Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 440-449

К. І. Міщенко

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: `mischenko.katya@gmail.com`

О. О. Пришляк

Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ
E-mail: `prishlyak@yahoo.com`

Топологічна класифікація некомпактних поверхонь з краєм

We give a topological classification of nonconpact surfaces with a boundary

Ключові слова: *некомпактні поверхні,поверхні з краєм, топологічна класифікація*

Вступ. Теорема класифікації компактних поверхонь є одним з найважливіших результатів теорії компактних просторів. Перша спроба класифікувати некомпактні поверхні з'явилася у роботах Керекьярто (Німеччина, початок 20 століття) [1] та Річардса (США, 1961р.) [2], але було розглянуто лише випадок поверхонь без краю. При роботі з некомпактними поверхнями вводиться поняття ідеальної межі поверхні та її кінців. В роботах Керекьярто [1] висвітлено ключові моменти та особливості роботи з некомпактними многовидами, але повної класифікації некомпактних поверхонь не наведено. Далі, Ян Річардс (США, 1961р.) довів [2], що дві некомпактні поверхні є гомеоморфними тоді і тільки тоді, коли їх ідеальні межі топологічно еквівалентні. Також він довів, що будь-який диз'юнктний компактний сепарабельний простір є ідеальною межею деякої некомпактної поверхні. І досі актуальним є питання отримання топологічної класифікації некомпактних поверхонь з краєм. В даній роботі дано повну топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю. Окремо розглянуто випадок скінченної та нескінченної кількості компонент краю. Класифікуючи поверхні за їх типом орієнтованості та родом, можна описати характеристичні властивості ідеальних меж некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю.

Базуючись на результатах Керекьярто [1] та Річардса [2], основною задачею тут є класифікація некомпактних поверхонь з краєм. Некомпактні поверхні зі скінченним числом компонент краю та їх топологічна класифікація вивчались в роботі [3]. Узагальнення ситуації на довільне число компонент краю поверхні розглянуто в даній роботі, також тут дано топологічну класифікацію таких поверхонь.

1. Основні поняття та означення

Означення 1. *Граничною компонентою, або кінцем поверхні, S називатимемо послідовність зв'язних необмежених відкритих множин в даній топології на S : $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ таких, що виконуються умови:*

(1) *межа P_n в S є компактною для будь-якого $n \geq 1$;*
(2) *для довільної компактної множини $A \subset S$ та достатньо великого n виконується: $P_n \cap A = \varnothing$.*

Означення 2. *Дві граничних компоненти $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ та $Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots$ називаються еквівалентними, якщо $\forall n \in N$ $\exists N$ таке, що $P_N \subset Q_N$ та навпаки.*

За даною компонентою $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ визначимо клас еквівалентності граничних компонент, який їй відповідає. Клас еквівалентності, який містить граничну компоненту $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$, позначимо через $p*$.

Означення 3. *Ідеальною межею, або множиною кінців $B(S)$ некомпактної поверхні S назвемо топологічний простір, елементами якого є побудовані вище класи еквівалентності граничних компонент в S.*

Означення 4. *Назвемо точку $p*$ планарною, якщо для всіх її достатньо малих відкритих околів U перетин $U \cap S$ гомеоморфний підмножині площини.*

Означення 5. *Назвемо точку $p*$ орієнтованою, якщо для всіх її достатньо малих відкритих околів U перетин $U \cap S$ орієнтований.*

Позначимо через $B(S)''$ підмножину всіх непланарних точок з $B(S)$, та через $B(S)'$ підмножину всіх неорієнтованих точок з $B(S)$. З означень зрозуміло, що $B(S)'$ та $B(S)''$ є відкритими підмножинами компактного цілком незв'язного метричного простору $B(S)$ та $B(S) \supset B(S)' \supset B(S)''$.

