

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ АСИНХРОННИХ МАШИН ЕЛЕКТРОМЕХАНОТРОННИХ СИСТЕМ

Розроблено математичну модель асинхронного двигуна при врахуванні довільної структури віток обмотки статора і спектра просторових гармонік МРС. Параметри визначено за інформацією про величину електромагнітних параметрів заступної схеми серійних АД і обмоткові дані.

Проблема підвищення енергоефективності процесів електромеханічного перетворення енергії найбільш ефективно може розв'язуватись при вдосконаленні електропривода на основі асинхронних двигунів (АД). Їх широке застосування обумовлено простотою, малою вартістю, надійністю, можливістю безпосереднього живлення від існуючої розподільчої мережі трифазного струму. Для покращення енергоефективності АД та забезпечення роботи у складі регульованого електропривода живлення двигунів часто здійснюється від напівпровідникових регуляторів параметрів електроенергії. Резервом підвищення ефективності при цьому є врахування взаємного впливу всіх складових системи і їх суміщення. При інтеграції електромеханічного перетворювача і напівпровідникового джерела живлення утворюється електромеханотронний пристрій. Перший ступінь інтеграції здійснюється при сумісному проектуванні АД і перетворювачів стандартних конструкцій. При поглибленій інтеграції мають місце конструктивні зміни, які забезпечують ефективність електромеханотронного пристрою і є зайвими при окремому функціонуванні складових системи або навіть унеможливають таке функціонування.

Особливості математичних моделей АД у складі ЕМТС. Ефективне проектування електромеханотронних систем (ЕМТС) з АД та дослідження режимів їх роботи має спиратись на адекватні математичні моделі, які враховують такі особливості режимів та конструкцій, що суттєво впливають на характеристики машини. Розглянемо деякі з них стосовно АД. **Несинусоїдність та несиметрія живлення** обумовлені спотворенням часової залежності зміни напруги та струмів внаслідок керованої зміни величини опору напівпровідникових елементів. **Несиметрія параметрів** АД за фазами виникає навіть у симетричних серійних машин у моменти відключення від мережі деяких фазних обмоток. Крім того, несиметрія конструкції може бути обумовлена особливостями режимів експлуатації або живлення. Наприклад, конденсаторні АД, трифазні АД для інтенсивних динамічних режимів з формуванням оптимальної динамічної механічної характеристики. **Несинусоїдність розподілу МРС у повітряному проміжку** обумовлена дискретністю розміщення обмоток у пазах машини. Вона може мати збільшений вплив на робочі режими, порівняно із стандартною експлуатацією, при несиметрії живлення та конструкції. Так, при відключенні від мережі частини фаз порушуються умови симетрії і сильний прояв має третя просторова гармонічна складова МРС і кратні до неї. **Взаємна індуктивність фаз за шляхами розсіювання** залежить від конструкції обмотки статора і має збільшений вплив на режими при врахуванні несиметрії. **Особливості експлуатаційних режимів** ЕМТС з АД пов'язані з практичною відсутністю сталих режимів, ознакою яких є синусоїдність струмів та напруги, сталість швидкості. У даних системах превалюють динамічні або квазісталі режими – перехідні процеси, які повторюються.

Відповідно до наведених вимог у рамках даної роботи показано результати розробки математичної моделі АД для ЕМТС. Дану математичну модель призначено для дослідження динамічних та квазісталіх режимів роботи АД з короткозамкненим ротором при довільних структурах віток обмотки статора і при врахуванні спектра просторових гармонік МРС, що створюється обмоткою статора. При цьому прийнято, що на кожну гармоніку МРС статора ротор відгукується окремою системою струмів, які створюють тільки взаємну просторову гармоніку МРС. Необхідним елементом таких досліджень є визначення величини потрібних

електромагнітних параметрів, що часто викликає значні труднощі. У даній роботі всі параметри визначено за інформацією про величину електромагнітних параметрів заступної схеми серійних АД і обмоткові дані. Сталість параметрів застосовується при дослідженні АД у номінальних сталих та квазісталих режимах, при попередніх оціночних розрахунках, пов'язаних зі значним споживанням ресурсів ЕОМ, для звуження сфери пошуку оптимальних рішень. Використання даної моделі при дослідженнях передбачає тестування отриманих результатів моделями більш високого рівня адекватності і перехід до них у потрібних випадках.

