Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 450-459

УДК 517.9

О. А. Сівак

Національний технічний університет України "КПІ"

Про існування неперервних при $t \in R$ розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості[1]

For a system of linear difference equations, we establish conditions of the existence of its continuous solutions.

Розглянемо систему лінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in R$, $A, B(t)$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, q — деяка дійсна стала. При різних припущеннях щодо матриць $A, B(t)$ і вектора $F(t)$ окремі класи таких систем рівнянь були основним об'єктом досліджень багатьох математиків (див. [1–9] і наведену в них літературу) і в даний час цілий ряд питань їх теорії досить детально вивчені. Особливо це стосується питань існування різного роду (аналітичних, неперервних тощо) розв'язків і дослідження їх властивостей. В даній статті продовжується дослідження структури множини розв'язків системи рівнянь вигляду (1). Зокрема, встановлюються умови існування неперервних розв'язків таких систем.

Розглянемо спочатку систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{2}$$

[1]Робота частково підтримана проектом Ф 25.1/021

де A, B – дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — дійсна стала, і припустимо, що власні значення λ_i матриці A задовольняють умову:

$$0 < \lambda_i < 1, \; i = 1, ..., m \leq n.$$

В цьому випадку, як відомо, за допомогою заміни змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C — деяка стала неособлива $(n \times n)$-матриця, систему рівнянь (2) можна привести до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(qt), \tag{3}$$

де $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, ..., \Lambda_m)$, $m \leq n$, $\Lambda_i - (k_i \times k_i)$-матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq m, \; \sum_{i=1}^{m} k_i = n, \tag{4}$$

ε — достатньо мала додатна стала, $\widetilde{B} = C^{-1}BC$.

Дослідимо систему рівнянь (3) при $t \geq 0$ у випадку, коли виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1, \; i = 1, ..., m, \;\; q > 1$;
2) $\lambda_* > \lambda^{*q}, \;\; \triangle = \dfrac{\widetilde{b}}{\lambda_* - \lambda^{*q}} < 1$, де

$$\widetilde{b} = |\widetilde{B}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |\widetilde{b}_{ij}|,$$

$$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, ..., m\}, \qquad \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, ..., m\}.$$

Покажемо, що ця система має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{5}$$

де $y_i(t)$, $i=0,1,...,$ — деякі неперервні вектор-функції. Підставляючи (5) в (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \widetilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i=0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(t+1) = \Lambda y_0(t), \tag{6_0}$$

$$y_i(t+1) = \Lambda y_i(t) + \widetilde{B} y_{i-1}(qt), \qquad i=1,2,..., \tag{6_i}$$

то ряд (5) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Дослідження системи рівнянь (6_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$y_0^i(t+1) = \Lambda_i y_0^i(t), \;\; i=1,...,m, \;\; m \le n, \tag{6_0^i}$$

де $y_0^i = (y_1^i, ..., y_{k_i}^i)$, $i=1,...,m$. Згідно з умовою 1 та з врахуванням (4) можна показати, що при достатньо малих ε існують додатні сталі α_*, α^* такі, що $\alpha_* < 1$, $\alpha^* < 1$, $|\Lambda^{-1}| \le \alpha_*^{-1}$, $|\Lambda| \le \alpha^*$ і має місце умова

$2'$) $\alpha_* > \alpha^{*q}$, $\widetilde{\triangle} = \dfrac{\widetilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} < 1$.

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (6_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|y_0(t)| \le M\alpha^{*t}. \tag{7_0}$$

Оскільки ряди

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \; \widetilde{B} \; y_{i-1}(q(t+j)), \qquad i=1,2,..., \tag{7_i}$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (6_i), $i=1,2,...,$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (7_i), $i=1,2,...,$ в (6_i), $i=1,2,...$), то приймаючи до уваги (7_0) і умови 1, $2'$ покажемо, що ряди (7_i), $i=1,2,...,$

рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ має місце оцінка

$$|y_i(t)| \leq M\widetilde{\triangle}^i \alpha^{*qt}. \tag{8}$$

Справді, враховуючи (7_0), (7_1) і $|\Lambda^{-1}| < \alpha_*^{-1}$, отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} \ |\widetilde{B}| \ |y_0(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_*^{-(j+1)} \ \widetilde{b} \ M\alpha^{*q(t+j)} \leq M \ \widetilde{b} \ \alpha_*^{-1} \alpha^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q})^j \leq$$

$$\leq M \frac{\widetilde{b}}{\alpha_*(1 - \alpha_*^{-1} \alpha^{*q})} \ \alpha^{*qt} \leq M \frac{\widetilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} \ \alpha^{*qt} = M\widetilde{\triangle} \ \alpha^{*qt},$$

