Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 223-234

С. Е. Степанов

Финансовая Академия при правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: stepanov@vtsnet.ru

В. Н. Шелепова

Владимирский государственный гуманитарный университет, Россия
E-mail: verrochka@list.ru

Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи

Классическими методами математического анализа с использованием инфинитезимальных гармонических преобразований изучаются солитоны Риччи на некомпактных и компактных многообразиях.

Ключевые слова: *Инфинитезимальные гармонические преобразования, солитоны Риччи*

1. Введение

1.1. Теория потоков Риччи на гладких многообразиях, основы которой заложил Р. С. Гамильтон в серии статей, опубликованных в 80–90-х годах прошлого века, сегодня стала невероятно популярной (см. [1]; [2] и цитируемую там литературу).

Самоподобное решение уравнений Гамильтона потока Риччи связано с наличием на многообразии так называемого солитона Риччи, который может быть рассмотрен как фиксированная "стартовая" точка этого потока (см. [1], стр.21-22; [2], стр. 154-156).

1.2. Известные результаты в теории гамильтоновых потоков Риччи, в которых присутствуют солитоны Риччи, связаны, как правило, с требованием компактности для многообразий, на которых они рассматриваются (см. [2], стр. 128, 245, 266, 388, 514; [4], стр. 7; [5], стр. 123, 126-127 и др.).

С другой стороны список "открытых проблем" в теории гамильтоновых потоков Риччи (см. [2], стр. 265, 389-390) наряду с задачами, где присутствует условие компактности для многообразий с солитонами Риччи, включает и задачи с солитонами Риччи на некомпактных многообразиях.

Например, требуется доказать, что на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 3)$ не существует *растягивающегося* градиентного солитона Риччи с метрикой положительно защемленной кривизны Риччи. Это дополнило бы известный результат о растягивающемся солитоне Риччи на компактном многообразии, где он является градиентным (см. [4], стр. 7; [5], стр. 126-127) с эйнштейновой метрикой отрицательной кривизны Риччи (см. [1], стр. 117; [2], стр. 353; [5], стр. 123; 127).

Притом, что аналогичные результаты для *стабильного* солитона Риччи известны как на компактном (см. там же), так и некомпактном (см. [2], стр. 364) многообразиях. В последнем случае условием препятствия для существования градиентного стабильного солитона Риччи служит положительная защемлённость кривизны Риччи его метрики.

В настоящей статье мы изучим методами классического анализа солитоны Риччи, используя введенное ранее понятие инфинитезимального гармонического преобразования.

Результаты этой работы были анонсированы на двух международных конференциях (см. [12], стр. 127-128; [13], стр. 260-261).

2. Солитоны и потоки Риччи

2.1. *Солитоном Риччи* (см. [1], стр. 22; [2], стр. 353; [3]) на n-мерном ($n \geq 2$) связном дифференцируемом многообразии M^n называется решение (g_0, X_0, λ) дифференциальных уравнений

$$-2Ric_0 = L_{X_0} g_0 + 2\lambda g_0 \tag{2.1}$$

где g_0 — полная риманова метрика, X_0 — полное векторное поле, L_{X_0} — производная Ли по отношению к векторному полю X_0 и λ — некоторая постоянная.

Солитон Риччи называется *стабильным* (steady), если $\lambda = 0$, *стягивающимся* (shrinking), если $\lambda < 0$, и, наконец, *растягивающимся* (expanding), если $\lambda > 0$ (см. [1], стр. 22; [2], стр. 154; 353).

Солитон Риччи называется *градиентным* (см. [1], стр. 22; [2], стр. 154), если векторное поле X_0 является градиентом некоторой скалярной функции f . В этом случае уравнения (2.1) принимают вид

$$-Ric_0 = \nabla^0 \nabla^0 f + \lambda g_0 \tag{2.2}$$

для связности Леви-Чивита ∇^0 метрики g_0. Для градиентного солитона Риччи принято обозначение (g_0, f, λ).

