

515.164.174

**І. А. Юрчук**

*Институт математики НАН України*

*E-mail: iyurch@ukr.net*

## ***PPO-* та *PCO-*еквівалентності неперервних відображень, заданих на $S^1 \vee S^1$**

Let  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  be a circle,  $S^1 \vee S^1 = (S^1 \amalg S^1)/\sim$ ,  $x_0 \sim y_0$  a topological space with a fix point and  $f : S^1 \vee S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  a continuous function with a finite number of local extrema. We will consider two different types of equivalency of such functions and for both of them necessary and sufficient conditions for functions to be equivalent will be obtained.

**Ключові слова:** *PPO-* and *PCO-*equivalences, a continuous function, a local extremum

### 1. ВСТУП

В багатьох роботах, що стосуються питань класифікації функцій, потоків тощо на многовидах чи інших топологічних просторах, одним з основних способів доведення критерію є побудова інваріанту, який містить основну інформацію про досліджуваний об'єкт [1–6].

В даній роботі розглядаємо неперервні функції, що задані на букеті двох кіл зі скінченним числом локальних екстремумів, та отримуємо критерії для деяких типів їх еквівалентностей.

Нехай задано  $(S^1, x_0)$  та  $(S^1, y_0)$ , де

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Розглядаємо топологічний простір з відміченою точкою

$$S^1 \vee S^1 = (S^1 \amalg S^1)/\sim, \quad x_0 \sim y_0,$$

© І. А. Юрчук, 2009

будемо його позначати через  $\mathcal{S}$ , а точку – через  $a$ . Далі, для даного простору будемо розрізняти кола  $(S_1^1, a)$  і  $(S_2^1, a)$  та зафіксуємо на  $\mathcal{S}$  деяку орієнтацію.

Нехай  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка неперервна функція зі скінченним числом локальних екстремумів. Нагадаємо, що точка  $x_0 \in X$  називається точкою локального мінімуму (максимуму) функції  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо  $\forall x \in U(x_0), x \neq x_0$ , справедливо  $f(x) > f(x_0)$  ( $f(x) < f(x_0)$ ). Значення функції в локальних екстремумах будемо називати критичними.

Відмітимо той факт, що точка  $a$  буде локальним екстремумом функції  $f$  лише у випадку, коли  $a$  є локальним екстремумом для кожної з функцій  $f|_{S_1^1}$  та  $f|_{S_2^1}$ .

**Означення 1.** *Неперервні відображення  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  називаються PPO-еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $h_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  та  $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які зберігають орієнтацію і такі, що  $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$  та  $S_i^1 = h_1^{-1}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))$ , де  $i = 1, 2$ .*

**Означення 2.** *Неперервні відображення  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  називаються PCO-еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $h_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  та  $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що  $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$  та  $S_i^1 = h_1^{-1}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))$ , де  $i = 1, 2$ .*

Із даних означень випливає, що PPO-еквівалентні функції є PCO-еквівалентними, але не навпаки.

## 2. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ З КОМБІНАТОРИКИ

Сформулюємо означення деяких комбінаторних об'єктів. Нагадаємо [5], що змією типу  $R_m^n$  називається послідовність додатних цілих чисел  $x_i$ , які задовольняють умови:  $x_0 < x_1 > x_2 < \dots < x_n$ , де  $0 \leq x_i \leq m$ ,  $m < n$  і  $\forall k, k \in \{0, \dots, m\}$  існує принаймні одне значення  $i, i \in \{0, \dots, n\}$  таке, що  $x_i = k$ .

У Табл.1 наведено значення кількостей різних  $R_m^n$ -змій.

**Означення 3.** *Змією типу  $\beta$  називається послідовність додатних цілих чисел  $x_i$ , що задовольняють умови:  $x_0 < x_1 > \dots < x_n$ , де  $0 \leq x_i \leq m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

ТАБЛ. 1. Значення кількості  $R_m^n$ -змій.