тобто оцінка (8) має місце при $i = 1$. Міркуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (8) вже доведена для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i + 1$. Згідно з (7_{i+1}) і (8) маємо

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} \ |\widetilde{B}| \ |y_i(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_*^{-(j+1)} \ \widetilde{b} \ M\widetilde{\triangle}^i \alpha^{*q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq M \ \widetilde{\triangle}^i \ \widetilde{b} \alpha_*^{-1} \alpha^{*q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q^2})^j \leq$$

$$\leq M\widetilde{\triangle}^i \ \widetilde{b} \alpha_*^{-1} \alpha^{*qt} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_*^{-1} \alpha^{*q})^j \leq$$

$$\leq M\widetilde{\triangle}^i \frac{\widetilde{b}}{\alpha_* - \alpha^{*q}} \ \alpha^{*qt} = M\widetilde{\triangle}^{i+1} \alpha^{*qt}.$$

Отже, оцінка (8) виконується при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$. Звідси випливає, що ряди (7_i), $i = 1, 2, ...$, рівномірно збігаються при

$t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, ...,$ для яких має місце оцінка (8). В силу (8) ряд (5) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $y(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (3) і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \widetilde{\triangle}}\ \alpha^{*t}.$$

Звідси безпосередньо випливає, що

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0.$$

Цим самим доведена така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.*

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B} y(qt) + F(t), \tag{9}$$

де матриці Λ, $\widetilde{B}$ задовольняють умови теореми 1, а

$$F(t) : R \to R^n.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, ..., m$, $q > 1$;
2) $\dfrac{\widetilde{b}}{1 - \alpha^*} = \theta < 1$;
3) *всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і*

$$\sup_t |F(t)| = \overline{M} < \infty\,.$$

Тоді система рівнянь (9) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$\overline{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t), \tag{10}$$

де $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (10) в (9), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(t) + \widetilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \overline{y}_i(qt) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\overline{y}_0(t+1) = \Lambda \overline{y}_0(t) + F(t), \tag{11_0}$$

$$\overline{y}_i(t+1) = \Lambda \overline{y}_i(t) + \widetilde{B} \overline{y}_{i-1}(qt), \ i = 1, 2, ..., \tag{11_i}$$

то ряд (10) є формальним розв'язком системи рівнянь (8).

Приймаючи до уваги умови теореми можна переконатися, що ряд

$$\overline{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} F(t-j) \tag{12_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (11_0) і виконується оцінка

$$|\overline{y}_0(t)| \leq \frac{\overline{M}}{1-\alpha^*} = \overline{M}'. \tag{13_0}$$

Враховуючи (13_0), послідовно можна показати, що ряди

$$\overline{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B} \overline{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, ..., \tag{12_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (11_i), $i = 1, 2, ...,$ і для них мають місце оцінки

$$|\overline{y}_i(t)| \leq \overline{M}' \theta^i, \quad i = 1, 2, ... \, . \tag{13_i}$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $\overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...$, що визначаються за допомогою співвідношень (12_i), $i = 0, 1, ...$, задовольняють умови (13_i), $i = 0, 1, ...$, то ряд (10) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $\overline{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (9) і задовольняє умові

$$|\overline{y}(t)| \leq \frac{\overline{M}'}{1-\theta} \ .$$

Теорема 2 доведена. □

Зауваження. Виконуючи в (9) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t), \tag{14}$$

отримаємо систему рівнянь (3) відносно вектор-функції $z(t)$. Оскільки для цієї системи рівнянь має місце теорема 1, то приймаючи до уваги заміну змінних (14), умови теореми 2, можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків $y(t)$ системи рівнянь (9), для яких справедливе співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \overline{y}(t)| = 0.$$

Дослідимо тепер структуру множини неперервних розв'язків системи рівнянь (9) у випадку, коли $\widetilde{B} = \widetilde{B}(t)$, тобто розглянемо систему рівнянь

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \widetilde{B}(t) y(qt) + \widetilde{F}(t), \tag{15}$$

де $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, ..., \Lambda_m)$, $m \leq n$, $\Lambda_i-(k_i \times k_i)$-матриці, $i = 1, ..., m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, $q-$деяка стала, $\widetilde{B}(t) : R \to R^{n^2}$, $\widetilde{F}(t) : R \to R^n$.

