Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 349-358

Т. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка
Україна, 01033, Київ-33, вул. Володимирська, 64
E-mail: Budnitska_T@ukr.net

Топологічна класифікація дробово-лінійних перетворень

The linear fractional transformations from $\overline{\mathbb{C}}$ to $\overline{\mathbb{C}}$ are investigated. Necessary and sufficient conditions for a topological conjugacy of such transformations are obtained.

Ключові слова: *дробово-лінійні перетворення, Мьобіусові перетворення, топологічна спряженість, класифікація.*

1. Вступ

Дробово-лінійні перетворення — це перетворення вигляду

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

де a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ такі, що $ad - bc \neq 0$. Остання умова гарантує те, що f не є константою, а також, що c та d не дорівнюють нулю одночасно. Таким чином, f визначене на всьому $\mathbb{C}$, якщо $c = 0$, і на $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$, якщо $c \neq 0$. Покладемо:

$f(\infty) = \infty$ при $c = 0$,

$f(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$ при $c \neq 0$.

Після цього f буде взаємно однозначним перетворенням $\overline{\mathbb{C}}$ на себе.

Нехай $X = \mathbb{C}$ або $\overline{\mathbb{C}}$.

Відображення f, $g : X \to X$ називають *топологічно спряженими* (позначатимемо $f \overset{t}{\sim} g$), якщо існує гомеоморфізм $h : X \to X$ такий, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Надалі бієктивні відображення будемо називати *перетвореннями.*

Дробово-лінійні перетворення f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ називають *спряженими* (позначатимемо $f \overset{\ell f}{\sim} g$), якщо існує дробово-лінійне перетворення $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ таке, що $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Очевидно, що зі спряженості дробово-лінійних відображень випливає їх топологічна спряженість, але обернене твердження не вірне.

А. Бердон [1] класифікував дробово-лінійні перетворення, з точністю до спряженості.

Класифікація дробово-лінійних перетворень, з точністю до топологічної спряженості, залишалася відкритою проблемою, тому розв'язанню цієї задачі й присвячено дану роботу. Ми отримали наступний результат.

Теорема 1. *Нехай* f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — *дробово-лінійні перетворення.*

Якщо f *та* g *мають хоча б по* 2 *різні нерухомі точки* ξ_1, ξ_2 *та* ψ_1, ψ_2, *відповідно, то* $f \overset{t}{\sim} g$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'}(\psi),$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Якщо f *та* g *мають тільки по* 1 *нерухомій точці, то вони завжди є топологічно спряженими.*

В інших випадках перетворення f *та* g *не є топологічно спряженими.*

2. Попередні відомості

А. Бердон [1] класифікував дробово-лінійні перетворення, з точністю до спряженості, а саме: показав, що кожне відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення f, в залежності від кількості нерухомих точок, є спряженим з однією зі ***стандартних (нормальних) форм***:

$$\begin{aligned} &m_k(z) = kz, \ \text{де } k \neq 0, 1 \\ &m_1(z) = z + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Тобто, якщо відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення f має 2 різні нерухомі точки, то існує $k \in \mathbb{C}\backslash\{0; 1\}$ таке, що $f \overset{\ell f}{\sim} m_k$; якщо f має тільки 1 нерухому точку, то $f \overset{\ell f}{\sim} m_1$.

Відомо, що кожна комплексна (2×2) матриця

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; ad - bc \neq 0,$$

визначає дробово-лінійне перетворення

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

що діє з розширеної комплексної площини на себе. І навпаки, кожне дробово-лінійне перетворення f визначає матрицю A, з точністю до множника, що не дорівнює 0.

А. Бердон [1], використовуючи функцію

$$\mathrm{tr}^2(f) = \frac{\mathrm{tr}^2(A)}{\det(A)}, \quad A \in \mathbb{GL}(2, \mathbb{C}),$$

яка є інваріантною відносно перетворення $A \mapsto \lambda A$, $\lambda \neq 0$, довів таку теорему.

Теорема 2. [1] Нехай f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ відмінні від тотожного дробово-лінійні перетворення. То $f \overset{\ell f}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{tr}^2(f)$=$\mathrm{tr}^2(g)$.