$m \setminus n$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2		2	8	16	29
3			5	34	113
4				16	162
5					61

**Означення 4.** *Монотонним відрізком в послідовності  $\Delta = (i_1, \dots, i_n)$  називається максимальний відрізок, на якому послідовність спадає або зростає:*

$$(i_{a-1} <) i_a > i_{a+1} > \dots > i_b (< i_{b+1}),$$

або

$$(i_{a-1} >) i_a < i_{a+1} < \dots < i_b (> i_{b+1})$$

(випадки  $a = 1$  і  $b = n$  також можливі), де  $i_j \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

Далі монотонний відрізок будемо позначати через  $\Delta(a, b)$ .

**Означення 5.** *Узагальненою змією  $G(n, m)$  називається послідовність додатних цілих чисел  $x_i$ , що задовольняють умови:  $x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_n$ , де  $0 \leq x_i \leq m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

Згідно з означенням змія  $G(n, m)$  має два типи складових:  $\beta$ -змії та відрізки  $\Delta(a, b)$ .

### 3. УМОВИ PPO- ТА PCO-ЕКВІВАЛЕНТНОСТЕЙ

Оскільки  $\mathcal{S}$  є букетом двох кіл, на яких зафіксовано орієнтацію, то було б природно, скориставшись роботою [5], де проведена топологічна класифікація неперервних функцій на колі, отримати PPO- та PCO-класифікацію для відображень  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ . Проте, у випадку кола з відміченою точкою, його інваріантом, взагалі кажучи, не буде змія (на Рис.1 наведено простий

приклад двох функцій, де проілюстровано два випадки, для одного з яких фіксована точка  $x$  є регулярною, а тому інваріант не є змією).

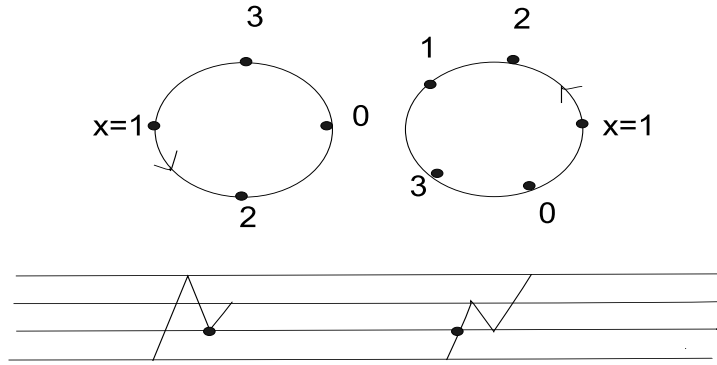


Рис. 7. Функції на колі з відміченою точкою  $x$ .

**3.1. PPO-еквівалентність.** Перш ніж сформулювати критерій *PPO*-еквівалентності функцій, заданих на  $\mathcal{S}$ , побудуємо їх комбінаторний інваріант.

*Побудова інваріанту.* Нехай  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна функція зі скінченним числом локальних екстремумів, в яких функція приймає  $k$  різних значень. На колі  $S^1_1$ , починаючи з першого локального екстремума від точки  $a$  в заданому напрямі, позначимо локальні екстремуми через  $x^1_1, x^1_2, \dots, x^1_{n_1}$ . Далі, по аналогії, для кола  $S^1_2$  отримаємо  $x^2_1, x^2_2, \dots, x^2_{n_2}$ . Об’єднаємо їх, додавши точку  $a$ , та утворимо послідовність

