Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 373-389

УДК 517.5

И. Ю. Власенко

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: `vlasenko@imath.kiev.ua`

Особенности динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов

Trokhimchuk inner mappings are continuous open isolated endomorphisms. The paper consider the Trokhimchuk inner mappings with infinite number of preimages from a dynamical systems view. Examples given that shows an essential difference from the dynamics of inner mappings with finite number of preimages.
A subclass of Trokhimchuk inner mappings is defined. It is shown that its dynamical properties are similar to ones of inner mappings with finite number of preimages and results on orbit structure are obtained.

Ключевые слова: *inner epimorphism, dynamics*

1. Введение

С точки зрения динамических систем, эпиморфизмы, внутренние по Трохимчуку, выделяются из прочих эпиморфизмов наличием инвариантных множеств рекуррентных и неблуждающих точек, возможностью рассматривать частные траектории точек вспять во времени.

В работе рассмотрены различные патологии динамики бесконечнократных внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов, и указан достаточно широкий подкласс внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов, равномерных на прообразах, для которых указанные патологии не возникают, и динамическое поведение сходно с конечнократными эпиморфизмами, внутренними по Трохимчуку.

Естественно, что динамика бесконечнократных внутренних отображений имеет свои особенности, которые не возникают для конечнократных отображений. В то время как классы конечнократных внутренних отображений по Стоилову и по Трохимчуку совпадают, это не так для бесконечнократных отображений.

Как известно, отображения замкнутых двумерных поверхностей, внутренние по Стоилову, являются топологическим аналогом аналитических функций. Однако вне этого класса пространств отображения, внутренние по Стоилову, могут вести себя достаточно плохо. Поэтому при рассмотрении на абстрактных пространствах вместо класса внутренних отображений по Стоилову рассматривают его подкласс отображений, внутренних по Трохимчуку.

В данной работе внутренние отображения рассмотрены с точки зрения динамических систем. Построены примеры, которые показывают, что бесконечнократные внутренние по Трохимчуку (и тем более по Стоилову) эпиморфизмы в своих динамических свойствах существенно отличаются от конечнократных внутренних эпиморфизмов. Показано, что условие эпиморфности и равномерной непрерывности на прообразах выделяет из класса внутренних по Трохимчуку эпиморфизмов подкласс внутренних эпиморфизмов, свойства которых с точки зрения динамических систем подобны свойствам конечнократных внутренних эпиморфизмов.

Будем полагать, что рассматриваемый бесконечнократный внутренний эпиморфизм $f\colon M \to M$ задан на локально связном метризуемом пространстве M (в частности, полное метрическое пространство является локально связным). Это условие техническое. Оно удобно для упрощения дальнейших рассуждений, поскольку у отображения на таком пространстве прообраз окрестности естественно и единственным образом распадается на компоненты связности.

Эти же рассуждения можно пытаться перенести и на случай, когда пространство не является локально связным, воспользовавшись тем, что отображение изолированно, поэтому найдутся окрестности, которые отделяют точки прообраза друг от друга. Однако это усложняет рассуждения и делает их чересчур громоздкими. Поэтому в рассуждениях ограничимся только случаем локально связного метризуемого пространства.

2. Предварительные сведения

2.1. **Множества траекторий.** Пусть M — метризуемое топологическое пространство и $f : M \to M$ — непрерывный эпиморфизм.

Определение 1. *Отображение f называется открытым, если образ любого открытого множества открыт.*

Определение 2. *Отображение f называется нульмерным, если прообраз любого нульмерного множества нульмерен.*

Определение 3. *Отображение f называется внутренним (interor) по Стоилову, если оно нульмерно и открыто.*

Пусть $O_f^+(x)$ — положительная полутраектория точки x, т. е. множество $\{f^n(x) |\ n \geq 0\}$. Обозначим через $O_f^-(x)$ отрицательную полутраекторию точки x, т. е. множество $\{f^n(x) |\ n < 0\}$. Определение $O_f^-(x)$ корректно, так как мы предполагаем, что f — эпиморфизм.