2.2. Если на n-мерном ($n \geq 2$) связном дифференцируемом многообразии M^n задан солитон Риччи (g_0, X_0, λ), то на включающем 0 интервале $J \subset R$ существует порождаемое векторными полями $Y_t = (1 + \lambda t)^{-1} X_0$ 1-параметрическое семейство диффеоморфизмов $\psi_t = \psi(t)$ многообразия M^n, которое, в свою очередь, задает 1-параметрическое семейство метрик $g_t = g(t) = (1 + \lambda t)\psi_t^* g_0$, являющееся решением уравнений Гамильтона потока Риччи (см. [1], стр. 21-22; [2], стр. 154-156)

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_t$$

для тензора Риччи Ric_t метрики $g_t = g(t)$. Верно и обратное.

3. Инфинитезимальные гармонические преобразования

3.1. *Инфинитезимальным гармоническим преобразованием* риманова многообразия (M^n, g) называется векторное поле X

такое, что индуцированная им 1-параметрическая группа локальных преобразований многообразия (M^n, g) состоит из локальных гармонических диффеоморфизмов (см. [6] - [8]).

Множество инфинитезимальных гармонических преобразований представляет собою $\mathbf{R}$-модуль, который на компактном многообразии (M^n, g) имеет конечную размерность (см. [6]; [8]). При этом алгебра Ли инфинитезимальных изометрий многообразия (M^n, g) содержится в $\mathbf{R}$-модуле инфинитезимальных гармонических преобразований (см. там же).

Инфинитезимальные гармонические преобразования составляют ядро определенного в [6] самосопряженного лапласиана Яно

$$\Box = \delta \circ \delta^* - \delta^* \circ \delta,$$

где δ — оператор кодифференцирования, формально сопряженный оператору $\delta^* X = L_X g = 0$. Установлена связь между известным (см., напр., [10], стр. 167) лапласианом Ходжа Δ_H и лапласианом Яно $\Box$, имеющая вид (см. [6]; [8])

$$\Box = \Delta_H - 2Ric^*, \tag{3.1}$$

где Ric^*- оператор Риччи, соответствующий относительно метрики g тензору Риччи Ric.

3.2. Рассмотрим солитон Риччи (g_0, X_0, λ) на n-мерном $(n \geq 2)$ связном дифференцируемом многообразии M^n. Справедлива

Лемма 1. *Векторное поле X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ), заданного на n-мерном $(n \geq 2)$ многообразии M^n, является инфинитезимальным гармоническим преобразованием риманова многообразия (M^n, g_0).*

Доказательство. Перепишем уравнения (2.1) солитона Риччи (g_0, X_0, λ) в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ многообразия M^n

$$-R_{ij} = \frac{1}{2} L_{X_0} g_{ij} + \lambda g_{ij} \tag{3.2}$$

для $L_{X_0}g_{ij} := \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$. Здесь $X_i = g_{ij}X^j, R_{ij}$ и g_{ij} — компоненты 1-формы ω_0, двойственной векторному полю X_0, тензоров Риччи Ric_0 и g_0, а также ∇_k — символ ковариантного дифференцирования связности Леви-Чивита ∇^0 в направлении $\partial_k = \partial/\partial x^k$, в записи которых символ "0" мы для упрощения обозначений опускаем.