$$x^1_1, \dots, x^1_{n_1}, a, x^2_1, \dots, x^2_{n_2}.$$

Наступний крок, розглянемо значення функції

$$y_0 = f(x^1_1), \dots, y_{n_1-1} = f(x^1_{n_1}),$$

$$y_{n_1} = f(a), y_{n_1+1} = f(x_1^2), \dots, y_n = f(x_{n_2}^2).$$

Зрозуміло, що випадок, коли  $y_i = y_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , виключено, оскільки  $f$  є неперервною функцією і згідно з теоремою Ролля між точками  $f^{-1}(y_i)$  та  $f^{-1}(y_{i+1})$  повинен лежати локальний екстремум, що неможливо. Тому значення  $y_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , задовольняють таку систему нерівностей:  $y_0 \neq y_1 \neq \dots \neq y_n$ . Задамо відображення  $y_i \rightarrow z_i$ , де  $z_i \in [0, 1, \dots, k-1]$  і  $z_i$  дорівнює числу значень  $y_l$  таких, що  $y_l < y_i$ . Числа  $z_i$  утворюють узагальнену змію  $G(n, k-1)$ . Останній крок побудови: відмітимо на  $G(n, k-1)$  значення  $z_{n_1}$ . Утворений інваріант — узагальнена змія з відміченою точкою, для заданої функції  $f$  будується однозначно, що зумовлено зафіксованими порядком кіл  $S_1^1 \vee S_2^1$  та орієнтацією.

**Теорема 1.** *Дві функції  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  є PPO-еквівалентними тоді і лише тоді, коли їм відповідає одна й та ж узагальнена змія  $G(n, m)$  з відміченою точкою.*

*Доведення. Необхідність.* Доведення впливає з побудови інваріанту для функцій  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Достатність.* Нехай функціям  $f$  та  $g$  відповідає деяка змія  $G(n, m)$  з відміченою точкою, доведемо, що функції  $f$  та  $g$  є PPO-еквівалентними. З умови випливає, що число локальних екстремумів колах  $S_1^1$  та  $S_2^1$  для кожної з функцій  $f$  та  $g$  співпадає, позначимо їх через  $k_1$  та  $k_2$  відповідно. Нехай функції  $f$  ( $g$ ) на колі  $S_1^1$ , починаючи з  $a$  (відміченої точки) та рухаючись за орієнтацією, відповідає послідовність локальних екстремумів  $x_1^1, \dots, x_{k_1}^1$  ( $y_1^1, \dots, y_{k_1}^1$ ). Аналогічно, на  $S_2^1$  отримаємо  $x_1^2, \dots, x_{k_2}^2$  ( $y_1^2, \dots, y_{k_2}^2$ ). Відповідно побудові змії, існують відображення  $\varphi_1 : f(x_i^j) \rightarrow z_l$  та  $\varphi_2 : g(y_i^j) \rightarrow z_l$  (а також  $\varphi_1 : f(a) \rightarrow z_l$  та  $\varphi_2 : g(a) \rightarrow z_l$ ), де  $j = 1, 2$ ,  $z_l$  — ціле додатне число і елемент змії  $G(n, m)$ . Позначимо через  $\alpha_i^j$  ( $\beta_i^j$ ) дугу кола  $S_j^1$  між локальними екстремумами  $x_i^j$  та  $x_{i+1}^j$  ( $y_i^j$  та  $y_{i+1}^j$ ). Дані відображення можна легко продовжити до гомеоморфізмів  $\tilde{\varphi}_1 : \alpha_i^j \rightarrow z_l z_{l+1}$  та  $\tilde{\varphi}_2 : \beta_i^j \rightarrow z_l z_{l+1}$ , де  $z_l z_{l+1}$  — дуга змії

$G(n, m)$  між точками  $z_l$  та  $z_{l+1}$ . Зрозуміло, що отримані гомеоморфізми зберігають орієнтацію, яка задана на кожному з кіл букету.

Нехай відрізок  $[a, b] \in \mathbb{R}$  — множина значень функції  $f$ , а  $[c, d] \in \mathbb{R}$  — функції  $g$ . Побудуємо гомеоморфізм

$$h_2 : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

такий, що зберігає орієнтацію та задається такою формулою:  
 $h_2(t) = c + \frac{t-a}{b-a}(d-c)$ .