Отметим, что по определению $O_f^+(x)$ состоит из точек, в то время как в общем случае уже $\{f^{-1}(x)\}$ представляет собой ничто большее чем замкнутое множество. Однако, если f — нульмерное отображение, то в таком случае естественно воспринимать отрицательную полутраекторию точки x как набор различных точек.

Определение 4. *Полной траекторией $O_f(x)$ точки x назовем множество $\cup_{y \in O_f^+(x)} O_f^-(y)$.*

Определение 5. *Частной траекторией $o_f(x)$ точки x назовем произвольное множество вида*

$$\{x_i|f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}, x_0 = x\}.$$

Если $i \leq 0$, то будем говорить о частной отрицательной траектории. Заметим, что частная положительная траектория всегда совпадает с обычной положительной траекторией.

2.1.1. *Изолированные отображения.*

Определение 6. *Отображение f называется изолированным, если прообраз точки состоит из изолированных точек.*

Замечание 1. *Изолированное отображение нульмерно.*

Определение 7. *Отображение f называется внутренним (interor) по Трохимчуку, если оно открыто и изолированно.*

Заметим, что, вообще говоря, произвольное внутреннее по Стоилову отображение может и не быть изолированным.

Для примера рассмотрим множество A, состоящее из стандартного Канторова множества на отрезке $[0, 1]$ и изолированной точки $\{2\}$. Внутренний эпиморфизм A в себя, заданный формулой $f(x) = \min\{3x, 2\}$, очевидно, не является изолированным в точке $\{2\}$.

Лемма 1. *Если M — компакт, а f является изолированным в x, то f^{-1} имеет в x конечное число прообразов.*

Доказательство. Предположим от противного, что f^{-1} имеет в x бесконечное число прообразов. Поскольку M — компакт, $f^{-n}(x)$ содержит сходящуюся к некоторой точке p подпоследовательность p_i. Поскольку $f^n(p_i) = x$, то по непрерывности $f^n(p) = x$. Но произвольная окрестность точки p содержит точки подпоследовательности p_i. Получили противоречие. □

2.2. **Рекуррентные точки.** Определим для каждой точки x ω-предельное множество $\omega(x)$ и α-предельное множество $\alpha(x)$:

$$\omega(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^n(x)} \qquad \alpha(x) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{N}^{+\infty} f^{-n}(x)}$$

Заметим, что по определению эти множества замкнуты.

Определение 8. *Назовем точку x ω-(α-) **рекуррентной**, если $x \in \omega(x)$ (соответственно, $x \in \alpha(x)$).*

Обозначим через $\mathrm{Rec}_+(f)$ множество ω-рекуррентных точек, через $\mathrm{Rec}_-(f)$ множество α-рекуррентных точек, и через

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Rec}_+(f) \cup \mathrm{Rec}_-(f)$$

— множество всех рекуррентных[1] точек.

Обозначим через $\mathrm{Lim}(f) = \mathrm{Lim}_+(f) \cup \mathrm{Lim}_-(f)$ *предельное множество* f, объединение ω-предельных множеств и α-предельных множеств всех точек. Легко видеть, что

$$\mathrm{Rec}(f) \subset \mathrm{Lim}(f).$$

Лемма 2. *Пусть $f : M \to M$ — внутренний эпиморфизм. Тогда если x — ω-(α-)рекуррентная точка, то ее положительная полутраектория $O_f^+(x)$ состоит из ω-(α-)рекуррентных точек.*

Если $f : M \to M$ — внутренний эпиморфизм, то множества ω-(α-)рекуррентных и рекуррентных точек f — инвариантны ([7]).

2.2.1. *Неблуждающие точки.* Далее и всюду под окрестностью точки мы будем понимать открытое множество, содержащее эту точку.