Має місце така теорема.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, ..., m$, $q > 1$;
2) *всі елементи матриці* $\widetilde{B}(t)$ *і вектор-функції* $\widetilde{F}(t)$ *є неперервними обмеженими при всіх* $t \in R$ *функціями і* $\sup\limits_t |\widetilde{B}(t)| = b^*$, $\sup\limits_t |\widetilde{F}(t)| = f^*$;

3) $\dfrac{b^*}{1-\alpha^*} = \theta^* < 1$.

Тоді система рівнянь (15) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t), \tag{16}$$

де $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Доведення. Дійсно, підставляючи (16) в (15), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t+1) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{B}(t) \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{y}_i(qt) + \widetilde{F}(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\widetilde{y}_0(t+1) = \Lambda \widetilde{y}_0(t) + \widetilde{F}(t), \tag{17_0}$$

$$\widetilde{y}_i(t+1) = \Lambda \widetilde{y}_i(t) + \widetilde{B}(t) \widetilde{y}_{i-1}(qt), \ i = 1, 2, ... \ , \tag{17_i}$$

то ряд (16) є формальним розв'язком системи рівнянь (15).

В силу умов теореми ряд

$$\widetilde{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{F}(t-j) \tag{18_0}$$

рівномірно збігається при $t \in R$ до деякого неперервного розв'язку системи рівнянь (17_0), який задовольняє умову

$$|\widetilde{y}_0(t)| \leq \frac{f^*}{1-\alpha^*} = \widetilde{f}^*. \tag{19_0}$$

Приймаючи до уваги (17_i), $i = 1, 2, ...,$ умови теореми і співвідношення (19_0), можна послідовно показати, що ряди

$$\widetilde{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{j-1} \widetilde{B}(t-j) \widetilde{y}_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, ... \ , \tag{18_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$ до деяких неперервних вектор-функцій $\widetilde{y}_i(t)$, $i = 1, 2, ...$, які є розв'язками відповідних систем рівнянь (17_i), $i = 1, 2, ...$, і задовольняють умови

$$|\widetilde{y}_i(t)| \leq \widetilde{f}^* \theta^{*i}, \ i = 1, 2, \dots \ . \qquad (19_i)$$

Приймаючи до уваги співвідношення (19_i), $i = 0, 1, ...$, і умови теореми, приходимо до висновку, що ряд (16) рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \in R$ вектор-функції $\widetilde{y}(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (15) і задовольняє умові

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \frac{\widetilde{f}^*}{1 - \theta^*}.$$

Теорема 3 доведена. □

Виконуючи в (15) взаємно-однозначну заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \widetilde{y}(t), \qquad (20)$$

отримаємо систему рівнянь

$$z(t+1) = \Lambda z(t) + \widetilde{B}(t) z(qt), \qquad (21)$$

для якої має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови 1, 2 теореми 3 і умова*

3) $\dfrac{b^*}{\alpha_* - \alpha^{*q}} = \widetilde{\theta}^* < 1.$

Тоді система рівнянь (21) має сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, які задовольняють умову

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0.$$

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1.

Література

[1] *Birkhoff G.D.* General theory of linear difference equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1911. - 12. - P. 243–284.

[2] *Birkhoff G.D.* Formal theory of irregular linear difference equations // *Acta Math.* - 1930. - 54. - P. 205–246.

[3] *Trjitzinsky W.J.* Analytic theory of linear q-difference equations // *Acta Math.* - 1933. - 61. - P. 1–38.

[4] *Adams C.R.* On the irregular cases of linear ordinary difference equations // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1928. - 30. - № 3. - P. 507–541.

[5] *Carmichael R.D.* linear difference equations and their analytic solutions // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1911. - 12. - P. 99–134.

[6] *Kuczma M.* Functional equations in a single variable. - *Warsawa*, 1968.

[7] *Миролюбов А.А., Солдатов М.А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. - М.: Наука, 1986. - 128 с.

[8] *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения, Киев: Наук. думка, 1986ю - 280 с.

[9] *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. РАН. - 2006. - Т. 407, № 5. - С. 600–603.