

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРНЫХ РАЗМЕРОВ ПРОВОДЯЩИХ ВКЛЮЧЕНИЙ НА ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

М.А. Щерба, аспирант

Нац. техн. ун-т Украины "КПИ",
пр. Победы, 37, Киев-56, Украина

Исследованы особенности влияния размеров проводящих включений сложной формы на распределение электрического поля (ЭП) в диэлектрической среде. Уточнены условия постоянства максимальной напряженности ЭП в среде при изменении размеров и форм включений. Обосновано, что с усложнением геометрии включения количество характерных его параметров, влияющих на распределение ЭП в среде, возрастает. Библи. 9, рис. 2, таблица.

Ключевые слова: электрическое поле, напряженность, поверхностный заряд, диэлектрическая среда, проводящее включение, дендрит.

Введение. При наличии внешнего электрического поля (ЭП) E_0 в диэлектрической среде с проводящим включением напряженность поля E возле проводящей поверхности прямо пропорциональна поверхностной плотности наведенного электрического заряда σ [1, 2]. Заряд распределяется по поверхности проводника таким образом, чтобы электрическое поле внутри него отсутствовало и поток вектора напряженности ЭП через произвольную замкнутую поверхность S внутри проводника равнялся нулю $\oint_S E dS = 0$. В противном случае поле

внутри проводника будет вызывать дополнительное перемещение электрических зарядов и нарушать условие квазистатики.

Характер распределения наведенного электрического заряда по поверхности проводящего включения во многом определяется ее кривизной. Известно, что с уменьшением радиуса кривизны $r_{кр}$ локальной области проводящей поверхности (в частности, с уменьшением радиуса округления выступа на ней вдоль внешнего ЭП) плотность поверхностного заряда σ в области вершины выступа возрастает. Поэтому поле в диэлектрической среде у проводящего острия (выступа с очень малым радиусом кривизны) может усиливаться в десятки раз по сравнению с внешним ЭП.

В работах [3–7] сравнивались возмущения ЭП в диэлектрической среде при наличии в ней осесимметричных проводящих включений типа сферы и эллипсоида вращения. Анализ известных аналитических выражений для распределения напряженности поля в диэлектрической среде вне проводящей сферы [1, 2] показывает, что изменение радиуса такой сферы не вызывает изменения максимальной напряженности поля E_{max} во внешней среде. То есть максимальная напряженность ЭП в диэлектрической среде вне проводящей сферы является инвариантом относительно изменения ее радиуса.

Исследования, проведенные в работе [7], показали, что при наличии в диэлектрической среде проводящего эллипсоида вращения величина напряженности E_{max} является инвариантом относительно прямо пропорционального изменения длин полуосей проводящего эллипсоида вращения, то есть относительно прямо пропорционального изменения двух его характерных параметров, несмотря на изменение при этом кривизны поверхности эллипсоида. Было высказано предположение, что величина E_{max} в диэлектрической среде с проводящим включением может оставаться неизменной при прямо пропорциональном изменении всех его размеров в n раз и неизменной ориентации включений относительно ЭП. Таким образом, была сформулирована гипотеза об неизменности максимальной напряженности электрического поля в диэлектрической среде вне подобных проводящих осесимметричных включений.

В то же время было отмечено, что если все размеры включения изменятся в n раз, то пространственное распределение напряженности поля E в диэлектрической среде изменится таким образом, что некоторое значение напряженности E_l , наблюдаемое на расстоянии l от

поверхности включения, будет наблюдаться на расстоянии $n \cdot l$. В результате проявления данной закономерности величина объема диэлектрической среды, в каждой точке которого значение напряженности поля будет больше значения E_1 , изменится в n^3 раз [7]. Такой объем был назван напряженным объемом диэлектрической среды (изоляции) [5, 7].

Поскольку радиус кривизны $r_{кр}$ поверхностей подобных фигур разный, то можно предположить, что $r_{кр}$ является лишь одним из размерных параметров включения, влияющих на величину максимальной напряженности поля E_{max} и распределения ЭП в диэлектрической среде вне проводящего включения, поэтому для анализа закономерностей возмущения ЭП в среде вне включения сложной формы необходимо учитывать и другие его характерные размерные параметры. Для проверки таких предположений важно провести анализ влияния на распределение ЭП в диэлектрической среде размеров проводящих включений, имеющих более двух характерных геометрических параметров.