2. Некомпактні поверхні зі скінченним числом компонент краю

Розглянемо некомпактні поверхні зі скінченним числом компонент краю. Компоненти краю можуть бути як компактними, так і некомпактними. Кола можна стягнути в точку або заклеїти диском. Інтервали можна представити у вигляді кіл, з яких відкинуто скінченне число точок; отримані кола заклеїти дисками, але на границях цих дисків потрібно відмітити відкинуті точки:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots.$$

Таким чином, ми отримаємо поверхню без краю, до якої (за умов, що вихідні поверхні мають однакову кількість заклеєних дисків та на кожній границі таких дисків кількість виколотих точок скінченна та однакова) можна застосувати теорему Річардса [2]. У роботі [3] доведено теорему.

Теорема 1. *Диск з виколотою точкою на границі гомеоморфний диску із виколотим відрізком на границі.*

За результатами теореми 1.1 край вихідної некомпактної поверхні складається з дисків із виколотими точками на границі або з інтервалів.

Теорема 2. *Нехай $q*$ — кінець, що належить краю некомпактної поверхні N. Тоді існує точно дві граничні компоненти, які примикають до $q*$, та для яких він є граничною точкою.*

За теоремою 1.2 всі відрізки з краю можна з'єднувати, в результаті отримавши коло. Оскільки для кожного кінця існує своя пара граничних компонент, то порядок з'єднання встановлено точно. З теорем 1.1 та 1.2 випливає, що компоненти краю та крайові кінці можна розбити на групи так, що одну групу складає циклічна послідовність, складена з кінців і компонентів краю, в якій два довільні сусідні елемента є компонента краю і граничний до неї кінець. Отриману послідовність граничних компонент та компонент краю називатимемо крайовим циклом. Стягнувши крайові цикли до точок або заклеївши їх дисками, ми отримаємо некомпактну поверхню без краю. Таким чином, класифікація некомпактних поверхонь зі скінченним числом компонент краю зводиться до класифікації некомпактних поверхонь без краю.

Теорема 3. *Дві некомпактні поверхні S_1 та S_2 із скінченним числом компонент краю є гомеоморфними тоді і тільки тоді, коли вони:*

(1) *мають однакову кількість заклеєних дисків;*
(2) *мають однакову (скінченну) кількість виколотих точок на кожній своїй границі;*
(3) *мають однаковий рід та клас орієнтованості;*
(4) *крім того, існує гомеоморфізм $B(S_1)$ на $B(S_2)$, який відображає $B'(S_1)$ та $B''(S_1)$ в $B'(S_2)$ та $B''(S_2)$ відповідно.*

Повне доведення теорем 1 – 3 наведено у роботах [3, 4].

3. Некомпактні поверхні з довільним числом компонент краю

Розглянемо некомпактні поверхні з довільним числом компонент краю. Для проведення класифікації перш за все потрібно класифікувати кінці, які лежать на краю.

Позначимо через C множину тих кінців, які лежать на краю поверхні. Множину C так само, як і $B(S)$ ми розбиваємо на підмножини непланарних та неорієнтованих кінців C' та C'' і розглядатимемо в подальшому пари (B, C), $(B',\ C')$ та $(B'',\ C'')$. Суміжними називатимемо такі два кінці, між якими знайдеться компонента краю, кінцями якої вони є. Будемо вважати, що кінці належать одному і тому ж класу еквівалентності, якщо їх можна попарно з'єднати між собою послідовністю суміжних кінців. У випадку нескінченної кількості компонент краю крайові цикли можуть бути нескінченними. Відношення еквівалентності граничних компонент на множинах C' та C'' вводиться так само, як для кінців на C. Таке відношення еквівалентності породжує фактор-простір $D = C/\sim$. Назвемо D множиною крайових циклів. Вона являє собою множину кіл з виколотими точками.

