Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 333-339

УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко

Ин-т математики НАН Украины, Киев
E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

М. В. Степочкина

Ин-т математики НАН Украины, Киев
E-mail: StMar@ukr.net

Построение (min, max) - эквивалентных ч. у. множеств

In this paper we solve the problem on an explicit construction of a (min, max)-equivalent partially ordered set for given defining sequences.

На протяжении всей статьи рассматриваются только конечные частично упорядоченные (сокращенно ч. у.) множества.

Пусть S — ч. у. множество, не содержащее элемента 0. Квадратичной формой Титса ч. у. множества S называют следующую (целочисленную) квадратичную форму $q_S : \mathbb{Z}^{S\cup 0} \to \mathbb{Z}$:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i\in S} z_i^2 + \sum_{i<j, i,j\in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i\in S} z_i.$$

Здесь $\mathbb{Z}^{S\cup 0}$ обозначет множество целочисленных векторов

$$z = (z_i), i \in S \cup 0.$$

Эта форма играет важшую роль в теории представлений. В частности, в [1] доказано, что ч. у. множество S имеет конечный тип тогда и только тогда, когда его форма Титса слабо положительна.

В работе [2] введено понятие (min, max)-эквивалентности ч. у. множеств, которое, в частности, сыграло решающую роль (как метод) при описании ч. у. множеств с положительной квадратичной формой Титса и P-критических ч. у. множеств [3].

Напомним соответствующие определения из [2].

Пусть S — ч. у. множество. Под подмножеством $X \subseteq S$ подразумевается полное ч. у. подмножество, т. е. для $x, y \in X$ $x < y$ в X тогда и только тогда, когда $x < y$ в S. Подмножество X называется нижним (соотв. верхним), если $x \in S$ всякий раз, когда $x < y$ (соотв. $x > y$) и $y \in S$. Запись $x \not\lessgtr y$ будет означать, что элементы x и y не сравнимы. Множество элементов $x \in S$, несравнимых (соотв. сравнимых) с фиксированным элементом $a \in S$, будем обозначать $S^{\not\lessgtr}(a)$ (соотв. $S(a)$). Для подмножеств Y и Z множества S будем писать $Y < Z$, если $y < z$ для произвольных $y \in Y, z \in Z$ (это заведомо выполняется, когда Y или Z является пустым). Одноэлементные подмножества S отождествляются с самими элементами.

Для ч. у. множеств X и Y мы пишем $X =_0 Y$, если X и Y равны как обычные множества (т. е. без рассмотрения порядков на них). Если же $X =_0 Y$ и при этом $x < y$ в X тогда и только тогда, когда $x < y$ в Y, то X и Y называются *равными* как ч. у. множества.

Продолжаем излагать определения из [2].

Определим для минимального (соотв. максимального) элемента $a \in S$ ч. у. множество $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) следущим образом: это объединение (без пересечения) подмножеств $\{a\}$ и $S \setminus a$ с наименьшим частичным порядком, который содержит заданный на $S \setminus a$ порядок, и при этом $a > S^{\not\lessgtr}(a)$ (соотв. $a < S^{\not\lessgtr}(a)$). Другими словами, $S_a^{\uparrow} =_0 S$ (соотв. $S_a^{\downarrow} =_0 S$) и отношение частичного порядка задается следующими условиями:

a) a — максимальная (соотв. минимальная) точка $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$);

b) если $x, y \neq a$, то $x < y$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $x < y$ в S;

c) $a > x$ в $S_a^{\uparrow}$ (соотв. $a < x$ $S_a^{\downarrow}$) тогда и только тогда, когда $a \not\gtrless x$ в S.

В дальнейшем будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xy}^{\uparrow\downarrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\downarrow}$ и т. д.

Пусть S и T — ч. у. множества такие, что $S =_0 T$. Ч. у. множество T назовем (min, max)-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если T равно некоторому ч. у. множеству вида

$$\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p} \quad (p \geq 0),$$

где $\varepsilon_i \in \{\uparrow, \downarrow\}$ и для $i \in \{1, \ldots, p\}$ x_i — минимальная (соотв. максимальная) точка $\overline{S}_{i-1} = S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1}}$, если $\varepsilon_i =\uparrow$ (соотв. $\varepsilon_i =\downarrow$); при $p = 0$ считаем, что $\overline{S} = S$. Заметим, что мы не требуем, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ были различны. Введенное отношение является отношением эквивалентности (см. [3]).

