Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 247-255

Г. А. Толстихина

Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: `science@tversu.ru`

О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p,q,q)$

The generalized left Bol 3-web $B_l(p,q,q)$ on a smooth manifold $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = p+q$, defined by a local smooth Bol quasigroup is considered. The symmetric space structure connected with the web $B_l(p,q,q)$ is studied.

Ключевые слова: *three-web, Bol quasigroup, symmetric space*

Пусть $Q(*)$ — локальная дифференцируемая q-мерная квазигруппа, Y — гладкое p-мерное многообразие, $(p \le q)$,

$$f: \ Q \times Y \to Y, \quad z = f(a,y), \tag{1}$$

— гладкая функция, такая, что в каждой точке множества $Q \times Y$ ранги матриц Якоби $(\partial f/\partial a)$ и $(\partial f/\partial y)$ максимальны и для любых $y \in Y$ и $a, b \in Q$ выполняется условие

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(a*b, y), \tag{2}$$

где $f^{-1}: \ Q \times Y \to Y$, $y = f^{-1}(a,z)$. Тогда будем говорить (см. [5]), что квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу (2).

С другой стороны, согласно [3], функция f задает на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ размерности $p+q$ три-ткань $W(p,q,q)$, образованную тремя слоениями

$$\lambda_1: \ a = \text{const}, \quad \lambda_2: \ y = \text{const}, \quad \lambda_3: \ z = f(a,y) = \text{const}$$

размерностей p, q и q соответственно. Уравнение $z = f(a, y)$ называется *уравнением три-ткани* $W(p, q, q)$ [5]. Это уравнение определяет трехбазисную бинарную операцию

$$(\cdot) : \; Q \times Y \to Y, \quad z = a \cdot y \equiv f(a, y),$$

которая называется *локальным координатным группоидом три-ткани* $W(p, q, q)$.

При $p = q$ уравнение $z = a \cdot y$ является локально однозначно разрешимым относительно переменных a и y, поэтому операция $(\cdot)$ является гладкой локальной квазигруппой. Напомним [1], что последняя называется локальной координатной квазигруппой соответствующей три-ткани $W(q, q, q)$. Для три-ткани $W(p, q, q)$ размерности многообразий Q и Y, вообще говоря, различны, поэтому операция $(\cdot)$ квазигруппой, вообще говоря, не является.

Переменные a, y и z, входящие в уравнение ткани, допускают преобразования вида

$$\tilde{a} = \alpha(a), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы. При этом уравнение ткани преобразуется к виду

$$\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\tilde{a}), \beta^{-1}(\tilde{y})).$$

Тройка локальных биекций (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием* или *изотопией* координатного группоида три-ткани $W(p, q, q)$.

В [5] доказана

Теорема 1. *Если квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу (2), то она изотопна левой лупе Бола.*

Напомним [4], что лупа (квазигруппа с единицей) называется левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола

$$(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w)).$$

В [5] функция $f: \ Q \times Y \to Y$, удовлетворяющая тождеству (2), названа *квазигруппой Бола преобразований*, а $Q(*)$ — *параметрической квазигруппой* квазигруппы Бола преобразований. Три-ткань $W(p,q,q)$, определяемая квазигруппой Бола преобразований, называется *обобщенной левой тканью Бола* и обозначается $B_l(p,q,q)$.

Теорема 2. *База первого слоения три-ткани $B_l(p,q,q)$ является локально симметрическим пространством.*

Доказательство. На базе Q первого слоения λ_1 три-ткани $B_l(p,q,q)$ определим семейство функций $S_a(b) = a{*}b$, где $a \in Q$, $b \in U_a \subset Q$, U_a — достаточно малая окрестность точки a. В силу (2) операция $(*)$ идемпотентна: $a * a = a$, левообратима: $a * (a * b) = b$ и леводистрибутивна: $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$ [5], поэтому согласно [4] (см. также [2]) функции S_a являются локальными симметриями, а многообразие $\{Q, S_a\}$ будет локально симметрическим пространством. $\square$

Пример 11. В [6] найдены уравнения некоторой обобщенной левой ткани Бола $B_l(2,3,3)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2), \\ z^2 = a^2 + y^2. \end{array} \right. \tag{3}$$

С другой стороны, уравнения (3) задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола $Q(*)$ на двумерном многообразии Y. Найдем уравнения $c = a * b$ этой квазигруппы. Запишем тождество (2) в виде двух равенств:

$$f(a,y) = f(b,\bar{y}), \ \ f(c,y) = f(a,\bar{y}) \tag{4}$$

((2) получается из (4) исключением переменной $\bar{y}$).