Рівняння електричної рівноваги в фазних координатах. Вихідні рівняння складено для струмів фаз статора та короткозамкнених контурів ротора [2, 4] у припущенні, що всі електричні контури розміщено у рівномірному повітряному проміжку. В якості фази розглядається вітка обмотки статора. Кожен статорний контур утворює у просторі N косинусоїд (гармонік) МРС з нульовою координатою відповідно до осі контура і з періодом $2\pi/v_j$, де v_j – порядок гармоніки ($1 \leq j \leq N$). Короткозамкнені контури ротора утворено сусідніми стержнями ротора та ділянками короткозамикаючих кілець між ними. Кожна гармоніка МРС статора наводить у контурах ротора свою систему струмів, які створюють у повітряному проміжку тільки одну (взаємну) гармоніку МРС із порядком викликаючої статорної гармоніки. Кожна гармоніка МРС створює у повітряному проміжку косинусоїду магнітної індукції без фазового зсуву. Магнітне поле машини складається з N магнітних полів взаємної індуктивності статор – ротор та полів розсіювання, які є взаємонезалежними.

Для визначення магнітного зв'язку між контурами у рівняннях електричної рівноваги за кожною гармонікою розглянуто комплексну площину, яка суміщена з площиною, перпендикулярною осі двигуна. Уявна вісь повернута відносно дійсної проти годинникової стрілки на 90 ел. град. Усі дійсні осі суміщено з віссю паза статора з номером z_1 (z_1 – кількість зубців статора). Нумерація пазів – проти годинникової стрілки. Рівняння i -ї ($1 \leq i \leq V$, де V – кількість фаз статора) фази статора та k -го ($1 \leq k \leq z_2$, де z_2 – кількість зубців ротора) контура ротора за гармонікою порядку v мають такий вигляд:

$$u_{si} = r_{si}i_{si} + \frac{d}{dt} \sum_{q=1}^V \left(m_{iq} + \sum_{v=v_1}^{v_N} M_{iqv} \cos(\delta_{iv} - \delta_{qv}) \right) i_{sq} + \frac{d}{dt} \sum_{v=v_1}^{v_N} \sum_{k=1}^{z_2} M_{ikv} \cos(v\Theta - \delta_{iv} + kv\delta_k) i_{kv}; \quad (1)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left[2(m_n + m_l) i_{kv} - m_n (i_{(k-1)v} + i_{(k+1)v}) + \sum_{n=1}^{z_2} M_{kkv} \cos[(n-k)v\delta_k] i_{nv} \right] +$$

$$+ 2(r_c + r_{yk}) i_{kv} - r_c (i_{(k-1)v} + i_{(k+1)v}) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \cos(v\Theta + kv\delta_k - \delta_{iv}) i_{si}, \quad (2)$$

де u_{si}, i_{si}, r_{si} – миттєві значення напруги, струму та активний опір i -ї фази статора; M_{iqv} , M_{ikv} , M_{kiv} – максимальні взаємні індуктивності за основним полем гармоніки v між i - та q -ю фазами статора, i -ю фазою статора та контуром ротора, контуром ротора та i -ю фазою статора відповідно; m_{iq} – взаємна індуктивність між i -ю та q -ю фазами статора за шляхами потоку розсіювання; δ_{iv}, δ_{qv} – кутове положення осей i - та q -ї фаз статора (положення максимуму МРС фази за гармонікою v) у координатах гармоніки порядку v ; $\delta_k = 2\pi/z_2$ – кут між осями зубців ротора у координатах першої гармоніки; Θ – кут між віссю зубця ротора з номером z_2 та дійсною віссю комплексної площини в координатах першої гармоніки. Позитивний напрямок відліку кута – проти годинникової стрілки; i_{kv} (i_{nv}) – струм k -го (n -го) контура ротора за гармонікою порядку v ; r_c, r_{yk} – активний опір стержня ротора та ділянки короткозамикаючого кільця між сусідніми стержнями; M_{kkv}, m_n, m_l – власна індуктивність рото-

рного контура: за основним полем гармоніки ν , за шляхами потоку розсіювання паза та кільця.

Використання рівнянь у фазних координатах ускладнюється наявністю періодичних коефіцієнтів, що залежать від кута повороту ротора, і великим порядком системи рівнянь електричної рівноваги АД (у розглянутому випадку $V + z_2 \cdot N$). Ефективність досліджень значно підвищується при переході від миттєвих значень фазних змінних до просторових комплексів [2, 3, 4].

Перетворені рівняння електричної рівноваги. Заміна змінних у рівняннях електричної рівноваги дає змогу зменшити кількість рівнянь і позбутися періодичних коефіцієнтів. Суть таких перетворень полягає у заміні скалярних змінних просторовими комплексами, модулі яких відповідають миттєвому значенню струму контура, а аргументи – його положенню в просторі. Для звільнення від періодичних коефіцієнтів просторові комплекси статора і ротора записують у єдиній системі координат. Максимального ефекту при перетворенні рівнянь досягають вибором системи нових змінних залежно від задачі та особливостей конструкції машини.

