Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 340-348

Н. В. Будницька

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка,
Україна, 01033, Київ-33, вул. Володимирська, 64
E-mail: Nadya_VB@ukr.net

Реалізація замкнених 1-форм з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях

The closed 1-forms with isolated zeros and closed recurrent curves on closed surfaces are considered. The theorem of realization of such closed 1-forms is proved.

Ключові слова: *замкнена 1-форма, реалізація.*

1. Вступ

У роботі [1] С.В. Білун і О.О. Пришляк знайшли топологічну класифікацію замкнених 1-форм Морса з ізольованими нулями та замкненими рекурентними кривими на замкнений поверхнях. У роботах [3, 4] Н.В. Будницька та О.О. Пришляк отримали необхідні та достатні умови топологічної еквівалентності замкнених 1-форм з ізольованими нулями на орієнтованих та неорієнтованих поверхнях відповідно.

Метою цієї роботи є вивчення реалізації замкнених 1-форм з ізольованими нулями та замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях.

2. Основні означення

Нагадаємо деякі означення з робіт [1,3]. Нехай M — замкнена поверхня роду p і на M задана замкнена 1-форма

$$\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy,$$

де $A, B : U \to \mathbb{R}$ — гладкі функції, $U \subset M$ — відкрита множина, (x, y) — координати в U.

Означення 1. *Позначимо через*

$$N(\omega) = \{z \in M : A(z) = 0, B(z) = 0\}$$

множину нулів форми ω. Крива $\gamma \subset M$, що не містить нулів, називається інтегральною кривою 1-форми ω, якщо локально вона є рівнем функції f такої, що $\omega = df$.

Будемо розглядати тільки максимальні інтегральні криві (які не є власними підмножинами інших кривих) і будемо називати їх просто кривими.

Нехай $z \in M \backslash N(\omega)$. Для кожного досить малого околу $U(z)$ цієї точки крива, що проходить через z, розбиває $U(z)$ на дві частини: додатну $\{v : f(v) - f(z) > 0\}$ і від'ємну $\{v : f(v) - f(z) < 0\}$. Об'єднання додатних частин околів будемо називати додатною підобластю, від'ємних — від'ємною підобластю.

Означення 2. *Нуль 1-форми називається ізольованим, якщо існує його окіл, що не містить інших нулів.*

Далі в роботі будемо розглядати замкнені 1-форми, які мають лише скінченне число ізольованих нулів. Відомо, що інтегральні криві не мають джерел (витоків), стоків і кривих, ω-граничними або α-граничними множинами яких є криві гомеоморфні колу S^1.

Означення 3. *Інтегральна крива $\gamma : \mathbb{R} \to M$ називається рекурентною, якщо*

$$\gamma \subset \{z \in M : \exists \{t_n\} \to \pm\infty, \gamma(t_n) \to z, n \to \infty\}.$$

З означення випливає, що якщо інтегральна крива є замкненою або скрізь щільною в M, то вона є рекурентною. Далі в роботі розглядаються лише замкнені рекурентні криві.

1-Форма називається замкненою, якщо $d\omega = 0$. Відомо, що існує $f \in C^2(U)$, де U — відкрита множина: $\omega = df$ тоді і лише тоді, коли ω замкнена в U. Тому далі будемо розглядати такі 1-форми ω, для яких локально існує функція f: $\omega = df$. З роботи [5] відомо, що для кожної критичної точки z_0 (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція f спряжена з функцією $\mathrm{Re}\,(x+iy)^k$ для деякого числа $k \in \mathbb{N}$. Можливі лише два різновиди ізольованих точок: сідло і центр.

Об'єднання нулів та інтегральних кривих, що їх з'єднують, замкненої 1-форми ω будемо розглядати як граф $G(\omega)$, який вкладений в M. При цьому, якщо з нуля виходить незамкнена рекурентна півкрива, то для отримання графу $G(\omega)$ ми відітнемо цю півкриву на деякій відстані від нуля, отримаємо ребро з однією вершиною валентності 1. Оскільки в околі кожного нуля функція f спряжена з функцією $\mathrm{Re}\,(x+iy)^k$ для деякого числа $k \in \mathbb{N}$, то із кожного нуля, відмінного від центру, виходить парна кількість півкривих і кожна вершина графу $G(\omega)$, крім вершин валентності 1, має парну валентність. Далі будемо вважати, що центр має 0-валентність, тобто парну валентність. Зауважимо, що ми не розглядаємо вершини валентності 2. Отже, вершинами графа $G(\omega)$ є нулі або точки з вершинами валентності 1, а ребрами — інтегральні криві, що їх з'єднують. Оскільки в даній роботі ми розглядаємо 1-форми ω з замкненими рекурентними кривими, то у графі $G(\omega)$ не буде вершин валентності 1.