[1]Такое определение рекуррентности называется еще рекуррентностью по Готтшалку и Хедлунду,

Определение 9. *Точка $x \in M$ называется **ω-блуждающей** точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m > 0$.*

Определение 10. *Точка $x \in M$ называется **ω-неблуждающей** точкой f, если для любой ее окрестности U найдется такое $m > 0$, что $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$.*

Определение 11. *Точка $x \in M$ называется **α-неблуждающей** точкой f, если для любой ее окрестности U найдется число $l > 0$, такое, что $f^{-l}(U) \cap U \neq \varnothing$*

Определение 12. *Точка $x \in M$ называется **α-блуждающей** точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^{-l}(U) \cap U = \varnothing$ для всех $l > 0$.*

Заметим, что эти определения являются взаимно дополнительными. Другими словами, если точка не является ω- (α-) блуждающей, то она является ω-(α-)неблуждающей и наоборот.

Определение 13. *Точка $x \in M$ называется **блуждающей** точкой f, если она одновременно ω- и α- блуждающая.*

Определение 14. *В противном случае точка $x \in M$ называется **неблуждающей** точкой f.*

Множество блуждающих точек f обозначим через $W(f)$. Это множество открыто в M, поскольку каждая блуждающая точка входит в блуждающее множество вместе со своей окрестностью. Точки, не являющиеся блуждающими в смысле определения 13, являются неблуждающими. Множество неблуждающих точек f обозначим $\Omega(f)$. Оно замкнуто в M как дополнение к $W(f)$.

Поскольку периодическая точка является частным случаем неблуждающей точки, то множество $\mathrm{Per}(f)$ периодических точек содержится в $\Omega(f)$.

2.3. **Локальные эпиморфизмы.** Пусть X — локально связное топологическое пространство.

Определение 15. *Мы назовем отображение f* ***полным локальным эпиморфизмом в точке*** *x, если найдется такая окрестность $U(x)$ точки x, что на каждой из компонент связности прообраза окрестности $U(x)$ отображение f является эпиморфизмом.*

$U(x)$ будем называть **окрестностью полной локальной эпиморфности f в точке x**.

Отметим несколько тривиальных следствий этого определения.

Следствие 1. *Если f является полным локальным эпиморфизмом в точке x, то f является полным локальным эпиморфизмом и во всей окрестности полной локальной эпиморфности f в точке x.*

Следствие 2. *Если отображение f является полным локальным эпиморфизмом в точке x с окрестностью полной локальной эпиморфности $U(x)$, то для каждой подокрестности $U'(x) \subset U(x)$ точки x на каждой из компонент связности прообраза окрестности $U'(x)$ отображение f тоже будет эпиморфизмом.*

Определение 16. *Мы назовем отображение f* ***полным локальным эпиморфизмом****, если оно является полным локальным эпиморфизмом в каждой точке.*

Следующий пример показывает, что внутреннее отображение может и не быть полным локальным эпиморфизмом.

Пример 18. *Пример вполне дискретного, удовлетворяющего аксиомам P1 и P2 внутреннего эпиморфизма, который не является полным локальным эпиморфизмом.*

Построение. Пусть множество A задано на плоскости как объединение набора отрезков

$$\{(x,y) | x \in (-1/n, 1/n), y = n\}, n > 0,$$

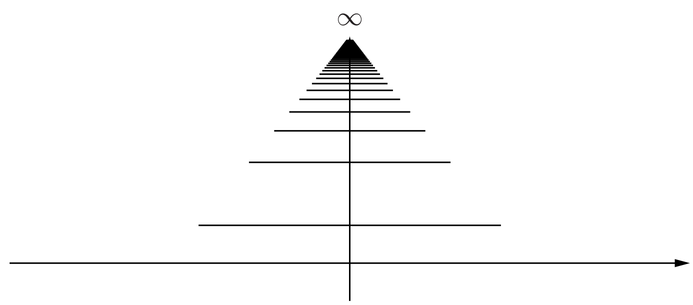

Рис. 1. К примеру 18

и оси $y = 0$ (Рис. 1). Возьмем счетное число множеств A, например, разместив их в $\mathbb{R}^3$, используя целые положительные значения координаты z ($z \in \mathbb{Z}^+$). Зададим эпиморфизм f как проекцию A на ось $y = 0$ при $z = 0$ и как сдвиг $z \mapsto z - 1$ при $z > 0$. Легко видеть, что f вполне дискретно, но в точке $(0, 0, 0)$ не является полным локальным эпиморфизмом. □