Для символов Кристоффеля Γ_{ij}^k связности Леви-Чивита ∇^0 справедливы формулы ([9], Глава 1, формулы (5.12) и (5.21))

$$L_X\Gamma_{ij}^k = \nabla_i\nabla_j X^k + R_{ilj}^k X^l;$$

$$L_X\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\{\nabla_i(L_X g_{lj}) + \nabla_j(L_X)g_{il} - \nabla_l(L_X g_{ij})\},$$

Сведем эти две формулы в одну и на основании (5.1) придадим ей следующий вид

$$\nabla_i\nabla_j X^k + R_{ilj}^k = \frac{1}{2}g^{kl}\{-\nabla_i R_{lj} - \nabla_j R_{il} + \nabla_l R_{ij}\}. \tag{3.3}$$

Если свернуть левую и правую части равенства (3.3) с g^{ij}, получим

$$\Box X^k := -(g^{ij}\nabla_i\nabla_j X^k + R_l^k X^l) = 0, \tag{3.4}$$

поскольку $2g^{ij}\nabla_i R_{jl} = \nabla_l s_0$.

Следовательно, векторное поле X_0 солитона Риччи

$$(g_0, X_0, \lambda),$$

как и двойственная ему 1-форма ω_0, принадлежат ядру оператора К. Яно $\Box$ (см. [9], стр. 40). Последнему, как это показано в [6] и [8], можно придать вид $\Box = \delta\circ\delta^* - \delta^*\circ\delta$. В силу (3.1) равенство (3.4) можно еще представить в следующем виде (см. [7])

$$\Delta_H X^j = 2R_k^j X^k, \tag{3.5}$$

где R_k^j - компоненты оператора Риччи Ric_0^*. $\Box$

Замечание 1. *Зная, что вектор X_0 солитона Риччи*

$$(g_0, X_0, \lambda)$$

является инфинитезимальным гармоническим преобразованием, свойства этого преобразования можно приписать солитону Риччи не только на римановом, но келеровом многообразиях (см. [6] - [8]).

4. Энергия векторного поля солитона Риччи

4.1. Для векторного поля X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) введем в рассмотрение скалярную функцию $E(X_0) = 2^{-1}g_0(X_0, X_0)$, называемую энергией векторного поля X_0 (см., напр., [11]). Справедлива

Теорема 1. *Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 2)$. Если энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет критическую точку $x \in M^n$, в которой $X_0(x) \neq 0$, тогда солитон Риччи будет стягивающимся (соответственно растягивающимся или стабильным), если в этой точке $Ric_0(X_0, X_0) > 0$ (соответственно $Ric_0(X_0, X_0) < 0$ или $Ric_0(X_0, X_0) = 0$).*

Доказательство. Из уравнений солитона Риччи (3.2) последует

$$-Ric_0(X_0, X_0) = X_0(E(X_0)) + 2\lambda E(X_0), \tag{4.1}$$

поскольку

$$X_0(E(X_0)) = g(X_0, \nabla^0_{X_0} X_0).$$

Пусть теперь $x \in M^n$ — критическая точка функции $E(X_0)$, тогда в этой точке $X_0(E(X_0)) = 0$. В итоге

$$Ric_0(X_0(x), X_0(x)) = -2\lambda E(X_0)(x).$$

Если при этом $X_0(x) \neq 0$, то утверждения теоремы 1 становятся очевидными. □

Замечание 2. *Из теоремы, в частности, следует, что на компактном многообразии солитон Риччи с положительной кривизной Риччи и необращающимся в нуль векторным полем X_0 с необходимостью является стягивающимся.*

Теорема 2. *Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 2)$ такой, что метрика g_0 имеет отрицательную кривизну Риччи, тогда солитон Риччи будет растягивающимся, если энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in M^n$.*

Доказательство. Допустим, что энергия $E(X_0)$ векторного поля X_0 имеет локальный максимум в некоторой точке $x \in M^n$, тогда в этой точке $\Delta E(X_0) \leq 0$. С другой стороны, для $E(X_0)$ непосредственные вычисления с использованием равенства (3.4) дают

$$\begin{aligned} \Delta E(X_0) &:= trace_g(Hess(E(X_0)) = \\ &= g_0(\nabla^0 X_0, \nabla^0 X_0) - Ric_0(X_0, X_0). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Из (4.2) в предположении об отрицательной определенности кривизны Риччи следует, что на M^n всюду $\Delta E(X_0) > 0$, если только $X_0 \neq 0$. Из этих двух неравенств заключаем, что X_0 должен быть нулем в точке $x \in M^n$. Но так как $E(X_0)$ имеет локальный максимум в $x \in M^n$ и при этом $E(X_0) > 0$ всюду на M^n, если только $X_0 \neq 0$, то X_0 должен обращается в нуль в некоторой окрестности U_x точки $x \in M^n$.