В последние годы большое внимание уделяется анализу возмущений ЭП в сшитой полиэтиленовой изоляции высоковольтных кабелей, возникающих при появлении в изоляции водных дендритов – длинных тонких трубок, заполненных проводящей жидкостью (водой и растворенными в ней веществами) [5]. Из-за несимметричности молекул воды они поляризуются во внешнем поле, образовав диэлектрический диполь, который в неоднородном ЭП втягивается в области локально усиленного внешнего электрического поля [6]. Поэтому появившиеся в изоляции молекулы воды со временем собираются в областях возле острия проводящих дендритов, ускоряя их развитие в микрообъемах полимерной изоляции и соответственно деградацию изоляции. Аналогичные задачи возникают и при необходимости расчета распределения ЭП в теле человека с учетом электрофизических характеристик его органов и отдельных систем, в частности кровеносной и нервной [4].

Поэтому моделирование и анализ закономерностей распределения ЭП в неоднородных диэлектрических средах с проводящими включениями (в частности включений с отростками типа дендритов), форма которых определяется несколькими характерными размерными параметрами, представляет научный интерес.

Целью данной работы является моделирование и анализ закономерностей влияния различных характерных размерных параметров проводящих включений сложной формы на возмущение внешнего низкочастотного электрического поля в диэлектрической среде. В частности, проводилось исследование закономерностей усиления ЭП в диэлектрической среде у острия водных дендритных включений, имеющих три характерных размера, и возле сферического и эллипсоидального проводящих включений с дендритными ответвлениями на их поверхности, характеризующимися соответственно четырьмя и пятью характерными размерными параметрами.

Постановка задачи. Физико-математическая постановка задачи формулировалась так же, как и в работах [4–7]. Рассматривалась однородная, линейная и изотропная диэлектрическая среда с гетерогенными проводящими включениями. Внешнее электрическое поле задавалось гармоническим и низкочастотным, его фаза во всех точках среды считалась одинаковой. Принималось допущение, что $\partial B / \partial t \approx 0$ и взаимную связь между электрическим и магнитным полями можно не учитывать. Таким образом, была осуществлена квазиэлектростатическая постановка задачи, при которой из системы уравнений Максвелла, записанных для комплексных амплитуд электромагнитных параметров электромагнитного поля, можно использовать расчетное уравнение скалярного электрического потенциала ϕ , распределенного в неоднородной диэлектрической среде, которое принимает следующий вид:

$$\operatorname{div} [- (\gamma + i\omega\epsilon_0 \dot{\epsilon}) \cdot \operatorname{grad} \phi] = 0, \quad (1)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\dot{\epsilon}$ – удельная диэлектрическая проницаемость среды; γ – удельная проводимость среды; ω – угловая частота; $i^2 = -1$.

Расчет ЭП проводился с использованием метода конечных элементов, реализованного в пакете прикладных программ Comsol Multiphysic [8], в котором расчетная область разбива-

лась на разноразмерные ячейки, в каждой из которых параметры среды считались постоянными, но они могли изменяться скачком при переходе из одной расчетной ячейки в другую.

Уравнение (1) дополнялось условиями на границе раздела сред проводник-диэлектрик, определяемых для тангенциальных и нормальных составляющих напряженностей электрического поля \dot{E} , то есть для $\dot{E}_{1\tau}$, $\dot{E}_{2\tau}$, \dot{E}_{1n} , \dot{E}_{2n} и соответственно для потенциалов $\dot{\phi}_1$ и $\dot{\phi}_2$ и их производных по направлению нормали к поверхности, а именно для $\partial \dot{\phi}_1 / \partial n$ и $\partial \dot{\phi}_2 / \partial n$:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}; \quad (2)$$

$$(\gamma_1 + i\omega\epsilon_0 \dot{\epsilon}_1) \dot{E}_{1n} = (\gamma_2 + i\omega\epsilon_0 \dot{\epsilon}_2) \dot{E}_{2n}; \quad (3)$$

$$\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2; \quad (4)$$

$$(\gamma_1 + i\omega\epsilon_0 \dot{\epsilon}_1) \partial \dot{\phi}_1 / \partial n = (\gamma_2 + i\omega\epsilon_0 \dot{\epsilon}_2) \partial \dot{\phi}_2 / \partial n. \quad (5)$$