Лемма 3. *Конечнократный внутренний эпиморфизм f является полным локальным эпиморфизмом.*

Доказательство. Возьмем точку x и окрестность $U(x)$. Рассмотрим $f^{-1}(U(x))$. Поскольку f — непрерывное отображение, $f^{-1}(U(x))$ — открыто. При этом $f^{-1}(U(x))$ имеет конечное число компонент связности, так как f — конечнократное отображение. Образ каждой компонент связности является открытым множеством, так как f — открытое отображение. Их пересечение открыто как конечное пересечение открытых множеств, и дает искомую окрестность полной локальной эпиморфности f в точке x. Лемма доказана. □

В частности, внутренние отображения компактных двумерных многообразий вполне дискретны и являются полными локальными эпиморфизмами.

2.3.1. *Критерий полной локальной эпиморфности.* Приведем один критерий, когда отображение будет полным локальным эпиморфизмом, доказательство которого непосредственно следует из определения.

Если существует представление пространства M в качестве локально конечного клеточного комплекса, такого, что f является его клеточным эпиморфизмом (клетка отображается на объединение клеток той же или меньшей размерности), то f является полным локальным эпиморфизмом.

2.4. **Аксиомы отделимости относительно прообраза.** Еще одной неприятностью, которая возникает в случае бесконечнократных отображений, даже внутренних по Трохимчуку, является обеднение топологии, индуцированной на прообразе при помощи f^{-1}, по сравнению с уже имеющейся.

Это приводит к тому, что в некоторых случаях отделимые замкнутые множества невозможно отделить, используя только прообразы открытых окрестностей.

Определение 17. *Скажем, что открытый непрерывный эпиморфизм f* ***удовлетворяет аксиоме P0 отделимости прообразами****, если $\forall V \subset M$, где V — замкнутое множество, $\forall U\left(f^{-1}(V)\right)$ — открытой окрестности множества $f^{-1}(V)$ $\exists U'(V)$ — открытая окрестность множества V такая, что $f^{-1}\left(U'(V)\right) \subset U(V)$.*

Пример 19. *Открытый конечнократный эпиморфизм f удовлетворяет аксиоме P0 отделимости прообразами.*

Условие P0 отделимости прообразами, которое соблюдаются для конечнократных внутренних отображений, нарушатся для бесконечнократных внутренних по Трохимчуку отображений. Для примера достаточно рассмотреть проекцию прямой на окружность $x \mapsto x \mod 1$ и образ семейства окрестностей $\{(n - \frac{1}{|n|}, n + \frac{1}{|n|}) \| n \in \mathbb{Z}\}$.

Рассмотрим более слабые частные случаи аксиомы P0. Выпишем их как набор аксиом отделимости относительно прообразов.

Скажем, что открытое непрерывное отображение f удовлетворяет одной из аксиом P1 – P2 отделимости прообразами, если

P1. $\forall x \in M\ \exists U(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $\forall y_i, y_j \in f^{-1}(x)$, $i \neq j$ $U_i \cap U_j = \varnothing$, где U_i — связная компонента множества $f^{-1}(U(x))$, содержащая y_i.

P2. $\forall x \in M\ \forall n > 0\ \exists U_n(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что

$$\left(f^{-n}(U_n(x)) \setminus C_n(x)\right) \cap U_n(x) = \varnothing,$$

где $C_n(x)$ — либо пустое множество, если $x \notin f^{-n}(x)$, либо связная компонента множества $f^{-n}(U_n(x))$, содержащая точку x, если $x \in f^{-n}(x)$.