В этой статье продолжается изучение (min, max)-эквивалентностных ч. у. множеств. А именно, доказана теорема, которая даёт возможность выписать ч. у. множество $T \cong_{(\min,\max)} S$ непосредственно, а не через p шагов, как указано в самом определении.

Если $\gamma = (y_1, \ldots, y_s)$ — последовательность элементов некоторого множества Y (элементы y_i не обязательно разные), а $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s\}$ — последовательность символов $\downarrow$ и $\uparrow$, то будем обозначать через

$$m_y^+(\gamma, \varepsilon) = m_y^+(y_1, \ldots, y_s; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$$

(соответственно

$$m_y^-(\gamma, \varepsilon) = m_y^-(y_1, \ldots, y_s; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)),$$

где $y \in Y$, число элементов y_i таких, что $y_i = y$ и при этом $\varepsilon_p =\uparrow$ (соответственно $\varepsilon_p =\downarrow$), а через

$$m_y(\gamma, \varepsilon) = m_y(y_1, \ldots, y_s; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$$

— их разность:

$$m_y(\gamma,\varepsilon) = m_y^+(\gamma,\varepsilon) - m_y^-(\gamma,\varepsilon).$$

Теорема. *Пусть* $T = S^{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p-1}\varepsilon_p}_{x_1x_2\ldots x_{p-1}x_p}$ *и для* $y \in S$ *положим* $m(y) = m_y(x_1,\ldots,x_p;\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$. *Для элементов* $b, c \in T$ *имеет место неравенство* $b < c$ *тогда и только тогда, когда в* S *выполняется одно из следующих условий:*

1) $b < c$ *и* $m(b) = m(c)$*;*

2) $b > c$ *и* $m(b) = m(c) - 2$*;*

3) $b \not\gtrless c$ *и* $m(b) = m(c) - 1$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $b < c$ в T. Покажем, что в S выполняется одно из условий 1) – 3).

Применим индукцию по числу p. Случай $p = 0$ тривиальный (так как $T = S$ и $m(y) \equiv 0$, то имеет место условие 1)).

Рассмотрим теперь случай $p = 1$: $T = S^{\varepsilon_1}_{x_1}$. Тогда, очевидно, $T^{\varepsilon_1^{-1}}_{x_1} = S^{\varepsilon_1\varepsilon_1^{-1}}_{x_1x_1} = S$. Если $x_1 \neq b, c$, то (по определению $T^{\varepsilon_1^{-1}}$) $b < c$ в S, а поскольку $m(b) = m(c) = 0$, то в S выполняется условие 1). Если $x_1 = b$, то b — минимальный элемент T (b — не может быть максимальным, так как $b < c$), а значит, $\varepsilon_1^{-1} =\uparrow$; и поскольку в этом случае $b \not\gtrless c$ в S и $m(b) = -1, m(c) = 0$, то в S выполняется условие 3). Наконец, если $x_1 = c$, то b — максимальный элемент T, а значит, $\varepsilon_1^{-1} =\downarrow$; а поскольку тогда $b \not\gtrless c$ в S и $m(b) = 0, m(c) = 1$, то в S опять таки выполняется условие 3).

Пусть теперь $p > 1$. Положим $S' = S^{\varepsilon_1}_{x_1}$ и

$$m'(y) = m_y(x_2,\ldots,x_p;\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_p),$$

где $y \in S$. Тогда $T = (S')^{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{p-1}}_{x_2\ldots x_{p-1}}$ и по индукционному предположению в S' виполняется одно из таких условий:

1′) $b < c$ и $m'(b) = m'(c)$;

2′) $b > c$ и $m'(b) = m'(c) - 2$;

3$'$) $b \nless\ngtr c$ и $m'(b) = m'(c) - 1$.

Далее доказательство будем проводить по той же схеме, что и для случая $p = 1$. Легко видеть, что $S = S_{x_1 x_1}^{\varepsilon_1 \varepsilon_1^{-1}} = (S')_{x_1}^{\varepsilon_1^{-1}}$. Если $x_1 \neq b, c$, то (по определению $(S')_{x_1}^{\varepsilon_1^{-1}}$) $b < c$ в S, а поскольку $m(b) = m'(b)$ и $m(c) = m'(c)$, то в S выполняется какое-либо из условий 1), 2) или 3), если только в S' выполняется соответствующее ему условие 1$'$), 2$'$) или 3$'$).