Для решения полевой задачи в расчетной области на ее граничных поверхностях задавались следующие условия: на ее верхней и нижней поверхностях, выбранных перпендикулярными ЭП, использовались условия Дирихле о задании функции потенциала $\dot{\phi}$ в направлении приложенного поля, а на боковых поверхностях задавались условия Немана: $\partial \dot{\phi} / \partial n$, где n – единичный вектор внешней нормали к граничной поверхности.

Анализ полученных результатов. При исследовании влияния на возмущение ЭП подобными включениями учитывалось, что сфера характеризуется лишь одним характерным параметром (ее радиусом R), эллипсоид вращения – двумя (его полуосями a и $b = c$), эллипсоид, не обладающий осевой симметрией, – тремя, дендритный отросток в виде цилиндрической трубки с округлением на окончании, – также тремя (диаметром d , высотой l и радиусом округления r). Сферическое и эллипсоидальное включения с дендритными отростками на их поверхности – соответственно четырьмя и пятью размерными параметрами.

Рассмотрим возмущение внешнего ЭП в диэлектрической среде, содержащей водное эллипсоидальное включение с дендритами на поверхности. Для анализа закономерностей возмущений поля, вносимых такой комбинированной проводящей структурой, рассмотрим вначале возмущение ЭП в диэлектрической среде одиночным проводящим дендритом, что позволит уточнить зависимости максимальной напряженности поля E_{\max} в такой среде от каждого размерного параметра включения.

Одиночный дендрит. Одиночный дендритный отросток в диэлектрической среде представим цилиндрической трубкой со сферическим округлением на его конце. Геометрию дендрита зададим длиной b , радиусом сечения a и радиусом полусферы на его окончании r и проведем анализ характера изменения E_{\max} в зависимости от изменения значений каждого из указанных размерных параметров.

На графиках рис. 1 представлены зависимости E_{\max}/E_0 от b , a и r , где E_0 – напряженность внешнего ЭП при отсутствии возмущений (т.е. без включений). Кривая 1 отражает влияние r при условии, что a и b остаются неизменными, кривая 2 соответствует случаю $a - var, r, b - const$, кривая 3 показывает изменение E_{\max}/E_0 при $b - var, r, a - const$. Из рис. 1 видно, что каждая зависимость имеет нелинейный характер и может быть с хорошей степенью точности аппроксимирована степенной функцией вида $y = \alpha x^\beta$. Каждый из трех размерных параметров существенно влияет на характер возмущения поля, причем увеличение толщины дендрита a или радиуса его поверхностной кривизны r ослабляет ЭП, а увеличение протяженности дендрита b ЭП усиливает. Исходя из значений модуля показателя степени β в приближенных уравнениях, можно сделать вывод, что к наибольшему изменению поля приводит увеличение b , а к наименьшему – увеличение r , $|\beta_3| = 0,63 < |\beta_2| = 0,40 < |\beta_1| = 0,25$.

В ходе расчетов было получено, что при изменении всех трех размерных параметров в n раз, т.е. когда первый и второй дендриты являются геометрически подобными, отношение E_{\max}/E_0 в диэлектрической среде остается неизменным. Таким образом, ослабление поля в

ней при увеличении двух характерных размеров r и a полностью компенсируется его усилением за счет возрастания третьего характерного размера дендрита b .