Легко видеть, что аксиомы P1 и P2 отделимости прообразами являются частными случаями аксиомы P0. Тем не менее, внутренние по Трохимчуку отображения могут и не удовлетворять аксиомам P1 и P2. Рассмотрим соответствующие аксиомы отделимости прообразами детальнее.

2.4.1. *Вполне дискретные отображения (P1).*

Определение 18. *Отображение f назовем* вполне дискретным в точке x, *если найдется окрестность $U(x)$ точки x такая, что множество $f^{-1}(U(x))$ можно представить в виде объединения окрестностей U_i прообразов точки x таких, что каждая U_i содержит в точности по одному прообразу точки x и эти окрестности попарно не пересекаются между собой.*

Определение 19. *Будем говорить, что $U(x)$ – окрестность точки x, отделяющая прообразы, если $U(x)$ удовлетворяет условиям определения 18.*

Определение 20. *Отображение f назовем* вполне дискретным*, если оно вполне дискретно в каждой точке.*

Пример 20. *Всякий конечнократный внутренний эпиморфизм является вполне дискретным.*

Пример 21. *Внутренний изолированный, но не вполне дискретный эпиморфизм.*

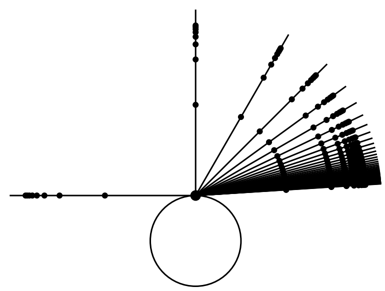

Рис. 2. Пространство X. К примеру 21.

Построение. Построим пространство X, изображенное на рис. 2, в виде дерева из отрезков $[0, 1]$, склеивая их в граничных точках. В качестве строительного элемента возьмем круг, образованный склейкой граничных точек отрезка $[0, 1]$, и лучи $[0, \infty)$, полученные склейкой бесконечного числа отрезков. Возьмем счетное число лучей $[0, \infty)$ и занумеруем их числами $n \in \mathbb{N}$. Отождествим точку 0 каждого луча с точкой $0 \equiv 1$ круга.

Заметим, что фактор-топология в точке $0 \equiv 1$ круга отличается от той, которая была бы индуцирована, например, вложением картинки из рис. 2 в плоскость: открытые окрестности в этой точке, порождающие в ней базу топологии, образованы объединением открытых полуинтервалов на каждом отрезке произвольной, не связанной между собой длины. Такую топологию и метрику легко при желании индуцировать из вложения пространства X в некоторое бесконечномерное пространство.

Зададим отображение f. На каждом луче положим

$$f : x \in [1, \infty) \mapsto x - 1 \in [0, \infty).$$

Оставшуюся часть $[0, 1]$ луча с номером n отобразим на круг. В локальных координатах отображение f пусть выглядит как

$$f = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg}(n \operatorname{tg}(\frac{\pi * x}{2})), & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Круг отобразим на себя тождественно.

После построения мы получим дерево X и отображение $f : X \to X$, по построению заданное всюду на X. Полученное отображение f в точке $0 \equiv 1$ круга изолировано, но не вполне дискретно. $\square$

Для вполне дискретных внутренних эпиморфизмов локально связного топологического пространства прообраз достаточно малой окрестности точки распадается на компоненты связности, каждая из которых содержит в точности один прообраз этой точки.

2.4.2. *Супернеблуждающие точки (P2).*

Напомним, что X — локально связное топологическое пространство.