Для три-ткани (3) имеем:

$$\begin{aligned}
&a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2) = b^1 + \bar{y}^1 - b^3 \bar{y}^2 (b^2 + \bar{y}^2),\\
&a^2 + y^2 = b^2 + \bar{y}^2,\\
&c^1 + y^1 - c^3 y^2 (c^2 + y^2) = a^1 + \bar{y}^1 - a^3 \bar{y}^2 (a^2 + \bar{y}^2)\\
&c^2 + y^2 = a^2 + \bar{y}^2.
\end{aligned}$$

Исключая $\bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2)$ из последней системы, получим уравнения, которые удовлетворяются тождественно относительно $y = (y^1, y^2)$ в том и только в том случае, если выполняются равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)),\\ c^2 = 2a^2 - b^2,\\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{array} \right. \tag{5}$$

Уравнения (5) определяют трехпараметрическую квазигруппу Бола квазигруппы Бола преобразований (3). С другой стороны, согласно теореме 2 уравнения (5) задают локальные симметрии $S_a(b) = a * b$ на трехмерной базе Q первого слоения рассматриваемой три-ткани $B_l(2, 3, 3)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что параметрическая квазигруппа (5) является идемпотентной, левообратимой и леводистрибутивной, а изотопная ей лупа — левой лупой Бола. Можно показать также, что левая обратная квазигруппа последней определяет известную шестимерную среднюю ткань Бола (ткань B_m) с симметричным тензором кручения a^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ранга 1 [7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} w^1 = u^1 + v^1 - u^2 v^2 (u^3 + v^3),\\ w^2 = u^2 + v^2,\\ w^3 = u^3 + v^3. \end{array} \right.$$

В [8] показано, что эта три-ткань B_m является *эластичной* (тканью E), то есть в ее координатных лупах выполняется тождество эластичности: $(u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u)$. В [8] эта ткань обозначена E_1.

Пример 12. Рассмотрим другую шестимерную эластичную три-ткань E_2 (см. [8]), определяемую уравнениями

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = x^2 + y^2 e^{-2x^1} + (x^3 y^1 - x^1 y^3) e^{-2x^1}, \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases}$$

Поскольку эластичные ткани образуют собственный подкласс тканей B_m [8], то эта ткань является средней тканью Бола. Изотопическим преобразованием

$$x^2 e^{2x^1} + x^1 x^3 \to x^2, \quad y^2 - y^1 y^3 \to y^2, \quad z^2 e^{2z^1} + z^3 z^1 \to z^2$$

уравнения ткани E_2 приводятся к виду

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = (x^2 + y^2) e^{2y^1} + (x^3 + y^3)(x^1 + y^1 + (y^1 - x^1) e^{2y^1}), \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \qquad (6)$$

Найдем левую обратную квазигруппу для квазигруппы (6), затем переобозначим переменные: $x^i \to z^i$, $z^i \to a^i$, $y^i \to -y^i$. В результате получим уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3 (a^1 + 2y^1), \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \qquad (7)$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой стороны, задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном многообразии Y.

Найдем уравнения соответствующей параметрической квазигруппы $c = a * b$. Для этого запишем равенства (4) с учетом (7) и исключим из полученной системы переменные y^i и $\bar{y}^i$. После вычислений получим:

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = a^2 (e^{-2(a^1 - b^1)} + e^{2(a^1 - b^1)}) - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \qquad (8)$$

Это и есть уравнения искомой квазигруппы $c = a * b$.

Покажем, что первые два уравнения системы (7):

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3 (a^1 + 2y^1) \end{array} \right. \tag{9}$$

задают действие квазигруппы (8) на некотором двумерном многообразии. В самом деле, в правую часть уравнений (9) не входит переменная y^3. Это означает, что (9) определяют группоид $f:\ Q \times \bar{Y} \to \bar{Y}$, где $\bar{Y} = \{(y^1, y^2)\}$, $\bar{Y} \subset Y$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в рассматриваемом случае равенства (2) удовлетворяются тождественно в силу (8). Следовательно, уравнения (9) задают действие трехпараметрической квазигруппы Бола (8) на двумерной плоскости $\bar{Y}$ и определяют обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. На трехмерной базе Q первого слоения этой ткани уравнения (8) задают локальные симметрии вида $S_a(b) = a * b$.