Тогда же в окрестности U_x уравнения (2.1) примут вид

$$Ric_0 = -\lambda g_0,$$

из которых последует, что $\lambda > 0$, а потому (g_0, X_0, λ) - растягивающийся солитон Риччи. □

4.2. В заключение рассмотрим компактный вариант теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть на компактном многообразии M^n задан солитон Риччи (g_0, X_0, λ). Если тензор Риччи Ric_0 метрики g_0 удовлетворяет условию $Ric_0(X_0, X_0) \leq 0$, то солитон — стабильный, метрика g_0 — Риччи-плоская, а векторное поле X_0 — ковариантно постоянное. Если же тензор Риччи отрицательно определен, то солитон — растягивающийся, метрика g_0 — эйнштейновая, а векторное поле X_0 — нулевое.*

Доказательство. Рассмотрим для компактного многообразия M^n $(n \geq 2)$ ориентированное двулистное накрытие и воспользуемся теоремой Грина $\int_{M^n} divXdv = 0$ для $divX = \Delta E(X_0)$. Тогда в соответствие с (4.2) получим:

$$\int_{M^n} [g_0(\nabla^0 X_0, \nabla^0 X_0) - Ric_0(X_0, X_0)] = 0. \tag{4.3}$$

При $Ric_0(X_0, X_0) \leq 0$ из (4.3) заключаем, что $Ric_0(X_0, X_0) = 0$ и $\nabla_0 X_0 = 0$. При этом из (4.1) последует, что $\lambda = 0$, а из (2.1), что $Ric_0 = 0$. Более того, если $Ric_0(X_0, X_0) < 0$, то из (4.3) заключаем, что $X_0 = 0$, а это автоматически влечет, что $\lambda > 0$. При этом из (2.1) последует, что $Ric_0 = -\lambda g_0$. □

Замечание 3. *Поскольку доказано (см. Введение), что растягивающийся и стабильный солитоны Риччи на компактном многообразии являются градиентными с метриками соответственно эйнштейновой с отрицательной кривизной Риччи и Риччи-плоской, то теорему 3 можно рассматривать как обратное, дополняющее данное утверждение.*

5. Солитоны Риччи с метрикой постоянной скалярной кривизны

5.1. Пусть скалярная кривизна s_0 метрики g_0, определяемая как след оператора Риччи Ric_0^*, является постоянной величиной. Справедлива

Теорема 4. *Пусть (g_0, X_0, λ) — солитон Риччи на некомпактном многообразии $M^n (n \geq 2)$ с метрикой g_0 постоянной скалярной кривизны s_0. Если $s_0 = 0$, то метрика g_0 будет Риччи-плоской, а векторное поле X_0 — инфинитезимальной гомотетией. Если же $s_0 \neq 0$, то ненулевые λ и s_0 имеют разные знаки и при этом для*

(1) *стабильного солитона метрика g_0 будет Риччи-плоской, а векторное поле X_0 - инфинитезимальной изометрией;*

(2) *стягивающегося солитона* $0 < s_0 \le n|\lambda|$;
(3) *растягивающегося солитона* $-n\lambda \le s_0 < 0$.