Зі сказаного вище випливає, що  $f = h_2^{-1} \circ g \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$  та

$$S_i^1 = \tilde{\varphi}_1^{-1}(\tilde{\varphi}_2(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))),$$

де  $i = 1, 2$ . □

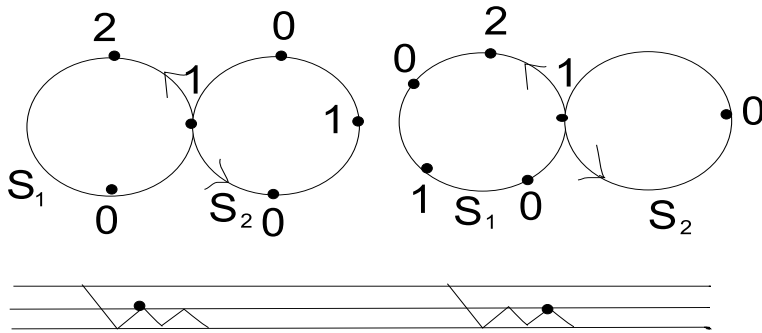


Рис. 8. *PPO*-нееквівалентні функції.

Нехай  $G(m, n)$  — деяка змія з відміченою точкою  $x$ . Зрозуміло, що  $G(m, n)$  складається з  $\beta$ -змій та  $\Delta(a, b)$  відрізка. Позначимо складові даної змії через  $g_1$  та  $g_2$ , відповідно до та після

відміченої точки. Припустимо, що  $g_1$  містить  $k_1$  елемент і  $x \notin g_1$  та  $g_2$  містить  $k_2$  елементів і  $x \notin g_2$ , причому  $k_1 + k_2 + 1 = n$ . Слід зауважити, що  $g_1$  та  $g_2$  є зміями, в той час як  $x$  може належати деякому монотонному відрізку  $\Delta(a, b)$ . Нехай елементи з  $g_1$  приймають  $m_1$  різних значень, а елементи з  $g_2$  приймають  $m_2$  різних значень, причому  $m_1 + m_2 \leq m$ . Позначимо через  $\delta_{k_1, k_2}(m_1, m_2)$  кількість  $G(m, n)$ -змій. Тоді в даних позначеннях справедлива наступна оцінка:

$$(1) \quad \delta_{k_1, k_2}(m_1, m_2) < C_m^{m_1} R_{m_1-1}^{k_1-1} C_m^{m_2} R_{m_2-1}^{k_2-1}.$$

*Нерівність (1) дає оцінку кількості РРО-нееквівалентних функцій таких, що  $S_1^1$  містить  $k_1$  локальних екстремумів, які приймають  $m_1$  різних значень, і  $S_2^1$  містить  $k_2$  локальних екстремума, в яких функція приймає  $m_2$  різних значень, де  $m_1 \leq k_1$  та  $m_2 \leq k_2$ .*

**3.2. РСО-еквівалентність.** Нехай  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція, що задовольняє такі умови:

- $f$  є неперервною та має скінченне число локальних екстремумів;
- функції  $f|_{S_1^1}$  та  $f|_{S_2^1}$  мають точно один глобальний мінімум або максимум  $x' \in S_1^1$ ,  $x'' \in S_2^1$  та  $f(x') \neq f(x'')$ .

*Побудова інваріанту.* Починаючи з глобального мінімуму чи максимуму (а у випадку, коли один глобальний мінімум та один глобальний максимум, для однозначності будемо починати з мінімуму), що відповідає функції на колі  $S_1^1$ , рухаючись по дузі кола в обох напрямках до точки  $a$ , позначимо локальні екстремуми та утворимо послідовності  $x', x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1, a$  та  $x', x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_2}^2$ . Аналогічно, для кола  $S_2^1$ , отримаємо наступні дві послідовності  $x'', x_1^3, x_2^3, \dots, x_{n_3}^3, a$  та  $x'', x_1^4, x_2^4, \dots, x_{n_4}^4, a$ . Далі, розглянемо значення функції