У роботі [2] дана класифікація, з точністю до топологічної спряженості, лінійних відображень з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, тобто має місце така лема.

Лема 1. [2] Нехай $f,\ g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=az$, $g(z)=cz$, a, $c\in\mathbb{C}$, — лінійні відображення. То $f\overset{t}{\sim}g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або}\ \begin{cases}0<|a|<1,\\ 0<|c|<1,\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}|a|>1,\\ |c|>1,\end{cases}\ \text{або}\ a=c,\ \text{або}\ a=\bar{c},$$

(тобто коли $|a|$, $|c|$ або одночасно менші 1 та не дорівнюють 0, або одночасно більші 1, або $a=c$, або $a=\bar{c}$).

Необхідні та достатні умови топологічної спряженості лінійних відображень з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ дає наступна лема.

Лема 2. *Нехай $f,\ g:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f(z)=az$, $g(z)=cz$, $a,\ c\in\mathbb{C}$, — лінійні відображення. У цьому випадку $f\overset{t}{\sim}g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

$$\textit{або}\ \begin{cases}|a|\notin\{0;1\},\\ |c|\notin\{0;1\},\end{cases}\quad \textit{або}\ a=c,\quad \textit{або}\ a=\bar{c},$$

(тобто коли $|a|$, $|c|$ або одночасно не дорівнюють 0 та 1, або $a=c$, або $a=\bar{c}$).

Доведення. Нехай $f(z)=az$, $g(z)=cz$, де a, $c\in\mathbb{C}$, такі, що

$$\text{або}\ \begin{cases}0<|a|<1,\\ 0<|c|<1,\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}|a|>1,\\ |c|>1,\end{cases}\ \text{або}\ a=c,\ \text{або}\ a=\bar{c}.$$

Якщо ці лінійні відображення f та g діють з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, то за лемою 1 вони є топологічно спряженими, тобто існує спрягаючий їх гомеоморфізм h, що діє з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

Нескладно перевірити, що перетворення $\widetilde{h}:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$ таке, що

$$\widetilde{h}(\infty)=\infty,\qquad \widetilde{h}(z)=h(z)\ \text{при}\ z\neq\infty,$$

є гомеоморфізмом. Тому ці ж лінійні відображення f та g, що діють з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, теж є топологічно спряженими, бо $\widetilde{h}$ — відповідний спрягаючий їх гомеоморфізм.

Відображення $f,\ g:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $f(z)=az$, $g(z)=\frac{1}{a}z$, де $|a|\notin\{0;1\}$, є топологічно спряженими, бо існує гомеоморфізм ϕ :

$\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $\phi(z) = \frac{1}{z}$ такий, що $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Якщо $|a| = 1$, то $f(z) = e^{i\varphi}z$, $g(z) = e^{-i\varphi}z$, тобто $a = \bar{c}$, а даний випадок вже був розглянутий.

Отже, відображення f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, a, $c \in \mathbb{C}$, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} |a| \notin \{0; 1\}, \\ |c| \notin \{0; 1\}, \end{cases} \quad \text{або } a = c, \quad \text{або } a = \bar{c}.$$

Лема доведена.

Наслідок 1. *Нехай f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = az$, $g(z) = cz$, a, $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, — лінійні перетворення. У цьому випадку $f \overset{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли або $|a|$ та $|c|$ одночасно не дорівнюють 1, або $a = c$, або $a = \bar{c}$.*

3. Класифікація дробово-лінійних перетворень, з точністю до топологічної спряженості

Необхідні та достатні умови топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень дає така теорема.

Теорема 3. *Нехай f, $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ — дробово-лінійні перетворення.*

Якщо f та g мають хоча б по 2 різні нерухомі точки ξ_1, ξ_2 та ψ_1, ψ_2 відповідно, то $f \overset{t}{\sim} g$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1, \\ |g'(\psi)| \neq 1, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'}(\psi),$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Якщо f та g мають тільки по 1 нерухомій точці, то вони завжди є топологічно спряженими.

В інших випадках перетворення f та g не є топологічно спряженими.