Лема 1. *Об'єднання крайових кінців можна представити як кола з вкладеними в них підмножинами канторової множини, що є множинами крайових кінців.*

Доведення. За побудовою множина крайових кінців є цілком незв'язною. Отже, вона гомеоморфна підмножині канторової множини. Лему доведено. □

4. Класифікація некомпактних поверхонь з краєм

Використаємо наступну конструкцію. Нехай S — некомпактна сепарабельна поверхня з краєм. Компоненти краю α_k можна організувати у кола із виколотими точками. Відкинувши край поверхні S, отримуємо некомпактну поверхню без краю. Для класифікації таких поверхонь слід застосувати теорему Річардса [2]: внутрішності поверхонь гомеоморфні та існують послідовності компактних замкнених поверхонь F_k, кожна наступна з яких містить попередню: $\forall k \geq 1 : F_k \subset F_{k+1}$.

Оскільки зв'язна компактна обмежена поверхня топологічно визначена орієнтованістю, родом і кількістю граничних кривих, то, пов'язавши кожну з компактних поверхонь F_k з компонентами α_k, ми отримаємо можливість класифікувати некомпактні поверхні з краєм: до кожної підповерхні F_k приклеїмо смужки, які будуть неперервно з'єднувати її з компонентою α_k (рис. 1).

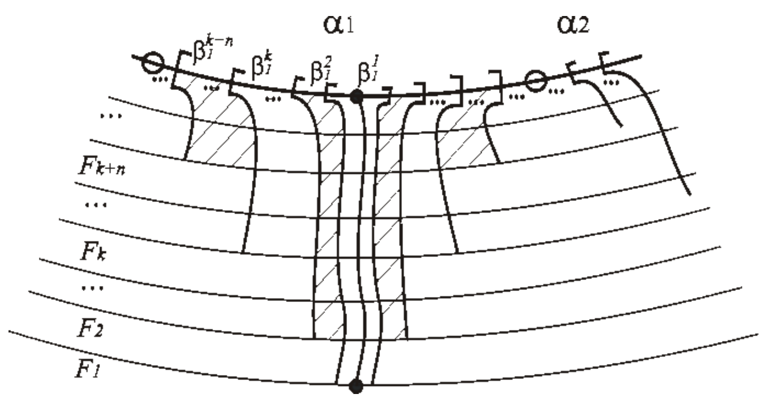

Рис. 1.

Оскільки на колі розміщені виколоті точки, то це коло можна представити границею послідовності об'єднань замкнених відрізків. Так, наприклад, для компоненти краю α_k існує

$$\{\beta_k^i,\ i \geq 1\} \xrightarrow{i\to\infty} \alpha_k.$$

Тоді існує послідовність об'єднань скінченного числа β_k^i :

$$\left\{ \bigcup_{k,\,i} \beta_k^i,\ i \geq 1 \right\}.$$

Фіксуючи номери цих відрізків, починаючи з найменшого, приклеювання проведемо в такий спосіб (рис. 1): з'єднаємо неперервним шляхом перший відрізок з першою (найменшою) підповерхнею F_1. Вимагатимемо, щоб шлях перетинав край кожної поверхні F_k трансверсально в одній точці.

Щоб отримати поверхню з краєм, не порушуючи загальності, розширюємо цей шлях до замкненого околу. Для уникнення невизначеності в подальшому приклеюванні, перший раз точка на поверхні обирається довільним чином, а кожен наступний раз – у відповідності до побудованих множин D та D'. Неважко зробити так, щоб кожний наступний окіл шляху, що з'єднує чергову виколоту точку на колі з підповерхнею з відповідним номером, містив попередній. На кожному етапі приклеювання смужок ми маємо скінченну кількість відрізків.