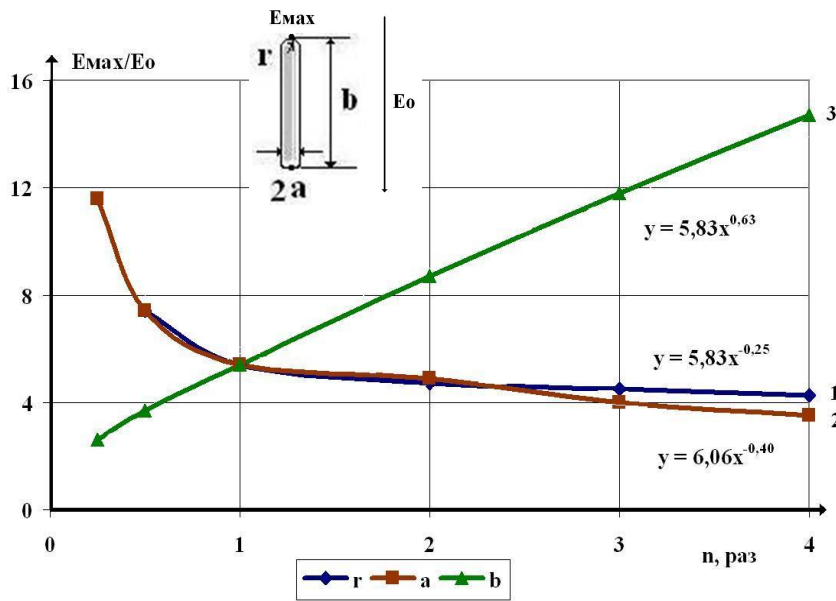
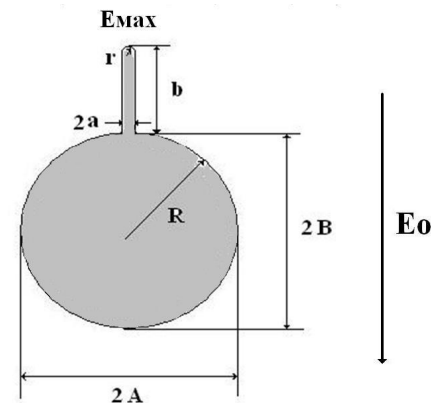


Рис. 1

Для одиночного проводящего эллипсоида, согласно работе [7], при увлечении соотношения его полуосей B/A (A – полуось в перпендикулярном внешнему полю направлении, B – в параллельном) величина E_{\max}/E_0 растет как степенная функция и приближенно описывается уравнением $y = 4,71x^{-0,76}$.

Более сложную форму имеет водное (проводящее) включение, представляющее собой эллипсоид вращения с дендритным отростком на поверхности. Проведем исследование, насколько изменится характер возмущения ЭП в диэлектрической среде, при появлении в ней такого указанного включения сложной формы.



Дендрит на поверхности включения. Анализ показал, что максимальное значение E_{\max}/E_0 в диэлектрической среде наблюдается у острия дендрита и оно зависит от значений пяти размерных параметров – трех параметров дендрита: длины b , радиуса сечения a и радиуса округления r и двух параметров эллипсоида – его полуосей A и B .

На рис. 2 изображен график зависимостей E_{\max}/E_0 от каждого из размерных параметров при условии, что остальные остаются неизменными.

В таблице приведено сравнение значений $E_{\max1}/E_0$ для случая одиночного дендрита и $E_{\max2}/E_0$ для комбинированного включения.