Доказательство. На основании равенства $\delta\Delta_H = \Delta_h\delta$ (см. [10], стр. 167) из уравнений (5.4) выводим:

$$\Delta_H \delta X_0 = \delta(2Ric_0^* X_0),$$

где в левой части имеем нуль, поскольку

$$\Delta_H \delta X_0 = -\Delta_H div X_0 = \Delta_H(s_0 + n\lambda) = 0,$$

и одновременно в правой части имеем:

$$\delta(2Ric_0^* X_0) = -(2\nabla^k R_{kj})X^j - 2R_{kj}\nabla^k X^j =$$

$$= -X^j \nabla_j s_0 - R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k) = -R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k).$$

В итоге приходим к равенству

$$R_{kj}(\nabla^k X^j + \nabla^j X^k) = 0. \tag{5.1}$$

Из уравнений солитона Риччи (3.2) находим:

$$L_{X_0} g_{ij} = -2(R_{ij} + \lambda g_{ij}),$$

с учетом этого из (5.1) выводим, что

$$-2R_{kj}(R^{kj} + \lambda g^{kj}) = -2(\|Ric\|^2 + \lambda s_0) = 0,$$

откуда

$$\lambda s_0 = -\|Ric\|^2 \le 0. \tag{5.2}$$

Из (5.2) следует, во-первых, что ненулевые λ и s_0 имеют разные знаки и, во-вторых, что при $\lambda = 0$ или $s_0 = 0$ метрика g_0 с необходимостью становится Риччи-плоской. Причем в первом случае векторное поле X_0 — инфинитезимальная изометрия, что очевидно, а во втором — инфинитезимальная гомотетия, поскольку $L_{X_0} g_0 = -2\lambda g_0$.

Согласно (3.2) имеем: $R_{ij} = -2^{-1} L_{X_0} g_{ij} - \lambda g_{ij}$ и тогда из (5.1) последует, что $\|L_{X_0} g_{ij}\|^2 - 4\lambda(s_0 + n\lambda) = 0$, откуда

$$\lambda(s_0 + n\lambda) = \frac{1}{4}\|L_{X_0} g_{ij}\|^2 \ge 0 \tag{5.3}$$

Если теперь предположить, что $s_0 > 0$, тогда из (5.3) при $\lambda < 0$ следует, что $0 < s_0 \leq n \mid \lambda \mid$. Если же $s_0 < 0$ и $\lambda > 0$, то из (5.3) следует, что $-n\lambda \leq s_0 < 0$. $\square$

5.2. Поскольку геометрия растягивающегося и стабильного солитонов Риччи на компактном многообразии известна (см. теорему 3), то компактный вариант теоремы 4 сформулируем как теорему о стягивающимся солитоне Риччи.

Теорема 5. *Для того чтобы на компактном многообразии M^n $(n > 2)$ метрика g_0 стягивающегося солитона Риччи*

$$(g_0, X_0, \lambda)$$

была эйнштейновой, необходимо и достаточно, чтобы ее скалярная кривизна s_0 была постоянной величиной.

Доказательство. Пусть метрика g_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ), заданного на компактном многообразии M^n, имеет постоянную скалярную кривизну s_0. Воспользуемся интегральной формулой К. Яно (см. [9], Глава II, формула (1.14))

$$\int_{M^n} (g(\square X + n^{-1}(n-2)\nabla\delta X, X) - 2^{-1} \parallel L_X g + 2n^{-1}\delta X g \parallel^2) dV = 0,$$

являющейся одной из разновидностей теоремы Грина.

Для векторного поля X_0 солитона Риччи (g_0, X_0, λ) и постоянной скалярной кривизны s_0 имеем $\square X_0 = 0$ и

$$\nabla^0 \delta X_0 = \nabla^0 (s_0 + n\lambda) = 0.$$

В результате из формулы последует, что $L_{X_0} g = -2n^{-1}\delta X_0 g_0$. Более того, с помощью теоремы Грина $\int_{M^n} \delta X dv = 0$ находим, что $s_0 = -n\lambda > 0$, а с учетом (5.3) и $L_{X_0} g_0 = 0$. Тогда уравнения (2.1) солитона Риччи примут вид $Ric_0 = -\lambda g_0 = n^{-1} s_0 g_0$. Обратное очевидно. $\square$