Лема 2. *Нехай для певного k існує два шляхи γ_1 та γ_2, що з'єднують поверхню F_k з відповідною компонентою краю. Тоді поверхні, отримані приклеюванням стрічок за цими шляхами є гомеоморфними.*

Доведення. За побудовою кожний шлях перетинає край трансверсально, тоді, не порушуючи загальності, можемо вважати, що шляхи γ_1 та γ_2 співпадають в деякому околі компоненти краю (рис. 2):

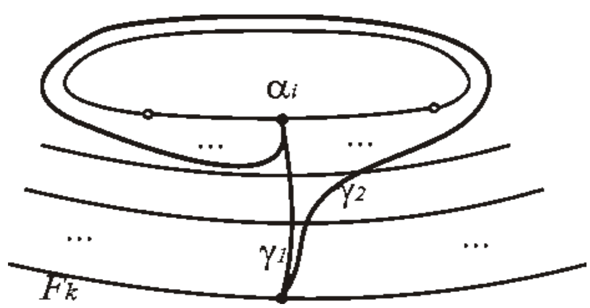

Рис. 2.

Отже, існує такий номер $n \in N$, що шляхи γ_1 та γ_2 не будуть співпадати на $M = F_{k+n} \backslash F_n$. Це означає, що існує гомеоморфізм цієї множини на саму себе, який переводить γ_1 в γ_2: φ*:* $M \to M$: $\varphi(\gamma_1) = \gamma_2$. Лему доведено. □

Отже, між двома довільними виколотими точками на колі, кожен замкнений відрізок неперервним шляхом з'єднаний із відповідною підповерхнею F_k. Переходячи до границі, ми отримаємо вихідну некомпактну поверхню з краєм як границю компактних поверхонь з краєм.

Лема 3. *Побудована в конструкції послідовність поверхонь з краєм з приклеєними смужками збігається до некомпактної поверхні S.*

Доведення. Позначимо побудовану послідовність поверхонь з краєм з приклеєними смужками через $F_k^{\wedge}$. Тоді $\forall\ k \geq 1$*:* $F_k \subset F_k^{\wedge}$. А отже

$$\lim_{k\to\infty} F_k \subset \lim_{k\to\infty} F_k^{\wedge}.$$

В свою чергу

$$\lim_{k\to\infty} F_k = Int\ S \subset \lim_{k\to\infty} F_k^{\wedge}.$$

За побудовою $F_k^{\wedge}$ містить кожну компоненту краю. Таким чином, об'єднання компонент краю з внутрішністю поверхні S і дає поверхню S. Лему доведено. □

Якщо S_1 та S_2 — дві некомпактні сепарабельні поверхні з краєм, то, щоб встановити між ними гомеоморфізм, на поверхні S_1 всі шляхи слід будувати довільним чином з вимогою того, що якщо шлях виходить із краю поверхні F_k , то він повинен перетинати край кожної поверхні $F_n (n>k)$ трансверсально в одній точці, а на поверхні S_2 шляхи будуються наступним чином: перший — довільно, решта шляхів обирається так, щоб криволінійні чотирикутники, утворені частинами країв поверхонь F_k і частинами цього шляху та раніше побудованих шляхів, були границями областей, гомеоморфних відповідним областям поверхні S_1. Тобто, вони повинні мати однакове число кінців, ручок або листів Мьобіуса (рис. 3):

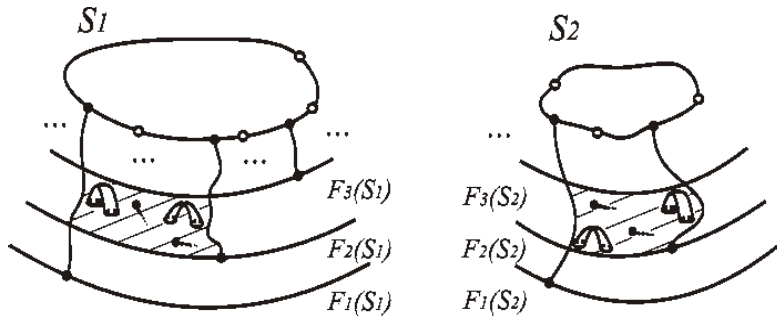

Рис. 3.