Розглянемо M через склеювання відповідних сторін у правильному $4p$-кутнику для орієнтованої і $2p$-кутнику для неорієнтованої поверхні в $\mathbb{R}^2$, p — рід M. В кожній точці інтегральної кривої в $\mathbb{R}^2$ можна задати єдиний вектор $\bar{p} = (A, B) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$.

Означення 4. *Будемо вважати, що в кожній точці вектор $\bar{p}$ направлений від інтегральної кривої з меншим значенням рівня (з від'ємної частини околу) до інтегральної кривої з більшим значенням рівня (в додатну частину околу), тобто вектор $\bar{p}$ локально порівнює 2 сусідні інтегральні криві замкненої 1-форми ω і будемо його називати порівнюючим напрямком в точці.*

3. Реалізація замкненої 1-форми на поверхнях

Нехай M — замкнена поверхня роду p, G — граф, вкладений в M, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності. Нехай довільна замкнена крива s перетинає G в точках x_k. Зафіксуємо деяку точку перетину x_k і поставимо їй у відповідність знак δ_k, який є $+$, або $-$. Тоді з кожною наступною точкою x_{k+1} будемо пов'язувати знак δ_{k+1} за таким правилом: якщо рухаючись по s кожну наступну точку перетину x_{k+1} можна отримати рухаючись від попередньої x_k по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G, то для точки x_{k+1} будемо вважати $\delta_{k+1} = -\delta_k$, тобто δ_k змінює знак. Якщо таких ребер (чи ребра) не існує, то з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = \delta_k$, тобто δ_k знаку не змінює. Зауважимо, що знак δ_k будемо ставити перед перетином кривої s з графом G, який визначає точку x_k. Таким чином, на кривій s ми задали множину точок x_k, які утворені перетином графа G з кривою s, і з кожною точкою співставили знак δ_k, який дорівнює $+$ чи $-$.

Лема 1. *Нехай M — замкнена поверхня роду p, $G(\omega)$ — граф замкненої 1-форми ω, вкладений в M, який не має вершин валентності 2. s — довільна замкнена крива, яка перетинає $G(\omega)$ послідовно в точках x_k, з якими співставлені знаки δ_k за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s, починаючи з x_k, ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k.*

Доведення. Оскільки $G(\omega)$ — граф замкненої 1-форми ω, то в околі $G(\omega)$ всюди узгоджені порівнюючі напрямки. Кожна інтегральна крива розбиває окіл довільної точки на дві частини: додатну і від'ємну. В околі $G(\omega)$ всюди узгоджені порівнюючі напрямки і кожен порівнюючий напрямок напрямлений з від'ємної частини околу у додатну, тобто від $-$ до $+$. Тому в кожній точці x_k знак δ_k розглянемо як додатну (при $\delta_k = +$) чи від'ємну (при $\delta_k = -$) частину околу.

Нехай x_k — точка перетину кривої s з графом $G(\omega)$ і нехай δ_k — значення, яке ми співставили з x_k. Рухаючись по кривій s підходимо до x_{k+1} — наступної точки перетину кривої s з графом $G(\omega)$. Якщо x_{k+1} можна отримати, рухаючись від попередньої точки x_k, по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу $G(\omega)$, то це означає, що точки x_k і x_{k+1} належать до одного циклу, який містить інший максимальний зв'язний підграф (наприклад центр), тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = -\delta_k$. Якщо ж x_{k+1} не можна отримати, рухаючись від попередньої x_k по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу $G(\omega)$, то точки x_k і x_{k+1} належать до різних максимальних зв'язних підграфів, які розділяє область, гомеоморфна циліндру, тому порівнюючий напрямок не буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою x_{k+1} співставимо $\delta_{k+1} = \delta_k$.

З описаних пояснень випливає, що в кожній наступній точці перетину x_{k+1} кривої s з графом $G(\omega)$ знак δ_{k+1} буде протилежним до δ_k, лише якщо буде змінювати напрямок відповідний порівнюючий напрямок, і δ_{k+1} буде дорівнювати δ_k, якщо напрямок порівнюючого напрямку залишатиметься без змін. Оскільки знак δ_k ми визначаємо однозначно, а саме: перед перетином s з графом $G(\omega)$, який визначає точку x_k, то в даному випадку порівнюючий напрямок в точці x_k буде однозначно задавати δ_k — знак однієї частини околу. Тому замість дослідження порівнюючих напрямків 1-форми ω можна досліджувати знаки δ_k. А оскільки порівнюючі напрямки всюди узгодженні, то при обході s ми повернемося в початкову точку з тим самим порівнюючим напрямком, тобто з тим самим знаком δ_k.