$$(y_0^1 = f(x'), y_1^1 = f(x_1^1), \dots, y_{n_1+2}^1 = f(a)),$$

$$(y_0^2 = f(x'), y_1^2 = f(x_1^2), \dots, y_{n_2+2}^2 = f(a)),$$

$$(y_0^3 = f(x''), y_1^3 = f(x_1^3), \dots, y_{n_3+2}^3 = f(a)),$$

$$(y_0^4 = f(x''), y_1^4 = f(x_1^4), \dots, y_{n_4+2}^4 = f(a)).$$

Зрозуміло, що випадок, коли  $y_i^j = y_{i+1}^j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , неможливий. Тому значення  $y_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ , задовольняють таку систему нерівностей  $y_0^j \leq y_1^j \geq \dots$ . Задамо відображення  $y_i^j \rightarrow z_i^j$ , де  $z_i^j \in \mathbb{Z}^+$  і  $z_i^j$  дорівнює числу значень  $y_l^j$ , по всіх можливих значеннях числа  $j$ , таких, що  $y_l^j < y_i^j$ . Для кожного  $j$  числа  $z_i^j$  утворюють узагальнену змію  $G_j(n_j, k_j)$ . Оскільки

$$y_{n_1+2}^1 = y_{n_2+2}^2 = y_{n_3+2}^3 = y_{n_4+2}^4 = f(a),$$

ототожнимо значення

$$z_{n_1+2}^1 \sim z_{n_2+2}^2 \sim z_{n_3+2}^3 \sim z_{n_4+2}^4.$$

Позначимо отриманий інваріант через  $Sp(f)$ . Відмітимо, що дана конструкція схожа на "павука" (Рис.3): чотири змії, які мають спільну точку. Даний інваріант будується однозначно, що зумовлено розрізненням кіл  $S^1_1 \vee S^1_2$  та умовами, що накладаються на функцію.

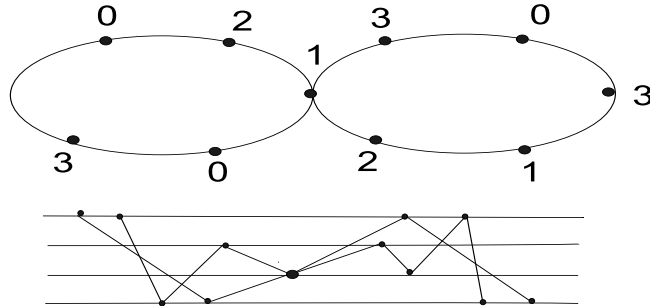


Рис. 9.  $Sp(f)$ -інваріант деякої функції.



**Означення 6.** Нехай  $Sp(f)$  складається з набору узагальнених змій  $G_1(n_1, k_1)$ ,  $G_2(n_2, k_2)$ ,  $G_3(n_3, k_3)$  та  $G_4(n_4, k_4)$ , а  $Sp(g)$  — з  $G'_1(n_1, k_1)$ ,  $G'_2(n_2, k_2)$ ,  $G'_3(n_3, k_3)$  та  $G'_4(n_4, k_4)$ , відповідно. Скажемо, що  $Sp(f)$  та  $Sp(g)$  є ізоморфними,

$$Sp(f) \sim Sp(g),$$

якщо для  $\forall j \exists i : G_j(n_j, k_j)$  співпадає з  $G_i(n_i, k_i)$ , де  $i, j = \overline{1, 4}$ .

**Теорема 2.** Дві функції  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  є PCO-еквівалентними тоді і лише тоді, коли  $Sp(f) \sim Sp(g)$ .