Замечание 4. *Если в дополнение к условиям теоремы 5 потребовать защемлённость кривизны Риччи вида $Ric_0 < \frac{1}{2} s_0 g_0$,* *то метрика g_0 будет иметь положительную постоянную секционную кривизну.*

6. Двумерные градиентные солитоны Риччи

6.1. Рассмотрим солитон Риччи (g_0, X_0, λ) на двумерном связном многообразии M^2. Тогда $Ric_0 = 2^{-1}s_0 g_0$, причем в общем случае $s_0 \neq \mathrm{const}$. Одновременно из уравнений солитона Риччи (2.1) выводим

$$L_{X_0} g_0 = -2(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0 \tag{6.1}$$

и, следовательно, X_0 — инфинитезимальное конформное преобразование. Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть на связном многообразии M^2 существует градиентный солитон Риччи (g_0, f, λ), тогда при $f \neq const$ риманово многообразие (M^2, g_0) конформно сфере 3-мерного евклидова пространства R^3.*

Доказательство. Для градиентного солитона (g_0, f, λ) уравнения (6.1) предстанут в следующем виде

$$\nabla^0\nabla^0 f = -(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0,$$

откуда последует, что $\Delta f = -2(2^{-1}s_0 + \lambda)$, а потому уравнения градиентного солитона Риччи запишутся следующим образом $\nabla^0\nabla^0 f = 2^{-1}\Delta f g_0$.

Теперь осталось сослаться на теорему (см. [9], Глава 2, Теорема 6.3), согласно которой наличие на n-мерном ($n \geq 2$) связном полном римановом многообразии (M^n, g_0) скалярной функции f ($f \neq const$) являющейся решением уравнений

$$\nabla^0\nabla^0 f = n^{-1}\Delta f g_0,$$

служит необходимым и достаточным условием конформности риманова многообразия (M^n, g_0) гиперсфере n-мерного евклидова пространства R^{n+1}. □

Список литературы

[1] *Chow B., Knopf D.* The Ricci flow: An introduction // American Mathematical Society, Science Press. – 2004.

[2] *Chow B., Lu P., Ni L.* Hamilton's Ricci flow. // American Mathematical Society, Science Press. – 2006.

[3] *Hamilton R.S.* The Ricci flow on surfaces. // Contemp.Math. – 1988.– **71**. – Pp.237–261.

[4] *Perelman G.* The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. // arXiv:math.DG/0211159v1 [math.DG]– 11 Nov 2002

[5] *Cao H.-D.* Geometry of Ricci solitons. // Chin. Ann. Math., Series B. – 2006.– **27**. – Pp.142.

[6] *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations. // Annals of Global Analysis and Geometry. – 2003.– **24**. – Pp.291–299.

[7] *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Гармонические диффеоморфизмы многообразий. // Алгебра и Анализ. – 2004.– **16**. №2. – Pp.154–171.

[8] *Смольникова М.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Инфинититезимальные гармонические преобразования. // Известия вузов. Математика. – 2004.– **5**. – Pp.69–75.

[9] *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. // New York, Marcel Dekker. – 1970.

[10] *Ж.де Рам.* Дифференцируемые многообразия. // М. – 1956

[11] *Udriste C.* Properties of torse forming vector fields. // Tensor, N.S. – 1985.– **42**. – Pp.137–144.

[12] *Степанов С.Е., Шелепова В.Н.* О солитонах Риччи с условиями на скалярную кривизну и кривизну Риччи. // Тезисы докладов межд. конф. "Геометрия в Одессе-2008". – 2008.– Pp.127–128.

[13] *Шелепова В.Н.* Солитоны Риччи на двумерном полном многообразии. // Межд. конф. по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль. – 2008.– Pp.260–261.