допомогою фазового спектра. Розглянемо вхідну функцію як

$$f(nT)=\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}+\theta\right), \tag{1}$$

де θ – фаза сигналу; $f_{\text{вх}}$ – частота вхідного сигналу, що може розглядатися як сума цілої та дробової складових. Ціла складова є частотою, що відповідає максимальній гармоніці, тому надалі її позначатимемо f_{max} ; дробова складова розглядається як відношення цілих чисел $\Delta f_k=\frac{k}{M}$, де k – номер гармоніки, а M – якесь велике ціле число.

Відоме співвідношення [1]

$$P=\tan(\theta)=\frac{\text{Re}(F(j\omega))}{\text{Im}(F(j\omega))}, \tag{2}$$

де $\text{Re}(F(j\omega))$ – максимальне за амплітудою cos-перетворення; $\text{Im}(F(j\omega))$ – максимальне за амплітудою sin-перетворення.

На N вибірок накладається прямокутне вікно від $-\frac{N-1}{2}$ до $\frac{N-1}{2}$ одиничної функції. Тоді масив M максимальних за амплітудою членів рядів cos-перетворення для функцій вигляду $f(nT)$ подамо у вигляді

$$a_k=\text{Re}(F_k(j\omega))=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_k(f_{\text{вх}},nT)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{max}} nT}{N}\right)=$$

$$=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}+\theta\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{max}} nT}{N}\right)=$$

$$=\left(\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{max}} nT}{N}\right)\right)\cdot\cos(\theta)-$$

$$-\left(\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{max}} nT}{N}\right)\right)\cdot\sin(\theta). \tag{3}$$

Відповідно sin-перетворення

$$\begin{aligned}
b_k &= \operatorname{Im}\left(F_k\left(j\omega\right)\right) = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} f_k\left(f_{\text{вх}}, nT\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right) = \\
&= \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}+\theta\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right) = \\
&= \left(\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right)\right)\cdot\cos\left(\theta\right) - \\
&- \left(\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right)\right)\cdot\sin\left(\theta\right). \qquad (4)
\end{aligned}$$

У даному випадку маємо вирази з невідомим θ і відомою вхідною частотою $f_{\text{вх}}$. Метод визначення $f_{\text{вх}}$ подається нижче, а у наведених виразах розглядається як константа. Уведемо позначення:

$$A = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right), \qquad (5)$$

$$B = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right), \qquad (6)$$

$$C = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\cos\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right), \qquad (7)$$

$$D = \sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\text{вх}} nT}{N}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi f_{\max} nT}{N}\right). \qquad (8)$$

Тоді вираз (2) може бути представлено як:

$$P = \frac{A \cdot \cos(\theta) - B \cdot \sin(\theta)}{C \cdot \cos(\theta) - D \cdot \sin(\theta)} . \quad (9)$$

Рівняння (9) має такий розв’язок:

$$\theta = \arctan \frac{A - C \cdot P}{B - D \cdot P} . \quad (10)$$

Оскільки розв’язок отримано аналітичним шляхом, помилка обчислень має машинний характер. Суттєвим застереженням є лише необхідність точного визначення значення частоти. Відхід частоти у процесі передачі сигналу по каналу зв’язку є поширеним явищем. Тому важливим моментом визначення фази є попереднє точне обчислення частоти. Ця проблема досить широко розглянута в [2, 3].

Аналіз частоти отриманого сигналу за допомогою ковзного перетворення Фур’є. Оскільки частотний спектр не залежить від фазового, для спрощення шляху отримання частотного спектра розглядатимемо фазу, рівною нулеві. Тоді слід розглянути вхідний сигнал у вигляді:

$$f(nT) = \cos \frac{2\pi\left(f_{\max} + \Delta f_k\right)nT}{N} = \cos \frac{2\pi\left(f_{\max} + \dfrac{k}{M}\right)nT}{N} . \quad (11)$$

З точки зору ковзного спектрального аналізу, значення спектральних компонент вхідних сигналів можуть розглядатися як такі, що отримані внаслідок фільтрації гребінчастим фільтром [4]. Для подальшої роботи необхідно визначити значення $K(\omega)$ відношення сусідніх гармонік. В залежності від напрямку зміщення спектральної лінії $K(\omega) = \dfrac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i+1})}$ або $K(\omega) = \dfrac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i-1})}$. На N вибірок накладається прямокутне вікно одиничної функції від $-\dfrac{N-1}{2}$ до $\dfrac{N-1}{2}$.