Доведення. Довільне дробово-лінійне перетворення може мати або 2 різні нерухомі точки, або 1, або нескінченно багато (тобто бути тотожним перетворенням). Оскільки у топологічно спряжених перетворень однакова кількість нерухомих точок, то доведемо теорему для кожного класу таких перетворень, у яких кількість нерухомих точок однакова.

Отже, маємо 3 випадки.

1) Дробово-лінійні перетворення, що мають тільки по 2 різні нерухомі точки.

Зауважимо, що дробово-лінійне перетворення

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

має тільки 2 різні нерухомі точки, а саме:

$$\xi_{1,\,2} = \tfrac{a-d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$$

тоді і тільки тоді, коли $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$.

Використовуючи умови (1), приходимо до висновку, що таке перетворення f є спряженим (а отже, є й топологічно спряженим) з деякою стандартною формою $m_k(z) = kz$, $k \in \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$.

З теореми 2 випливає, що $\mathrm{tr}^2(f)$=$\mathrm{tr}^2(m_k)$, тобто $\frac{(a+d)^2}{ad-bc} = \frac{(k+1)^2}{k}$. За допомогою цього виразу обчислюємо значення k, отримуємо:

$$k_1 = \tfrac{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}\,, \quad k_2 = \tfrac{a+d-\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{a+d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}\,.$$

Знайшовши значення похідної перетворення f у нерухомих точках ξ_1 та ξ_2, нескладно перевірити, що

$$k_1 = \tfrac{1}{f'(\xi_1)}\,, \quad k_2 = \tfrac{1}{f'(\xi_2)}\,.$$

Легко бачити, що $k_1 = \frac{1}{k_2}$, $k_1,\, k_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0; 1\}$, тому й

$$f'(\xi_1) = \tfrac{1}{f'(\xi_2)},\ \ f'(\xi_1),\ f'(\xi_2) \in \mathbb{C}\backslash\{0,\,1\}. \tag{2}$$

Отже, маємо дві стандартні форми:

$$m_{k_1}(z) = k_1 z = \frac{1}{f'(\xi_1)}\,z = f'(\xi_2)\,z$$

та

$$m_{k_2}(z) = k_2 z = \frac{1}{f'(\xi_2)}\, z = f'(\xi_1)\, z,$$

які є топологічно спряженими між собою (бо існує гомеоморфізм $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, $h(z) = \frac{1}{z}$ такий, що $m_{k_1} = h \circ m_{k_2} \circ h^{-1}$). Тому далі відповідну стандартну форму перетворення f будемо позначати:

$$m_f(z) = f'(\xi)\, z, \tag{3}$$

де $f'(\xi) \in \mathbb{C}\backslash\{0;1\}$, $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$ — довільна нерухома точка f.

Отже, дробово-лінійні перетворення f та g, що мають тільки по 2 різні нерухомі точки, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли топологічно спряженими будуть відповідні стандартні форми $m_f(z) = f'(\xi)\, z$ та $m_g(z) = g'(\psi)\, z$.

Використовуючи наслідок 1, маємо, що $m_f \overset{t}{\sim} m_g$ тоді і тільки тоді, коли

$$\text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1\,, \\ |g'(\psi)| \neq 1\,, \end{cases} \quad \text{або } f'(\xi) = g'(\psi), \quad \text{або } f'(\xi) = \overline{g'}(\psi),$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Отже, ми отримали необхідні та достатні умови топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень, що мають **тільки по** 2 різні нерухомі точки.

2) Дробово-лінійні перетворення, що мають нескінченно багато нерухомих точок.

Довільне дробово-лінійне перетворення, що має нескінченно багато нерухомих точок є тотожним перетворенням. Тому такі перетворення f та g завжди є топологічно спряженими, бо $f(z) = g(z) = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}(z)$.

3) Дробово-лінійні перетворення, що мають тільки по 1 нерухомій точці.

Використовуючи умови (1), приходимо до висновку, що таке перетворення є спряженим зі стандартною формою $m_1(z) = z + 1$. Тому два довільні дробово-лінійні перетворення, які мають тільки по 1 нерухомій точці, завжди є топологічно спряженими.