*Доведення. Необхідність.* Доведення випливає з побудови інваріанту для функцій  $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Достатність.* Нехай функціям  $f$  та  $g$  відповідають інваріанти  $Sp(f)$  та  $Sp(g)$  такі, що  $Sp(f) \sim Sp(g)$ . З умови випливає, що числа локальних екстремумів, які відповідають функціям  $f$  і  $g$  на кожному з кіл  $S_1^1$  та  $S_2^1$  співпадають. По аналогії з доведенням теореми 1, для функції  $f$  отримаємо чотири послідовності локальних екстремумів  $(x', x_1^j, \dots, x_{n_j}^j, a)$ ,  $j = 1, 2$ , та  $(x'', x_1^i, \dots, x_{n_i}^i, a)$ ,  $i = 3, 4$ , де  $x'$  та  $x''$  — глобальні мінімуми (максимуми) функції  $f$  на колах  $S_1^1$  та  $S_2^1$  відповідно. Для функції  $g$  утворимо  $(y', y_1^j, \dots, y_{n_j}^j, a)$ ,  $j = 1, 2$  та  $(y'', y_1^i, \dots, y_{n_i}^i, a)$ ,  $i = 3, 4$ , де  $y'$  та  $y''$  — глобальні мінімуми (максимуми) функції  $g$  на колах  $S_1^1$  та  $S_2^1$ , відповідно. Із побудови змій випливає, що існують відображення  $\varphi_1 : f(x') \rightarrow z_0^1$ ,  $\varphi_2 : f(x') \rightarrow z_0^2$ ,  $\varphi_j : f(x_i^j) \rightarrow z_i^j$ , де  $j = 1, 2$ , та  $\varphi_3 : f(x'') \rightarrow z_0^3$ ,  $\varphi_4 : f(x'') \rightarrow z_0^4$ , (нагадаємо, що  $z_0^1 = z_0^2$  та  $z_0^3 = z_0^4$ )  $\varphi_k : f(x_i^k) \rightarrow z_i^k$ , де  $k = 3, 4$ , і  $z_i^s$  — ціле додатне число та елемент інваріанту  $Sp(f)$ . Аналогічно, отримаємо  $\psi_1 : g(y') \rightarrow z_0^1$ ,  $\psi_2 : g(y') \rightarrow z_0^2$ ,  $\psi_j : g(y_i^j) \rightarrow z_i^j$ , де  $j = 1, 2$ , та  $\psi_3 : g(y'') \rightarrow z_0^3$ ,  $\psi_4 : g(y'') \rightarrow z_0^4$ , ( $z_0^1 = z_0^2$  та  $z_0^3 = z_0^4$ )  $\psi_k : g(y_i^k) \rightarrow z_i^k$ , де  $k = 3, 4$ , і  $z_i^s \in \mathbb{Z}^+$  та  $z_i^s \in Sp(g)$ .

Позначимо через  $\alpha_0^1$ ,  $\alpha_0^1$ ,  $\alpha_0^3$  та  $\alpha_0^4$  дуги  $\mathcal{S}$  між точками  $x'$  і  $x_1^1$ ,  $x'$  і  $x_1^2$ ,  $x''$  і  $x_1^3$  та  $x''$  і  $x_1^4$  відповідно, а також через  $\alpha_i^j$  дуги між  $x_i^j$  та  $x_{i+1}^j$ . Дані відображення можна легко продовжити

до гомеоморфізмів  $\tilde{\varphi} : \alpha_i^j \rightarrow z_l^j z_{l+1}^j$ , де  $z_l^j z_{l+1}^j$  – дуга інваріанту  $Sp(f)$  між точками  $z_l^j$  та  $z_{l+1}^j$ . Очевидно, що отриманий гомеоморфізм не зберігає орієнтації, оскільки рух на кожному з кіл відбувається у протилежних напрямках відносно фіксованих точок. Аналогічно, для функції  $g$  можна побудувати гомеоморфізм  $\tilde{\psi}$ .

По аналогії з доведенням теореми 1, побудуємо гомеоморфізм  $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Згідно зі сказаним вище маємо, що

$$f = h_2^{-1} \circ g \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$$

і

$$S_i^1 = \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\psi}(g^{-1}(h_2(f(S_i^1))))),$$

де  $i = 1, 2$ . □

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Коксетера // Успехи мат.наук.–1992. – Vol. 47, № 1(283). – С. 3-45.
- [2] Максименко С.И. Классификация  $m$  – функций на поверхностях // Укр. мат. журн. –1999. – Т.51, № 8. – С.1129-1135.
- [3] Пришляк А.О. Классификация трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Тр. Инст. Мат. АНУ. – Киев, 1998. - С.35-39.
- [4] Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр.мат.жур – 2003. – Т.55, № 5 – С.687-700.
- [5] Юрчук І.А. Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі // Укр.мат.журн. – 2008. – Т.60, № 6. – С.829-836.
- [6] Юрчук І.А. Топологічна еквівалентність функції з класу  $F(D^2)$  // Проблеми топології та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006.– Т.3, №3. – С. 474-486.