Пример 13. Для координатной квазигруппы шестимерной три-ткани B_m с симметричным тензором a^{ij} ранга 2 (см. [7]):

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = x^1 + y^1 e^{-2z^3}, \\ z^2 = x^2 e^{-2z^3} + y^2 - 2z^1 y^3, \\ z^3 = x^3 + y^3 \end{array} \right. \tag{10}$$

уравнения левой обратной квазигруппы некоторым изотопическим преобразованием приводятся к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} z^1 = a^1 + y^1 e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3) e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{array} \right. \tag{11}$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой, задают на трехмерном многообразии Y действие трехпараметрической левой квазигруппы Бола

$Q(*)$:

$$\left\{\begin{array}{l} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3} - (a^1 - b^1)(a^3 - b^3)e^{a^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{array}\right. \tag{12}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения

$$\left\{\begin{array}{l} z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3)e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3, \end{array}\right. \tag{13}$$

(второе и третье уравнения системы (11)), задают действие трехпараметрической квазигруппы (12) на двумерной плоскости $\bar{Y} = \{(y^2, y^3)\}$, $\bar{Y} \subset Y$.

Уравнения (13) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. Множество Q с локальными симметриями $S_a(b) = a * b$, которые задаются уравнениями (12), будет трехмерным симметрическим пространством.

Пример 14. Рассмотрим последнюю из трех шестимерных тканей B_m, уравнения которых найдены в [7]:

$$\left\{\begin{array}{l} z^1 = x^1 e^{2z^3} + y^1 + 2z^2 x^3, \\ z^2 = x^2 + y^2 e^{2z^3}, \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{array}\right. \tag{14}$$

Для этой ткани, как и для ткани (10), тензор a^{ij} имеет ранг 2.

Уравнения левой ткани Бола B_l, определяемой левой обратной квазигруппой координатной квазигруппы (14), могут быть приведены к виду

$$\left\{\begin{array}{l} z^1 = a^1 + (y^1 - y^3 a^2)e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + y^2 e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{array}\right. \tag{15}$$

Эти уравнения определяют также действие некоторой трехпараметрической левой квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном многообразии Y. Уравнения квазигруппы $Q(*)$ находятся непосредственными вычислениями и имеют вид

$$\begin{cases} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3} - (a^2 - b^2)(a^3 - b^3)e^{-a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \qquad (16)$$

Как и выше, можно показать, что уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + (y^1 - a^2 y^3)e^{-a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3, \end{cases} \qquad (17)$$

(первое и третье уравнения системы (15)), задают действие квазигруппы (16) на двумерной плоскости $\bar{Y} = \{(y^1, y^3)\}$, $\bar{Y} \subset Y$. Уравнения (17) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \bar{Y}$. База Q первого слоения этой ткани с локальными симметриями $S_a(b) = a * b$, которые задаются уравнениями (16), будет трехмерным симметрическим пространством.

Список литературы

[1] *Акивис М. А.* Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей// Исслед. по теории квазигрупп и луп.– Кишинев.– Штиинца.– 1973.– С. 3–12.

[2] *Акивис М. А., Герасименко С. А.* О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией// Ткани и квазигруппы.– Калинин.– 1982.– С. 7–11.

[3] *Акивис М. А., Гольдберг В.* В. О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей// Докл. АН СССР.– 1972.– Т. 203.– № 2.– С. 263–266.

[4] *Сабинин Л. В., Михеев П. О.* Теория гладких луп Бола// Москва.– Ун-т дружбы народов.– 1985.– 80 с.

[5] *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* О квазигруппах Бола преобразований// Докл. РАН.– 2005.– Т. 401.– № 2.– С. 166–168.

[6] *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей// Изв. Вузов. Мат.– 2005.– № 5(516).– С. 56–62.

[7] *Федорова В. И.* Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}// Ткани и квазигруппы, Калинин, 1981, С. 10–123.

[8] *Шелехов А. М.* О три-тканях с эластичными координатными лупами// Деп. в ВИНИТИ 02.12.1987. №8465-В87.