Лема доведена.

Покажемо, що у випадку $\mathbb{R}^2$ справедлива обернена властивість.

Лема 2. *Нехай G — граф, вкладений в $\mathbb{R}^2$, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, s — довільна замкнена крива, яка перетинає G послідовно в точках x_k. Співставимо з точками x_k знаки δ_k за правилом, описаним вище. При обході s, починаючи з точки x_k, ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k. Тоді $G = G(\omega)$ — граф деякої замкненої 1-форми ω.*

Доведення. Локально кожне ребро G розбиває окіл точки x_k на додатну і від'ємну частини і, як описувалось в доведенні попередньої леми, δ_k визначає знак частини околу, який зустрічаємо до перетину s з G. Тоді $-\delta_k$ — знак іншої частини околу.

Рухаючись по замкненій кривій s ми всюди розставляємо знаки δ_k в околах до перетину s з G. В частинах околів після перетину s з G знаки будуть протилежними до δ_k. Проведемо аналогічні міркування для довільної замкненої кривої s. В кожній точці задаємо порівнюючий напрямок, який йде від $-$ до $+$. Оскільки при обході довільної кривої s ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k, то це є свідченням того, що порівнюючий напрямок при обході довільної кривої s повернеться з тим самим напрямком в початкову точку. А це і означає, що ми отримали всюди узгоджені порівнюючі напрямки.

Отже, ми отримали G — граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, і всюди узгоджені порівнюючі напрямки, тому $G = G(\omega)$ — граф деякої замкненої 1-форми ω.

Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай M — замкнена поверхня роду p, G — граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, вкладений в M. Існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$ тоді і лише тоді, коли виконуються: s — довільна замкнена крива, яка перетинає G послідовно в точках x_k; кожній точці x_k поставлено у відповідність знак*

δ_k за правилом, описаним вище. Тоді при повному обході s, починаючи з точки x_k, ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k.

Доведення. *Необхідність.* Випливає з леми 1.

Достатність. Розглянемо окремо випадки, коли M — орієнтована або неорієнтована поверхня.

1) M — орієнтована поверхня. Розглянемо M через склеювання відповідних сторін правильного $4p$-кутника в $\mathbb{R}^2$, p — рід M. Кожна пара відповідних сторін у $4p$-кутнику задає деяку замкнену криву s_j на M.

Нехай $\{s_j\}$ — множина замкнених кривих на M, x_{jk} — точки перетину кривої s_j з графом G. Зафіксуємо довільну замкнену криву s_1 і розставимо знаки δ_{1k} в точках x_{1k}, перетину кривої s_1 з графом G за правилом, описаним вище. Нехай криві s_1 і s_j, $j \neq 1$, перетинаються. При перетині s_1 і s_j, $j \neq 1$, розглянемо нові замкнені криві, які належать $s_1 \cup s_j$, а саме: візьмемо від точки перетину цих кривих по одній дузі з кожної кривої так, щоб їх об'єднання задавало орієнтовану криву. Тоді, знаючи знаки δ_{1k} на кривій s_1, ми задаємо знаки δ_{jk} на кривій s_j. Розставимо знаки δ_{jk} для всіх точок перетину кривих s_j з графом G. Таким чином, ми розставили знаки δ_{jk} на межі $4p$-кутника.

Знаки δ_{jk} в точках перетину G з межею $4p$-кутника індукують знаки δ_k на ребрах G, які перетинають межу. Оскільки у внутрішності $4p$-кутника при повному обході довільної кривої s, починаючи з точки x_k, ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком δ_k, то у внутрішності $4p$-кутника всюди, за правилом, описаним вище, розставлені знаки δ_k. За лемою 2 існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$.