Для АД ЕМТС характерні несиметрія живлення та конструкції, несинусоїдність процесів. У роботі [2] показано, що при цьому максимальний ефект досягається при розв'язанні рівнянь стосовно миттєвих значень струмів віток статора і проекцій симетричних складових просторових комплексів ротора. Ефективність застосування симетричних складових обумовлена симетрією короткозамкненого ротора. У цьому випадку, як доведено в [2], z_2 -фазна система струмів за гармонікою ν повноцінно замінюється однією симетричною складовою просторових комплексів струмів ротора, порядок якої відповідає порядку гармоніки. Заміна статорних струмів симетричними складовими або їх проекціями при цьому недоцільна, оскільки вона має сенс лише при симетрії конструкції: система фазних струмів замінюється одним просторовим комплексом (зображуючим вектором). При відсутності нульового провода один зображуючий вектор замінює два незалежних струми трифазної системи, що є коректним, але не скорочує кількість змінних. У інших випадках для коректності перетворень треба залучати більше симетричних складових просторових комплексів струмів, що збільшує кількість змінних [2].

Просторовий комплекс k -го контурного струму ротора за гармонікою ν у системі координат даної гармоніки має такий вигляд: $\bar{i}_{kv} = i_{kv} \cdot e^{j\nu k \delta_k} \cdot e^{j\nu \Theta}$. Перетворимо рівняння (1) з урахуванням того, що $\cos(\nu\Theta - \delta_{iv} + \nu\delta_k) = \left(e^{j\nu k \delta_k} \cdot e^{-j\delta_{iv}} \cdot e^{j\nu \Theta} + e^{-j\nu k \delta_k} \cdot e^{j\delta_{iv}} \cdot e^{-j\nu \Theta} \right) / 2$ і

$$\text{що } \sum_{k=1}^{z_2} M_{ikv} \cos(\nu\Theta - \delta_{iv} + \nu\delta_k) i_{kv} = \sum_{k=1}^{z_2} \frac{M_{ikv}}{2} \left(\bar{i}_{kv} e^{-j\delta_{iv}} + \bar{i}_{kv}^* e^{j\delta_{iv}} \right) = \frac{M_{ikv}}{2} \left(\bar{i}_{rv} e^{-j\delta_{iv}} + \bar{i}_{rv}^* e^{j\delta_{iv}} \right),$$

де $\bar{i}_{kv}^* = i_{kv} \cdot e^{-j\nu k \delta_k} \cdot e^{-j\nu \Theta}$ – сполучений просторовий комплекс k -го контурного струму ротора за гармонікою ν ; $\bar{i}_{rv} = \sum_{k=1}^{z_2} \bar{i}_{kv}$; $\bar{i}_{rv}^* = \sum_{k=1}^{z_2} \bar{i}_{kv}^*$ – сумарний та йому сполучений просторові

комплекси z_2 -фазної системи контурних струмів ротора за гармонікою ν . Даний вектор називають ще зображуючим. Він є пропорційним ν -й симетричній складовій просторових комплексів контурних струмів [2]. При виконаному перетворенні взаємну індуктивність винесено з-під знаку суми, зважаючи на однаковість параметрів всіх контурів ротора. При подальших перетвореннях замінимо сумарні комплекси їх проекціями:

$$\bar{i}_{rv} = i_{rv}^R + j i_{rv}^I; \quad \bar{i}_{rv}^* = i_{rv}^R - j i_{rv}^I, \quad (3)$$

де i_{rv}^R, i_{rv}^I – дійсна та уявна частини сумарного комплексу, і враховуючи, що $e^{-j\delta_{iv}} + e^{j\delta_{iv}} = 2\cos\delta_{iv}$; $je^{-j\delta_{iv}} - je^{j\delta_{iv}} = 2\sin\delta_{iv}$, отримуємо для фази статора i перетворене рівняння (1) без періодичних коефіцієнтів:

$$u_{si} = r_{si}i_{si} + \frac{d}{dt} \sum_{q=1}^V \left(m_{iq} + \sum_{v=v_1}^{v_N} M_{iqv} \cos(\delta_{iv} - \delta_{qv}) \right) i_{sq} + \frac{d}{dt} \sum_{v=v_1}^{v_N} M_{ikv} \left(i_{rv}^R \cos\delta_{iv} + i_{rv}^I \sin\delta_{iv} \right). \quad (4)$$

При отриманні рівнянь для проекцій роторних сумарних комплексів за кожною гармонікою розглянуто z_2 рівняння (2) для всіх контурів ротора. Після помноження лівої і правої частин рівнянь на множник $e^{jvk\delta_k} \cdot e^{jv\Theta}$, де k – номер контура, рівняння підсумовано, і результат перетворено подібно до виконаного вище перетворення рівняння статора. При цьому враховано, що $\omega_r = d\Theta/dt$ – частота обертання ротора. Після виконання цих перетворень рівняння електричної рівноваги ротора відносно сумарного просторового комплексу струмів контурів ротора за гармонікою v має такий вигляд:

$$0 = r_{rv} \bar{i}_{rv} + \left(\frac{d}{dt} - jv\omega_r \right) \left[\left(l_{rv} + \frac{z_2}{2} M_{kkv} \right) \bar{i}_{rv} + \frac{z_2}{2} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \cdot e^{j\delta_{iv}} \cdot i_{si} \right], \quad (5)$$