Теорема 4. *Некомпактні сепарабельні поверхні з краєм S_1 та S_2 є гомеоморфними між собою тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий рід, один клас орієнтованості та існує гомеоморфізм, який відображає $B(S_1)$ на $B(S_2)$, $D(S_1)$ на $D(S_2)$, $C(S_1)$ на $C(S_2)$, $B'(S_1)$ на $B'(S_2)$, $D'(S_1)$ на $D'(S_2)$, $C'(S_1)$ на $C'(S_2)$, $B''(S_1)$ на $B''(S_2)$, $D''(S_1)$ на $D''(S_2)$, $C''(S_1)$ на $C''(S_2)$.*

Доведення. Необхідність. Якщо некомпактні сепарабельні поверхні з краєм є гомеоморфними, то вони мають однаковий род, один клас орієнтованості і існує гомеоморфізм, який відображає всі вказані множини однієї поверхні на такі ж самі множини іншої поверхні.

Достатність. Нехай є дві некомпактні сепарабельні поверхні з краєм S_1 та S_2, які мають однаковий рід, один клас орієнтованості та існує гомеоморфізм, який відображає $B(S_1)$ на $B(S_2)$, $D(S_1)$ на $D(S_2)$, $C(S_1)$ на $C(S_2)$, $B'(S_1)$ на $B'(S_2)$, $D'(S_1)$ на $D'(S_2)$, $C'(S_1)$ на $C'(S_2)$, $''(S_1)$ на $B''(S_2)$, $D''(S_1)$ на $D''(S_2)$, $C''(S_1)$ на $C''(S_2)$. Застосуємо до них конструкцію. За лемою 2 поверхні $F_k^1\,\hat{}$ та F_k^1 є гомеоморфними, як і $F_k^2\,\hat{}$ та F_k^2. Тоді за лемою 3 послідовності $\{F_k^1\,\hat{}, k \geq 1\} \to S_1$, $\{F_k^2\,\hat{}, k \geq 1\} \to S_2$ та

$\forall k \geq 1\ F_k \subset F_{k+1}$. Отже, існує $f_k : F_k^{1\,\hat{}} \to F_k^{2\,\hat{}}$ та послідовність гомеоморфізмів $\{f_k,\ k \geq 1\}$ задає гомеоморфізм $f : S_1 \to S_2$, де $f = \lim\limits_{k \to \infty} f_k$. Теорему доведено. □

Висновок. В даній роботі побудовано класифікацію некомпактних поверхонь з краєм з використанням результатів Керекьярто [1] та Річардса [2]. Детально розглянуто узагальнення ситуації на довільне число компонент краю поверхні. За допомогою впровадженої конструкції, доведено теорему 4, яка представляє топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з довільним числом компонент краю. Основним результатом роботи є теорема про топологічну класифікацію некомпактних поверхонь з краєм (теорема 4). Дані результати можуть бути застосовані у комплексному аналізі та теорії гармонічних функцій.

Література

[1] *Kerékjártó B.* Vorlesungen über Topologie // Verlag von Julius Berlin, Springer, 1923. – 270 p.

[2] *Richards I.* On the classification of noncompact surfaces // Trans AMS. – 1963. – Vol.106, №2. – P. 259-269.

[3] *Міщенко К.І., Пришляк О.О.* Класифікація некомпактних поверхонь зі скінченною кількістю компонент краю // Вісник Київ. ун-ту.Серія: Математика. Механіка. – 2004. – Вип. 11-12. – С. 89-91.

[4] *Міщенко К. І., Пришляк О. О.* Повний топологічний інваріант функцій із скінченним числом особливостей на класичних некомпактних поверхнях // Вісник Київ. ун-ту.Серія: Математика. Механіка. – 2006. – Вип. 15-16. – С. 83-85.

[5] *Ahlfors L. V., Sario L.* Riemann surfaces – N. J.: Princeton University Press, 1960. – 382 pp.

[6] *Brahana H. R.* Systems of circuits on two-dimentional manifolds // Ann. Of Math. – 1921. – №23. – P. 144-168.