Определение 21. *Назовем точку x* ***супернеблуждающей степени*** *n, если для любой окрестности $U(x)$ точки x найдется связная компонента U' множества $f^{-n}(U(x))$, $x \notin U'$, такая, что $U(x) \cap U'(x) \neq \varnothing$.*

Определение 22. *Назовем точку x* ***конечно отделимой****, если она не являются супернеблуждающей никакой степени.*

Определение 23. *Назовем отображение f* ***конечно отделимым****, если оно конечно отделимо во всех точках.*

Пример 22. *Полный локальный внутренний эпиморфизм с супернеблуждающими точками.*

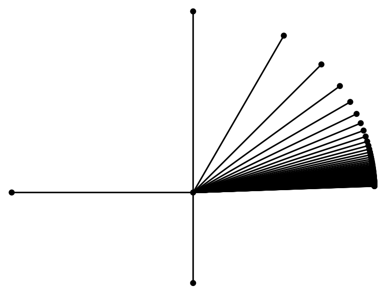

Рис. 3. Простое звено. К примеру 22.

Построение. Построим пространство X в виде дерева из отрезков $[0,1]$, склеивая их в граничных точках. В качестве строительного элемента возьмем звено, изображенное на рис. 3. Это звено состоит из "ствола" внизу и счетного множества "ветвей" вверху. Локальные координаты на каждом отрезке направлены снизу вверх. Ветви занумерованы числами $n \in \mathbb{N}$, у каждой ветви точка 0 отождествлена с точкой 1 "ствола". На каждой ветви с номером n зададим отображение f:

$$f = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(n\operatorname{tg}(\frac{\pi * x}{2})), & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Склеим счетное число таких звеньев в пространство X. Для этого, во-первых, нарастим ветви. С этой целью каждую ветвь рассмотрим как "ствол" и опять приклеим к ней счетное количество "ветвей", получив на каждой ветви звено второго уровня. Во-вторых, нарастим ствол, взяв еще одно звено и отождествив ствол с первой ветвью второго звена. Повторяем этот процесс бесконечно.

После построения получаем дерево X и отображение

$$f : X \to X,$$

которое будет определено уже всюду на X.

В полученном отображении все точки склейки супернеблуждающие. □

Как видно на примере 22, супернеблуждающие точки могут существовать даже у полных локальных внутренних эпиморфизмов. При этом f должен быть бесконечнократным и по лемме 1 X не может быть компактом.

2.4.3. *Отображения, обратно равномерно непрерывные на прообразах.* При рассмотрении отображений, которые удовлетворяют аксиомам P1 и P2, естественно возникает вопрос, насколько широк этот класс отображений.

Дадим достаточный критерий, когда отображение удовлетворяет этим аксиомам. Заметим, что это условие не что иное, как равномерная непрерывность. Однако, так как f^{-1} — многозначное отображение, условие равномерной непрерывности в его традиционном виде для однозначных отображений использовать нельзя, поэтому здесь оно записано в несколько непривычном для восприятия виде, который далее в тексте будет называться обратной равномерной непрерывностью на прообразах.

Определение 24. *Скажем, что непрерывное отображение $f : M \to M$ обратно равномерно непрерывно на прообразах точки x, если $\forall\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что*

$$\forall y : \quad \rho(y, f^{-1}(x)) > \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) > \varepsilon\,.$$

Определение 25. *Скажем, что отображение $f : M \to M$ обратно равномерно непрерывно на прообразах, если оно равномерно непрерывно на прообразах во всех точках.*

Лемма 4. *Если обратно равномерно непрерывный на прообразах внутренний эпиморфизм $f : M \to M$, вполне дискретен и конечно отделим.*

Доказательство леммы следует непосредственно из соответствующих определений.

2.5. **Прообразы неблуждающих точек.**

Пусть $f : M \to M$ — непрерывный на прообразах полный локальный внутренний эпиморфизм, удовлетворяющий аксиомам P1 и P2.

Теорема 1. *Если x — неблуждающая точка (соответственно, α-,ω-неблуждающая), то либо прообраз x содержит неблуждающую точку (α-, ω-неблуждающую точку), либо множество прообразов точки x и неблуждающее множество (α-, ω-неблуждающее множество) не являются ε-отделимыми друг от друга* [1].