де

$$r_{rv} = 2r_{yk} + 2r_c(1 - \cos v\delta_k); \quad (6)$$

$$l_{rv} = 2m_l + 2m_n(1 - \cos v\delta_k). \quad (7)$$

Після розкладання комплексного рівняння (5) на рівняння для дійсної та уявної частин можна отримати рівняння для проекцій роторних сумарних комплексів:

$$0 = r_{rv} i_{rv}^R + \frac{d}{dt} \left[L_{rv} i_{rv}^R + \frac{z_2}{2} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \cos\delta_{iv} i_{si} \right] + v\omega_r \left[L_{rv} i_{rv}^I + \frac{z_2}{2} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \sin\delta_{iv} i_{si} \right]; \quad (8)$$

$$0 = r_{rv} i_{rv}^I + \frac{d}{dt} \left[L_{rv} i_{rv}^I + \frac{z_2}{2} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \sin\delta_{iv} i_{si} \right] - v\omega_r \left[L_{rv} i_{rv}^R + \frac{z_2}{2} \sum_{i=1}^V M_{kiv} \cos\delta_{iv} i_{si} \right], \quad (9)$$

де $L_{rv} = l_{rv} + \frac{z_2}{2} M_{kkv}$. Таким чином, отримані рівняння відносно струмів фаз статора і проекцій сумарних комплексів струмів ротора за гармоніками не мають періодичних коефіцієнтів і дають змогу досліджувати режими АД ЕМТС при відомих напругах фаз. Кількість рівнянь у системі: $V + 2N$. Для використання рівнянь (4), (8), (9) потрібна інформація про кількість та порядок гармонік МРС, які підлягають врахуванню, а також про величину параметрів у рівняннях.

Визначення величини МРС обмотки та параметрів АД за гармонічними складовими. Вихідною інформацією для визначення гармонічного складу МРС обмоток є кількість та склад віток обмотки статора, їх схема з'єднання, співвідношення геометричних розмірів зубцевих зон. Обмотка статора складається з секцій, які з'єднуються послідовно і утворюють вітки обмотки. Структура віток і схема їх з'єднання визначає схему обмотки.

Визначення одиначної МРС вітки обмотки статора здійснимо при підсумовуванні просторових векторів МРС сторін секцій даної вітки. Їх можна визначити, розклавши залежність зміни МРС сторони секції в ряд Фур'є і замінивши синусоїдальну хвилю кожної гармоніки просторовим вектором у координатах цієї гармоніки. При прийнятому розміщенні комплексних осей одиначна МРС вітки визначається за виразом

$$\bar{f}_{iiv} = f_{iv} e^{j\delta_{iv}} = k_{onsv} \sum_{c=1}^{2K_{ei}} \frac{n_c W_c}{|n_c| v \pi} e^{j(v|n_c|\delta_s + \pi/2)}, \quad (10)$$

де f_{iv} , δ_{iv} – модуль та аргумент просторового комплексу одиначної МРС вітки (фази) i , які визначаються після обчислення правої частини виразу (10), кутову координату δ_{iv} викорис-

тано у рівняннях електричної рівноваги (4), (5), (8), (9); $K_{\delta i}$ – кількість секцій, з яких складається вітка i ; k_{onsv} – коефіцієнт відкриття паза статора за гармонікою v [6], що враховує при розкладі у ряд Фур'є поступову зміну МРС вздовж шліца за лінійним законом; n_c – номер паза статора, в якому розміщується сторона секції. Якщо номер зі знаком плюс – напрямком обходу секції співпадає з обраним позитивним напрямком, якщо мінус – напрямком протилежний; W_c – кількість витків секції; $\delta_s = 2\pi/z_1$ – кут між осями зубців статора в координатах першої гармоніки.

Визначення модуля одиничної МРС контура ротора здійснимо з урахуванням скорочення контура, відкриття паза, скосу пазів:

$$f_{rv} = \frac{2}{v\pi} k_{yrv} k_{onrv} k_{skv}, \quad (11)$$

де k_{yrv} – коефіцієнт скорочення контура ротора; k_{onrv} – коефіцієнт відкриття паза ротора за гармонікою v ; k_{skv} – коефіцієнт скосу пазів ротора за гармонікою v .