Пусть теперь $x_1 = b$. Если в S' выполняется условие 1$'$), то b — минимальный элемент S', а значит, $\varepsilon_1^{-1} =\uparrow$; поскольку тогда $b \nless\ngtr c$ в S и $m(b) = m'(b) - 1, m(c) = m'(c)$, то в S выполняется условие 3). Если же выполняется условие 2$'$), то b — максимальный элемент S', а значит, $\varepsilon_1^{-1} =\downarrow$; но поскольку тогда $b \nless\ngtr c$ в S и

$$m(b) = m'(b) + 1,\, m(c) = m'(c),$$

то в S выполняется условие 3). Наконец, если выполняется условие 3$'$), то либо b — минимальный элемент S' и $\varepsilon_1^{-1} =\uparrow$, либо b — максимальный элемент S' и $\varepsilon_1^{-1} =\downarrow$. Тогда в первом случае $b > c$ в S и $m(b) = m'(b) - 1, m(c) = m'(c)$, а во втором — $b < c$ в S и $m(b) = m'(b) + 1, m(c) = m'(c)$. Значит, в S выполняется соответственно условие 2) или 1).

Случай $x_1 = c$ рассматривается аналогично случаю $x_1 = b$.

Достаточность. Пусть в S выполняется одно из условий 1) – 3). Покажем, что $b < c$ в T.

Применим индукцию по числу p. Если $p = 0$, то $T = S$ и $m(y) = 0$ для любого y, а тогда может выполняться только условие 1), и значит, $b < c$.

В случае $p = 1$ имеем $m(b), m(c) \in \{0, 1\}$ и $m(b) + m(c) = 1$, а значит, выполняется либо условие 1) при $m(b) = m(c) = 0$, либо условие 3) при $m(0) = 1, m(c) = 1$. В обоих случаях в ч. у. множестве $T = S_{x_1}^{\varepsilon_1}$ выполняется отношение $b < c$.

Переходим к случаю $p > 1$. Положим, как и при доказательстве необходимости, $S' = S^{\varepsilon_1}_{x_1}$ и (для $y \in S$)

$$m'(y) = m_y(x_2, \ldots, x_p; \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p).$$

Тогда $T = (S')^{\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p}_{x_2 \ldots x_p}$.

Если $x_1 \neq b, c$, то $m'(b) = m(b), m'(c) = m(c)$ и по индукционному предположению $b < c$ в T (так как из условий 1)–3) в S' выполняется то же самое условие, что и в S).

Пусть теперь $x_1 = b$. Если $\varepsilon_1 =\uparrow$, то

$$m'(b) = m(b) - 1,\ m'(c) = m(c),$$

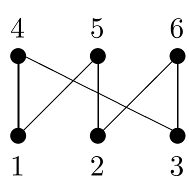
и если в S выполняется условие 1) (соответственно 3)), то в S' выполняется условие 3) (соответственно 2)); условие 2) выполняться не может, так как b — минимальный элемент S. Если же $\varepsilon_1 =\downarrow$, то $m'(b) = m(b) + 1, m'(c) = m(c)$, и если в S выполняется условие 2) (соответственно 3)), то в S' выполняется условие 3) (соответственно 1)); условие 1) выполняться не может, так как b — максимальный элемент S.

Случай $x_1 = c$ рассматривается аналогично случаю $x_1 = b$.

Теорема доказана.

Рассмотрим пример, который показывает, каким образом применяется наша теорема.

Возьмем в качестве S ч. у. множество



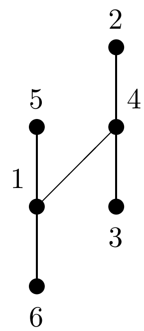
и, пользуясь теоремой, вычислим ч. у. множество $T = S^{\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow}_{125165}$. Поскольку

$$m(1) = m(3) = m(4) = m(5) = 0,\ m(2) = 1,\ m(6) = -1,$$

то условие 1) выполняется при $(b, c) = (1, 4), (1, 5), (3, 4)$, условие 2) — при $(b, c) = (6, 2)$ и условие 3) — при

$$(b, c) = (6, 1), (6, 4), (6, 5), (1, 2), (3, 2), (4, 2).$$

Значит, T имеет следующий вид:



Список литературы

[1] *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.

[2] *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2005. – N1. – С. 24–25.

[3] *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, N3. – С. 18–58.