Доказательство. Доказательство приведем для того случая, когда точка является α-неблуждающей. Напомним, что M — локально связное пространство (например, полное метрическое). В этом случае прообраз малой окрестности однозначно распадается на компоненты связности.

Если множество прообразов точки x является предельным для α-неблуждающего множества, утверждение леммы выполнено. Пусть множество прообразов точки x отделено от α-неблуждающего множества на расстояние δ_1. поскольку f равномерно на прообразах, найдется δ_2 такое, что прообраз шаровой окрестности $B_{\delta_2}(x)$ множество $f^{-1}(B_{\delta_2}(x))$ находится в δ_1 - окрестности $f^{-1}(x)$, и, следовательно, состоит из α-блуждающих точек. Сузив при необходимости $U'(x) = B_{\delta_2}(x)$, можно полагать, что это вполне отделимая окрестность x, в которой f является полным локальным эпиморфизмом.

Пусть прообразы точки x занумерованы индексами $i \in I$. Связную компоненту $f^{-1}(B_{\delta_2}(x))$, содержащую точку $x_{-1,i} \in f^{-1}(x)$, обозначим через $U(x_{-1,i})$.

$\forall k < 0 \ f^k(U(x_{-1,i})) \cap U(x_{-1,i}) = \varnothing$.

[1] К примеру, на прямой множества $\{n \in \mathbb{N}\}$ и $\{n+\frac{1}{n} \| n \in \mathbb{N}\}$ не являются ε-отделимыми

По условию x — α-неблуждающая точка. Поэтому $\exists m$ и $\exists U''$ — связная компонента множества $f^{-m}(U'(x))$ такая, что $U'' \cap U' \neq \varnothing$.

Поскольку f конечно отделим, можно предполагать, что $m > 1$. Далее, так как f — полный локальный эпиморфизм, то для каждой из окрестностей $U(x_{-1,i})$ найдется компонента связности множества $f^{-1}(U'')$, имеющая с ней непустое пересечение. Обозначим ее через U''_i. Имеем, что $\forall i$ $U(x_{-1,i}) \cap U''_i \neq \varnothing$.

Поскольку U'' является компонентой связности множества $f^{-m}(U'(x))$, а $m > 1$, то найдется k такое, что U'' является компонентой связности $f^{-m+1}(U(x_{-1,k}))$. Но тогда по построению, все U''_i, в частности, U''_k, являются компонентами связности $f^{-m}(U(x_{-1,k}))$.

Получили противоречие, так как по предположению окрестность $U(x_{-1,k})$ блуждающая.

Заметим, что если x — не α-неблуждающая точка, а ω-неблуждающая, то доказательство в этом случае упрощается, так как U'' уже является образом каждой $U(x_{-1,i})$. За исключением этого момента, доказательство переносится на случай ω-неблуждающей точки дословно.

Если же x — неблуждающая точка, то она является либо α-неблуждающей точкой, либо ω-неблуждающей. Как следствие, доказательство в этом случае сводится к уже рассмотренным случаям. Теорема доказана. □

Список литературы

[1] *Akin E., Hurley M, Kennedy J.* Dynamics of topologically generic homeomorphisms. // Memoirs of the A.M.S. – 2003. – **164**, No. 783.

[2] *Bonatti C.* The global dynamics of generic diffeomorphisms. // Lectures. SMR.1573-14. Trieste. – 2003.

[3] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index // CBMS Reg. Reg. Conf. Ser. in Math. AMS, Providence. – 1978. – **38**.

[4] *Hurley, M.* Chain recurrence, semiflows, and gradients // J. Dynam. Differential Equations. – 1995. – **7**, No. 3. – p. 437–456.

[5] *Стоилов С.* О топологических принципах теории аналитических функций. // – М.: Мир, 1964.

[6] *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности // Праці Институту математики НАН України. Киев. – 2008. – Т. 70.
[7] *Власенко И. Ю.* // Нелінійні коливання. (принято в печать).