Коефіцієнт скосу враховує зменшення ЕРС в контурах статора, яка наводиться роторними струмами, внаслідок зсуву фази за довжиною машини. Введення коефіцієнта скосу у вираз МРС ротора є потрібним при визначенні сумарної МРС АД, взаємної індуктивності статор-ротор і є зайвим при визначенні індуктивності ротор-ротор.

Взаємна або власна індуктивність за основним полем у рівняннях електричної рівноваги є коефіцієнтом пропорційності між ЕРС у контурі і струмом, який створює потік. Відповідно до цього отримано вирази взаємних і власних індуктивностей за основним полем у рівняннях електричної рівноваги (4), (8), (9) [2, 4]:

$$M_{iqv} = \frac{\mu_0 l_\delta \pi R}{\delta k_\delta k_{\mu v}} f_{iv} f_{qv}; \quad (12)$$

$$M_{ikv} = M_{kiv} = \frac{\mu_0 l_\delta \pi R}{\delta k_\delta k_{\mu v}} f_{iv} f_{rv}; \quad (13)$$

$$M_{kkv} = \frac{\mu_0 l_\delta \pi R}{\delta k_\delta k_{\mu v}} f_{rv}^2 / k_{skv}^2, \quad (14)$$

де $k_\delta, k_{\mu v}$ – коефіцієнти Картера і насичення магнітного кола гармоніки v ; δ – величина повітряного проміжку; μ_0 – магнітна стала.

Зв'язок параметрів АД ЕМТС із параметрами заступної схеми. Часто дослідників та проектувальників ЕМТС з симетричними серійними АД цікавлять режими роботи з ковзаннями і насиченнями магнітного кола близько номінального рівня. У цьому випадку достатню для практичних цілей точність можна отримати при використанні сталих параметрів номінального режиму – параметрів заступної схеми. Їх зв'язок з параметрами отриманих рівнянь електричної рівноваги (4), (8), (9) визначимо спростивши ці рівняння, задаючи умови симетрії машини і режиму. Після цього для сталого режиму замінимо просторові комплекси часовими і визначимо зв'язок параметрів.

Рівняння електричної рівноваги статора симетричного АД маємо з рівняння (4) для трьох фаз ($V = 3$): $s1 = A$; $s2 = B$; $s3 = C$ при врахуванні тільки робочої гармоніки v_P . У випадку симетрії приймемо: $\delta_A = 0^\circ$; $\delta_B = 120^\circ$; $\delta_C = -120^\circ$. При цьому позначимо: $r_{si} = r_s$; $M_{iqv} = M_{ss}, (i, q = A, B, C)$; $M_{ikv} = M_{sk}, (i = A, B, C)$; $m_{AA} = m_{BB} = m_{CC} = l_s$; $m_{AB} = m_{BC} = m_{CA} = m_{BA} = m_{CB} = m_{AC} = m_s$. Ці три статорних рівняння відносно миттєвих значень фазних струмів замінимо одним рівнянням відносно зображуючого просторового комплексу струмів статора (першої симетричної складової просторових комплексів фазних струмів [2, 4]) у координатах поля. Координати поля дозволяють позбутися у рівняннях періодичних коефіцієнтів, які залежать від частоти мережі, і отримати струми у вигляді просто-

рових комплексів без періодичної їх зміни. Їх модуль пропорційний огинаючій позитивних максимумів часової залежності струмів. У сталому режимі даний просторовий комплекс на комплексній площині співпадає з часовим комплексом струму. Для потрібного перетворення даних рівнянь помножимо ліву і праву частини першого на $(2/3)e^{-j\omega_0 t}$, другого – на $(2/3)e^{-j\omega_0 t}e^{j2\pi/3}$, третього – на $(2/3)e^{-j\omega_0 t}e^{-j2\pi/3}$ і підсумуємо отримані рівняння. Ре-

зультат перетворення з урахуванням, що $i_r^R \cos \delta_i + i_r^I \sin \delta_i = (\bar{i}_r e^{-j\delta_i} + \bar{i}_r^* e^{j\delta_i})/2$ і $1 + e^{j2\pi/3} + e^{-j2\pi/3} = 0$, має такий вигляд:

$$\bar{u}_s = r_s \bar{i}_s + \left(\frac{d}{dt} + j\omega_0 \right) \left[(l_s - m_s) \bar{i}_s + \frac{3}{2} M_{ss} \bar{i}_s + M_{sk} \bar{i}_r \right], \quad (15)$$

$$\text{де } \bar{i}_s = \frac{2}{3} e^{-j\omega_0 t} (i_A + i_B e^{j2\pi/3} + i_C e^{-j2\pi/3}); \quad \bar{u}_s = \frac{2}{3} e^{-j\omega_0 t} (u_A + u_B e^{j2\pi/3} + u_C e^{-j2\pi/3});$$

$\bar{i}_r = \bar{i}_{rvp} e^{-j\omega_0 t}$ – результуючі (зображуючі) просторові комплекси фазних струмів та напруги статора і сумарного просторового комплексу струмів контурів ротора за робочою гармонікою в координатах поля [2]; ω_0 – кутова частота електричної мережі. Коефіцієнт $2/3$ вирівнює у сталому режимі амплітуди векторів \bar{i}_s , \bar{u}_s і часових залежностей зміни миттєвих фазних струмів та напруги.