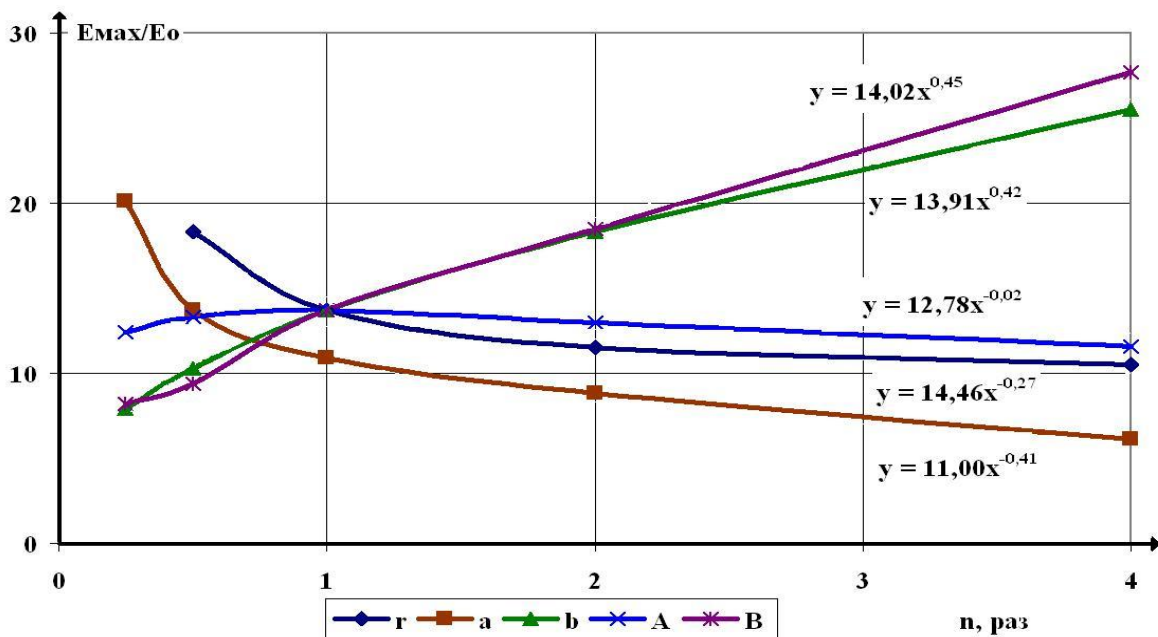


Рис. 2

n	r , мкм	a , мкм	b , мкм	A , мкм	B , мкм	$E_{1\max}/E_0$	$E_{2\max}/E_0$
0,5	2,5	2,5	25	25	25	7,4	18,3
1	5	2,5	25	25	25	5,4	13,7
2	10	2,5	25	25	25	4,7	11,5
4	20	2,5	25	25	25	4,25	10,5
0,5	5	1,25	25	25	25	7,4	20,1
1	5	2,5	25	25	25	5,4	13,7
2	5	5	25	25	25	4,9	10,9
4	5	10	25	25	25	3,5	8,8
0,5	5	2,5	12,5	25	25	3,7	10,3
1	5	2,5	25	25	25	5,4	13,7
2	5	2,5	50	25	25	8,7	18,3
4	5	2,5	100	25	25	14,7	25,5

Из приведенных данных следует, что значение $E_{\max 2}/E_0$ в несколько раз больше, чем соотношение $E_{\max 1}/E_0$, т.е. комбинированное включение возмущает ЭП значительно сильнее. Кривые зависимости $E_{\max 2}/E_0$ от b , a , r , A и B можно аппроксимировать степенными функциями. Электрическое поле будет усиливаться уже не только при возрастании параметра b , но и – параметра B . Поэтому модули показателей степени меньше чем для одиночного дендрита $|\beta_{31}| = 0,42 < |\beta_{32}| = 0,63$. Это объясняется тем, что на изменение величины $E_{\max 2}/E_0$ влияет больше параметров, и поэтому вклад каждого из них получается меньшим. Наиболее сильное влияние оказывают параметры b и B , увеличение которых усиливает поле. Аналогично одиночному дендриту для такого включения более сложной формы изменение всех характерных размерных параметров в n раз не вызывает изменение значения $E_{\max 2}$. То есть действие параметров b и B компенсируется действием параметров a , r и A .

Важно также отметить, что если длина дендрита в направлении ЭП больше размеров эллипсоида в том же направлении (т. е. если $b > B$), то определяющим параметром возмущения ЭП в диэлектрической среде является именно размерный параметр дендрита b . Если значение $b \ll B$, то определяющей является длина эллипсоида.

Выводы. 1. Исследованы закономерности возмущения низкочастотного электрического поля в диэлектрической среде с проводящими включениями, характеризующимися пятью размерными параметрами, в частности, эллипсоидальными проводящими включениями с дендритными отростками на их поверхности. Показано, что в диэлектрической среде возле торцевых поверхностей разных дендритов с одинаковым радиусом кривизны могут возникать различные по величине напряженности электрического поля E , а при увеличении радиуса кривизны значение напряженности поля E может не только уменьшаться, но и возрастать в зависимости от изменений других размерных параметров включения.