2) M — неорієнтована поверхня. Розглянемо M через склеювання відповідних сторін у правильному $2p$-кутнику в $\mathbb{R}^2$, p — рід M. Позначимо через c_1, $\acute{c}_1$, c_2, $\acute{c}_2$, …, c_p, $\acute{c}_p$ сторони $2p$-кутника, причому сторони з однаковими нижніми індексами ототожнюються. Зауважимо, що межа $c_1\acute{c}_1c_2\acute{c}_2\dots c_p\acute{c}_p$ гомеоморфна замкненій орієнтованій кривій в

$\mathbb{R}^2$. Обходячи межу $c_1\acute{c}_1c_2\acute{c}_2\dots c_p\acute{c}_p$, послідовно позначаємо точки перетину сторони c_i з графом G через y_{is}, $i=\overline{1,p}$, $s=\overline{1,S(i)}$, тоді $\acute{y}_{is}$ — точки перетину сторони $\acute{c}_i$ з графом G. Оскільки c_i і $\acute{c}_i$ ототожнюються, то y_{is} і $\acute{y}_{is}$ розміщенні однаково на c_i і $\acute{c}_i$.

Розглянемо деяку сторону $c_i : c_i \cap G \neq \varnothing$, точку $y_{i1} \in c_i \cap G$ і задамо в y_{i1} довільний порівнюючий напрямок (наприклад порівнюючий напрямок збігається з напрямком сторони c_i). Якщо y_{i2} можна досягнути рухаючись від попередньої y_{i1} по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G, то це означає, що точки y_{i2} і y_{i1} належать до одного циклу, який містить інший максимальний зв'язний підграф (наприклад центр), тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою y_{i2} співставимо порівнюючий напрямок, протилежний до порівнюючого напрямку y_{i1}, в іншому випадку порівнюючий напрямок не змінюється. Аналогічно розглядаємо всі точки з $c_i \cap G$ і задаємо порівнюючі напрямки на них.

Порівнюючі напрямки на стороні $\acute{c}_i$ будемо задавати в такий спосіб: у точці $\acute{y}_{is}$ порівнюючий напрямок буде протилежним до порівнюючого напрямку в точці y_{is}, тобто якщо в точці y_{is} порівнюючий напрямок збігався з напрямком сторони c_i, то в точці $\acute{y}_{is}$ порівнюючий напрямок буде протилежним до напрямку сторони $\acute{c}_i$. Таким чином, ми задали порівнюючі напрямки в точках перетину G з парою сторін c_i, $\acute{c}_i$.

При обході $c_1\acute{c}_1c_2\acute{c}_2\dots c_p\acute{c}_p$ розглянемо сторону $c_j : c_j \cap G \neq \varnothing$, точку $y_{j1} \in c_j \cap G$. Якщо y_{j1} можна отримати, рухаючись від попередньої точки $\acute{y}_{iS(i)}$ по ребрах і вершинах (чи ребрі) графу G, то це означає, що точки $\acute{y}_{iS(i)}$ і y_{j1} належать до одного циклу, тому в даному циклі порівнюючий напрямок буде змінюватися на протилежний і за правилом, описаним вище, з точкою y_{j1} співставимо порівнюючий напрямок, протилежний до порівнюючого напрямку $y_{iS(i)}$, в іншому випадку порівнюючий напрямок не змінюється. Задавши порівнюючий напрямок в точці y_{j1}, аналогічно до випадку з парою сторін c_i, $\acute{c_i}$, задаємо порівнюючі напрямки в точках перетину G з c_j, $\acute{c_j}$. Далі узагальнюємо викладені міркування на всю межу $2p$-кутника.

Порівнюючі напрямки в точках перетину G з межею $2p$-кутника індукують порівнюючі напрямки на ребрах G, які перетинають межу. Якщо задамо кожен порівнюючий напрямок через $+$ і $-$, то порівнюючий напрямок направлений з $-$ в $+$. Оскільки за умовою теореми при обході довільної замкненої кривої ми повернемося в початкову точку з тим самим знаком, то нові $+$ і $-$ будуть всюди узгодженими. Тоді за лемою 2 існує замкнена 1-форма ω з заданим графом $G = G(\omega)$.

Теорема доведена.

4. Висновок

У даній роботі знайдено умови, при яких деякий граф, який не має вершин валентності 2 і має вершини парної валентності, визначає замкнену 1-форму з замкненими рекурентними кривими на замкнених поверхнях.

Література

[1] *Білун С.В., Пришляк О.О.* Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2002. - №8. - С.77-81.

[2] *Будницька Н.В., Пришляк О.О.* Замкнені 1-форми з ізольованими критичними точками на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2007. - №18. - С.66-69.

[3] *Будницька Н.В., Пришляк О.О.* Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях // Вісн. Київ. нац. ун-ту. - 2008. - №19. - С.36-38.

[4] *Будницька Н.В.* Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених неорієнтованих поверхнях // Нелінійні коливання. - 2008 (стаття подана до друку).

[5] *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface // Topology and its Aplications. - 2002. - №119. - P.257-267.