Рівняння електричної рівноваги контура ротора симетричного АД отримаємо подібним чином, перетворивши рівняння (5), з урахуванням (13):

$$0 = r_{rvp} \bar{i}_r + \left(\frac{d}{dt} + j\omega_0 - j\nu_P \omega_r \right) \left[\left(l_{rvp} + \frac{z_2}{2} M_{kk} \right) \bar{i}_r + \frac{3z_2}{4} M_{ks} \bar{i}_s \right]. \quad (16)$$

Рівняння (15), (16) дають можливість досліджувати динаміку симетричного АД відносно змінних \bar{i}_s , \bar{i}_r , ω_r .

Зв'язок змінних динаміки з часовими комплексами. У сталому режимі роботи для цих змінних, подібно до [2, 4], справедливі співвідношення:

$$\bar{i}_s = \sqrt{2} \dot{I}_s; \quad (17)$$

$$\bar{i}_r = z_2 \dot{I}_k / \sqrt{2}, \quad (18)$$

де \dot{I}_s , \dot{I}_k – часові комплекси струмів статора і контура ротора.

Рівняння електричної рівноваги симетричного АД ЕМТС відносно часових комплексів отримаємо підстановкою виразів (17), (18) у (15), (16) і виконавши зведення z_2 -фазного ротора до трифазного. Зведення здійснюємо за умови сталості МРС, активної та реактивної потужностей ротора:

$$I_r' = I_k \frac{z_2 f_{rvp}}{3 f_{svp}}; \quad r'_{rvp} = r_{rvp} \frac{3}{z_2} f_{svp}^2 / f_{rvp}^2; \quad l'_{rvp} = l_{rvp} \frac{3}{z_2} f_{svp}^2 / f_{rvp}^2. \quad (19)$$

Помноживши рівняння (16) на $f_{svp} / (s_{vp} f_{rvp})$, (де $s_{vp} = (\omega_0 - \nu_P \omega_r) / \omega_0$ – ковзання ротора) і після цього перетворивши його і (15) з урахуванням (17), (18), (19), маючи на увазі, що часові комплекси не є функціями часу, отримаємо:

$$\dot{U}_s = r_s \dot{I}_s + j\omega_0 \left[(l_s - m_s) \dot{I}_s + \frac{3}{2} M_{ss} \dot{I}_s + M_{sk} \frac{3 f_{svp}}{2 f_{rvp}} \dot{I}_r' \right]; \quad (20)$$

$$0 = \frac{r'_{rvp}}{s_{vp}} \dot{I}_r' + j\omega_0 \left[\left(l_{rvp} + \frac{z_2}{2} M_{kk} \right) \frac{3}{z_2} \left(\frac{f_{svp}}{f_{rvp}} \right)^2 \dot{I}_r' + M_{ks} \frac{3 f_{svp}}{2 f_{rvp}} \dot{I}_s \right], \quad (21)$$

де $\dot{U}_s = \bar{u}_s / \sqrt{2}$ – часовий комплекс напруги статора, визначено подібно (17).

Зв'язок параметрів встановимо при порівнянні рівнянь (20), (21) з рівняннями Т-подібної заступної схеми [2]. У результаті визначимо вирази параметрів симетричного АД ЕМТС у рівняннях електричної рівноваги (15), (16):

$$r_s = r_1; \quad M_{ss} = \frac{2x_m}{3\omega_0}; \quad l_s - m_s = \frac{x_1}{\omega_0}; \quad r_{rvP} = r_2' \frac{z_2}{3} f_{rvP}^2 / f_{svP}^2; \quad (22)$$

$$l_{rvP} = x_2' \frac{z_2}{3} f_{rvP}^2 / f_{svP}^2; \quad M_{sk} = M_{ks} = \frac{2x_m f_{rvP}}{3\omega_0 f_{svP}}; \quad M_{kk} = \frac{2x_m}{3\omega_0} f_{rvP}^2 / f_{svP}^2,$$

де r_1 , x_1 , x_m , r_2' , x_2' – параметри Т-подібної заступної схеми АД, які можна визначити за відомими методиками розрахунковим шляхом або за каталоговими даними, наприклад [1].