Об'єднуючи результати перших двох випадків, отримаємо, що перетворення f та g, що мають **хоча б по** 2 різні нерухомі точки ξ_1, ξ_2 та ψ_1, ψ_2, відповідно, будуть топологічно спряженими тоді і тільки тоді, коли

$$(4) \quad \text{або } \begin{cases} |f'(\xi)| \neq 1\,, \\ |g'(\psi)| \neq 1\,, \end{cases} \text{ або } f'(\xi) = g'(\psi), \text{ або } f'(\xi) = \overline{g'}(\psi),$$

де $\xi \in \{\xi_1, \xi_2\}$, $\psi \in \{\psi_1, \psi_2\}$.

Зауважимо, що поєднання 1)-го та 2)-го випадків є коректним, бо в 1)-у випадку розглядаються такі перетворення f, що $f'(\xi) \neq 1$ (див. (2)), а в 2)-у — такі $\widetilde{f}$, що $\widetilde{f}'(z) = 1$, а за умовами (4) такі перетворення f та $\widetilde{f}$ не є топологічно спряженими.

У випадку 3) дробово-лінійні перетворення, що мають **тільки по 1** нерухомій точці, завжди є топологічно спряженими.

Ми отримали необхідні та достатні умови даної теореми. Та оскільки у доведенні ми використовували не лише топологічно спряжені, але й спряжені дробово-лінійні перетворення, то може виникнути припущення, що дана класифікація не є повною. Тобто, що існує гомеоморфізм $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ такий, що $f = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$, проте умови (4) не виконуються.

Та хибність цього припущення доводять такі міркування.

Нехай f та g — відмінні від тотожних дробово-лінійні перетворення, а m_f та m_g — їхні відповідні стандартні форми (див. (3)). За умовами (1) існують дробово-лінійні перетворення d_1 та d_2 такі, що $f = d_1 \circ m_f \circ d_1^{-1}$ та $g = d_2 \circ m_g \circ d_2^{-1}$. Отже, $d_1 \circ m_f \circ d_1^{-1} = \phi \circ d_2 \circ m_g \circ d_2^{-1} \circ \phi^{-1}$, тобто $m_f \overset{t}{\sim} m_g$, а з наслідку 1 випливає, що виконуються умови (4). Отримали протиріччя.

Тому дана класифікація є повною, а умови теореми коректно сформульованими.

Теорема доведена.

3.1. **Геометрична інтерпретація топологічно спряжених дробово-лінійних перетворень з $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.** Як вже зазначалося, якщо відмінне від тотожного дробово-лінійне перетворення $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ має 2 різні нерухомі точки, то існує $k \in \mathbb{C}\backslash\{0;1\}$ таке, що f є спряженим зі стандартною формою $m_k(z) = kz$, де $k = f'(\xi)$, ξ — довільна нерухома точка f (див. умови (3)).

В залежності від значення числа $k \in \mathbb{C}\backslash\{0;1\}$ розрізняють 3 випадки:

1) k — число дійсне та додатне,

2) $k = e^{i\alpha}$ при $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$,

3) $k = r\, e^{i\alpha}$ при $r \neq 1$, $\alpha \neq 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

У першому випадку перетворення f називають *гіперболічним*, у другому — *еліптичним*, а в третьому — *локсодромічним*.

Довільне дробово-лінійне перетворення, що має тільки одну нерухому точку називають *параболічним*.

Застосовуючи класифікацію дробово-лінійних перетворень за вище перерахованими типами, отримаумо таку теорему.

Теорема 4. *Серед нееліптичних перетворень існує* 3 *топологічно неспряжених класи дробово-лінійних перетворень:*

1) *перший клас складається з усіх параболічних перетворень,*

2) *другий — з гіперболічних та локсодромічних перетворень,*

3) *третій — з тотожного перетворення.*

Серед еліптичних перетворень кожен клас топологічної спряженості дробово-лінійних перетворень задається величиною кута повороту (що визначений з точністю до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$*).*

4. Висновок

У даній роботі встановлено класифікацію дробово-лінійних перетворень, з точністю до топологічної спряженості.

Література

[1] *Бердон А.* Геометрия дискретных групп / Пер. с англ. – 1986. – М.: Наука, 304с.

[2] *Будницька Т.В.* Топологічна класифікація афінних відображень з $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ // Вісн. Київ. нац. ун-ту. – 2009 (стаття подана до друку).