2. Подтверждено, что чем сложнее геометрия включения, тем большее количество его характерных размерных параметров необходимо учитывать для расчета максимального значения напряженности ЭП и оценки его распределения в диэлектрической среде. Обосновано, что независимо от сложности геометрии проводящих включений в диэлектрической среде, при соблюдении условия их геометрического подобия максимальная напряженность электрического поля в диэлектрической среде возле таких включений остается неизменной.

3. Подтверждено, что если все характерные размеры включения сложной формы прямо пропорционально изменить в n раз, то пространственное распределение напряженности поля E в диэлектрической среде возле включения изменится таким образом, что некоторое значение напряженности E_l , наблюдаемое на расстоянии l от поверхности включения, будет наблюдаться на расстоянии $n \cdot l$.

В результате проявления данной закономерности величина напряженного объема диэлектрической среды (т.е. объема, в каждой точке которого значение напряженности поля будет больше значения E_1) изменится в n^3 раз.

4. Выявлено, что дендритный отросток, находящийся на поверхности сферического и эллипсоидального проводящего включения, возмущает (в частном случае усиливает) электрическое поле в диэлектрической среде сильнее, чем такой же самостоятельный дендритный отросток таких же размеров.

Если длина дендритного отростка на поверхности сферического и эллипсоидального проводящего включения вдоль электрического поля будет больше размеров включения в том же направлении, то определяющими параметрами для возмущения поля будут размеры дендрита. В случае преобладания продольных размеров включения над длиной дендрита вдоль поля, определяющими становятся размеры сферического или эллипсоидального включения.

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Т. 3. – СПб.: Питер, 2003. – 377 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1980. – 560 с.
3. Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. Многомасштабное моделирование в электротехнике. – Киев, 2011, 256 с.
4. Емец Ю.П., Обносов Ю.В. Точно разрешаемая задача о взаимном влиянии включений в теории гетерогенных сред // ПМТФ. – 1990. – № 1 (179). – С. 21–29.
5. Шидловский А.К., Щерба А.А., Золотарев В.М., Перетятко Ю.В. Анализ микронеоднородности электрического поля как фактора повышения интенсивности пороговых электрофизических процессов в полимерной изоляции высоковольтных кабелей и самонесущих изолированных проводов // Техн. электродинамика. – 2008. – № 4. – С. 3–14.
6. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н., Золотарев В.М. Электрический транспорт полярных молекул воды в неоднородном электрическом поле полимерной изоляции высоковольтных кабелей // Техн. электродинамика. – 2010. – № 5. – С. 3–9.
7. Щерба А.А., Щерба М.А. Моделирование и анализ электрического поля в диэлектрической среде, возмущенного проводящими микровключениями разных размеров и конфигураций // Техн. электродинамика. – 2010. – № 6. – С. 3–9.
8. Comsol Multiphysics 3.5. User's Guide and introduction. – Comsol, Inc. – www.comsol.com

УДК 537.876.23

М.А. Щерба, аспирант

Нац. техн. ун-т України "КПІ",

пр. Перемоги, 37, Київ-56, Україна

Вплив характерних розмірів провідних включень на збурення електричного поля в діелектричному середовищі
Досліджено особливості впливу розмірів провідних включень складної форми на розподіл електричного поля (ЕП) в діелектричному середовищі. Уточнено умови сталості максимальної напруженості ЕП в середовищі при зміні розмірів та форм включень. Обґрунтовано, що з ускладненням геометрії включення кількість характерних його параметрів, що впливають на розподіл ЕП в середовищі, збільшується. Бібл. 9, рис. 2, таблиця.

Ключові слова: електричне поле, напруженість, поверхневий заряд, діелектричне середовище, провідне включення, дендрит.

M.A. Shcherba

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnical Institute",

Peremogy, 37, Kyiv-56, Ukraine

The influence of characteristic sizes of conducting inclusions on electric field distortion in dielectric medium

The influence peculiarities of sizes of conducting inclusion with complex shape on electric field distribution in dielectric medium are studied. The conditions of permanence of maximal electric intensity in medium at changing sizes and shapes of inclusions are determined. It is proved that the inclusion geometry is more complex the quantity of characteristic parameters such inclusion, which influence on electric field distortion in medium, is greater.

References 9, figures 2, table.

Key words: electric field, intensity, surface charge, dielectric medium, conducting inclusion, dendrite.