Врахування взаємної індуктивності фаз статора за шляхами розсіювання при визначенні параметрів (22) потребує додаткової інформації. Індуктивний опір розсіювання статора відповідно до (22) можна визначити таким чином:

$$x_1 = \omega_0(l_s - m_s). \quad (23)$$

Тобто параметр заступної схеми x_1 визначається за величинами власної (l_s) і взаємної (m_s) індуктивностей розсіювання фаз статора. Величина x_1 обумовлюється тільки власною індуктивністю лише при припущенні $m_s = 0$. Дослідження показують, що навіть для одношарових обмоток таке припущення вносить помітні похибки. Для потрібного уточнення визначення параметрів розсіювання статора введемо коефіцієнт співвідношення власної та взаємної індуктивностей розсіювання:

$$k_{lm} = l_s / |m_s|. \quad (24)$$

Наприклад, для двигуна 4А80А2 з одношаровою обмоткою у номінальному режимі роботи при врахуванні тільки пазового розсіювання $k_{lm} \approx 10$. Для пазового розсіювання двошарових обмоток вплив коефіцієнта k_{lm} збільшується: $k_{lm} \approx 2,5$.

Визначення величини k_{lm} потребує розподілення власної індуктивності розсіювання фази статора на складові: $l_s = l_{sn} + l_{sl} + l_{sd}$ – пазового, лобового та диференційного розсіювання. У випадку подальших розрахунків з урахуванням спектра гармонік МРС величина диференційного розсіювання l_{sd} має бути визначеною без врахування впливу цих гармонік. З урахуванням викладеного коефіцієнт співвідношення власної та взаємної індуктивностей розсіювання можна визначити як

$$k_{lm} = l_s / (l_{sn} / k_{lmn} + l_{sl} / k_{lml}), \quad (25)$$

де $k_{lmn} = l_{sn} / |m_{sn}|$, $k_{lml} = l_{sl} / |m_{sl}|$ – коефіцієнти співвідношення власної та взаємної (m_{sn} , m_{sl}) індуктивностей пазового та лобового розсіювання відповідно.

Модуль m_s у виразі (24) обумовлений тим, що ця величина у симетричних обмоток менша за нуль. Знак m_s визначається знаком ЕРС $d/dt(m_{siq}i_{sq})$ по відношенню до знаку ЕРС $d/dt(l_{si}i_{si})$ при одиничних позитивних струмах фаз статора: i_{sq} , i_{si} . Від'ємність знаку m_s при одношарових обмотках (міжфазна взаємна індуктивність пазового розсіювання обумовлена потоком по коронках зубців) пояснюється подібно до знаку взаємної індуктивності фаз за основним полем, де він визначається знаком косинуса 120° , кута між осями фаз. При двошарових обмотках в одних пазах розміщено сторони секцій обмоток різних фаз із протилежними напрямками одиничних позитивних струмів, що обумовлює різний знак величин l_s і m_s . Спираючись на викладене обґрунтування і відповідно до виразу (24), можна записати

$$m_s = -l_s / k_{lm}. \quad (26)$$

Після визначення величини (25), із виразів (26) і (23) можна визначити

$$l_s = x_1 k_{lm} / [\omega_0 (k_{lm} + 1)]; \quad m_s = -x_1 / [\omega_0 (k_{lm} + 1)]. \quad (27)$$

Отриманий вираз для визначення l_s свідчить, що при розрахунках параметрів заступної схеми, величина розсіювання статора x_1 має бути більшою, ніж $\omega_0 l_s$:

$$x_1 = \omega_0 l_s (k_{lm} + 1) / k_{lm}. \quad (28)$$

Вирази (27) разом з (25) доповнюють співвідношення (22) і дають змогу визначити всі параметри, які дозволяють за допомогою рівнянь електричної рівноваги (15), (16) досліджувати режими роботи симетричних АД ЕМТС.

Визначення параметрів АД ЕМТС при довільній структурі обмотки статора і врахуванні спектра гармонік МРС. В отриманих виразах для визначення параметрів (12)...(14) невідомою є величина коефіцієнта насичення магнітного кола $k_{\mu v}$. Його значення у номінальному режимі за робочою гармонікою можна визначити при співставленні виразів (22) і (12)...(14). Це дає змогу визначити параметри за основним полем при розрахунках параметрів за вітками обмотки статора при визначених значеннях їх одиничних МРС, (10) і за умови номінального рівня насичення магнітного кола. Для врахування зміни магнітного стану треба за кожною гармонікою МРС корегувати величину $k_{\mu v}$ у функції значення параметрів робочого режиму.

Визначення параметрів ротора за гармоніками МРС здійснимо за допомогою виразів (6), (7) після їх уточнення щодо врахування витіснення струму з стержнів ротора при збільшенні його частоти:

$$r_{rv} = 2r_{yk} + 2r_c k_{Rv} (1 - \cos v \delta_k); \quad (29)$$

$$l_{rv} = 2m_l + 2m_n k_{Lv} (1 - \cos v \delta_k), \quad (30)$$

де k_{Rv} , k_{Lv} – коефіцієнти зміни активного опору та індуктивності стержня ротора в функції частоти струму за даною гармонікою, які можна визначити, наприклад, за методикою [6].