Згідно з вищезгаданими роботами

$$k = \frac{M}{\pi} \cdot \left(-\pi \cdot f_{\max} + N \cdot \arctan \sqrt{-\frac{A}{B}} \right), \quad (12)$$

де для скорочення формули введені позначення для констант:

$$A = -K \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} + K \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \left(f_{\max} + 1\right)}{N} + \\ + \cos \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \left(f_{\max} + 1\right)}{N} \cdot \cos \frac{\pi \cdot \left(f_{\max} + 1\right)}{N}; \quad (13)$$

$$B = -K \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} + K \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot (f_{\max} + 1)}{N} +$$
$$+ \cos \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot (f_{\max} + 1)}{N} \cdot \cos \frac{\pi \cdot (f_{\max} + 1)}{N} +$$
$$+K - K \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot \left(f_{\max} + 1 \right)}{N} - \cos \frac{\pi \cdot f_{\max}}{N} \cdot \cos \frac{\pi \cdot \left(f_{\max} + 1 \right)}{N}. \qquad (14)$$

Вхідна частота в такому випадку

$$f_{\text{вх}} = f + \left| \frac{k}{M} \right| = f + \left(-f + \frac{N}{\pi} \cdot \arctan \sqrt{-\frac{A}{B}} \right) = \frac{N}{\pi} \cdot \arctan \sqrt{-\frac{A}{B}}. \qquad (15)$$

Як видно з формули (15), значення обчисленої частоти не залежить від параметра M, фізичний зміст котрого полягає у щільності підбирання функції (11). У випадку зміщення спектральної лінії сигналу праворуч визначення частоти провадиться аналогічно і пропускається.

Побудова алгоритму. Реалізація даного методу полягає у послідовному виконанні наступного алгоритму:

1. З урахуванням відповідної апаратури вибирається частота сигналу такою, щоб частота дискретизації перевищувала не менше ніж у два рази максимальну частоту сигналу, що надходить на приймач. Відповідно визначається розмір масиву дискретного cos-перетворення. Реалізується приймання і семплювання сигналу.

2. З масиву вибіркового ковзного перетворення Фур'є розмірністю N, отриманого з використанням швидких алгоритмів і методів зважування за допомогою вагових функцій вікон, визначається наближене цілочислове значення частоти вхідного сигналу.

3. Проводиться перевірка на наявність у вхідній частоті дробової складової, що може бути реалізована двома способами. Перший полягає у порівнянні найбільшої спектральної компоненти з N - числом вибірок за період аналізу сигналу. Тоді значення максимальної за амплітудою спектральної компоненти дорівнює N. Другий спосіб полягає у перевірці, чи не містить решта спектральних компонент нульових значень. Якщо це так, то вхідна частота не має дробової складової, і подальше дослідження сигналу не потрібне. У протилежному випадку відбувається перехід до наступного пункту алгоритму.

4. Визначається напрямок зміщення спектральної лінії тону, обумовлене ефектом розмиття дискретного спектра. Істинна частота вхідного сигналу знаходиться між двома додатними спектральними компонентами cos-перетворення. Отже зміщення спектральної лінії тону відбуватиметься в бік тієї сусідньої гармоніки щодо максимальної за амплітудою гармоніки спектра, значення спектральної компоненти cos-перетворення котрої є додатнім.

5. Визначається значення відношення сусідніх гармонік. В залежності від

напрямку зміщення спектральної лінії $K(\omega)=\dfrac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i+1})}$ або $K(\omega)=\dfrac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i-1})}$.

6. Визначається частота за допомогою формули (15).

7. Визначається фаза за допомогою формули (10).

Висновки. Цінність даного алгоритму полягає у можливості застосування його в системах реального часу. Наприклад, система частотно-фазового аналізу розроблена на базі процесора ADSP21xx фірми Analog Devices дозволяє отримувати дані про зміну частоти і фази вхідного сигналу за 8 мкс.

Наприклад сигнальний процесор ADSP2188, максимальна частота 75 МГц, виконує одну операцію за 13 нс. Обчислення швидкого cos-перетворення займає близько 100 операцій. Обчислення апроксимації косинуса, синуса і арктангенса займає відповідно по 20 операцій. Визначення косинуса і синуса під час обчислення частоти необхідно виконати 15 разів, згідно з формулами (13) і (14). Таким чином, визначення частоти без швидкого cos-перетворення виконуватиметься приблизно за 350 операцій. Обчислення фази реалізується приблизно за 150 операцій.

1. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высш. шк., 2000. – 462 с.
2. *Семотюк М.В.* Численно-аналитический метод спектрального анализа тональных сигналов // УСіМ. – 2001. – № 1. – С. 36–42.
3. *Безвербний І.А.* Удосконалення чисельно-аналітичного методу спектрального аналізу тональних сигналів // Засоби комп'ютерної техніки з віртуальними функціями і нові інформаційні технології. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2002. – **1.** – С. 105–109.
4. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.

Отримано 20.08.2006