Параметри ротора за гармоніками МРС можна визначити із використанням виразів (22), (29), (30) при відомих величинах співвідношень параметрів контурів при нульовій частоті [6]:

$$k_r = r_c / r_{yk}; \quad (31)$$

$$k_l = m_n / m_l. \quad (32)$$

Для цього за визначеними величинами параметрів робочого режиму (22) і величинами k_{Rv_p} , k_{Lv_p} при номінальній частоті струму ротора можна визначити, перетворивши (29), (30) з урахуванням (31), (32):

$$r_{yk} = \frac{r_{rv_p}}{2 + 2k_r k_{Rv_p} (1 - \cos v_p \delta_k)}; \quad (33)$$

$$m_l = \frac{l_{rv_p} k_{lr_x}}{2 + 2k_l k_{Lv_p} (1 - \cos v_p \delta_k)}, \quad (34)$$

де k_{lr_x} – коефіцієнт вилучення з величини каталогової індуктивності розсіювання ротора величин розсіювання, які обумовлені скосом і гармоніками МРС, оскільки в даній роботі ці явища враховуються іншим чином.

Після визначення величин (33), (34) можна визначити параметри розсіювання ротора за гармоніками МРС наступним чином:

$$r_{rv} = 2r_{yk} [1 + k_r k_{Rv} (1 - \cos v \delta_k)]; \quad (35)$$

$$l_{rv} = 2m_l [1 + k_l k_{Lv} (1 - \cos v \delta_k)]. \quad (36)$$

Визначення величини електромагнітного моменту АД ЕМТС. Рівняння електромагнітного моменту визначається як часткова похідна від запасу магнітної коенергії за пере-

міщенням [2, 5]. При сталих параметрах магнітні енергія та коенергія рівні, і вираз електромагнітного моменту суттєво спрощується: інтегральна залежність перетворюється на положивину добутку підінтегральної функції на величину під знаком диференціалу. Вираз електромагнітного моменту при даних умовах і врахуванні довільного числа гармонік МРС і при довільній структурі обмотки статора наступний [2]:

$$M_e = \sum_{i=1}^V i_{si} \sum_{v=v_1}^{v_N} v M_{ikv} (i_{rv}^R \sin \delta_{iv} - i_{rv}^I \cos \delta_{iv}). \quad (37)$$

Висновки. Розроблена математична модель АД призначена для дослідження динамічних, квазісталих, сталих режимів роботи ЕМТС з АД при врахуванні довільної структури віток обмотки статора і є основою для розробки програми моделювання процесів у системі імітаційного та структурного моделювання MATLAB-Simulink. Обрана структура математичної моделі та система змінних забезпечують відповідність до вимог, які висуваються до моделей АД ЕМТС. Ефективність досліджень забезпечується врахуванням спектра гармонік МРС статорної обмотки, ефективними алгоритмами визначення потрібних параметрів АД за каталоговою інформацією. Особливості визначення параметрів розробленої математичної моделі дали змогу розробити заходи врахування взаємної індуктивності фаз статора за шляхами розсіювання. Величина параметру заступної схеми АД x_1 обумовлюється власною індуктивністю фази лише в припущенні відсутності взаємної індуктивності за шляхами розсіювання, в іншому випадку даний параметр буде більшим.

Разработана математическая модель асинхронного двигателя при учете произвольной структуры ветвей обмотки статора и спектра пространственных гармоник МДС. Параметры определены исходя из величины электромагнитных параметров схемы замещения и обмоточных данных.

The mathematical model of the asynchronous engine is developed at the account of any structure of branches of a winding and a spectrum of spatial harmonics. Parameters are defined proceeding from catalogue data.

1. *Асинхронные двигатели серии 4А: Справочник / А.Э. Кравчик, М.М. Шлаф, В.И. Афонин, Е.А. Соболенская. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 504 с.*
2. *Войтех А.А., Попович А.Н. Моделирование переходных процессов в полусоперключаемых асинхронных двигателях. – К.: Наук. думка, 1989. – 152 с.*
3. *Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1955. – 275 с.*
4. *Попович А.Н. Математическая модель для расчета рабочих характеристик асинхронного двигателя с учетом потерь в стали // Техн. электродинамика. – 1999. – № 4. – С. 45–52.*
5. *Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. – М. – Л.: Энергия, 1964. – 528 с.*
6. *Унифицированная серия асинхронных двигателей Интерэлектро / В.И. Радин, Й. Лондин, В.Д. Розенкоп и др.; Под ред. В.И. Радина. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 416 с.*

Надійшла 22.12.2009