Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 195-206

Е. Н. Синюкова

Южноукраинский педагогический университет
имени К. Д. Ушинского, Одесса
E-mail: Marbel@ukr.net

О геодезической однозначной определенности в целом некоторых специальных классов римановых пространств

Отримані певні теореми про геодезичні відображення "у цілому" деяких компактних та некомпактних ріманових просторів.

Получено ряд теорем о геодезических отображениях "в целом" некоторых компактных и некомпактных римановых пространств.

Some theorems of geodesic mappings in a whole of certain compact and non-compact Riemannian spaces are obtained.

Ключевые слова: *riemannian space, a geodesic mapping*

Под C^r-многообразием M^n $(n \in N,\ r > 1)$ будем понимать хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, у каждой точки которого существует окрестность, гомеоморфная некоторой области пространства R^n, любые две такие окрестности C^r-согласованы между собой. На подобном многообразии существует риманова C^{r-1}-метрика (задаваемая бесконечным числом способов, не обязательно положительно определенная), превращающая его в риманово C^r-пространство V^n [2].

Пусть J — непустой интервал, отрезок или полуинтервал прямой R^1. *Дифференцируемым путем* (*параметризованой кривой*) класса C^k в C^r-многообразии M^n $(1 \leq k \leq r)$ называют C^k-отображение $l : J \to M^n$. C^k-пути $l_1 : J_1 \to M^n$ и $l_2 : J_2 \to M^n$ считают C^k-еквивалентными, если существует такой C^k-диффеоморфизм $\gamma : J_1 \to J_2$, что $l_1 = l_2 \circ \gamma$ на J_1. Класс C^k-эквивалентных C^k-путей называют C^k-кривой в M^n, каждый путь этого класса — параметризацией данной кривой. C^k-кривая L однозначно определяется любым своим путем l. В каждой локальной системе координат C^k-путь l задается уравнениями:

$$x^h = x^h(t),\ t \in J,\ x^h(t) \in C^k.$$

Точка $M(t)$ называется геодезической точкой C^2-кривой L риманова C^r-пространства V^n, $(r \geq 2)$, если касательный к L вектор

$$\eta^h(t) = \frac{dx^h}{dt}$$

удовлетворяет в этой точке условию

$$\eta^h_{,\,\alpha}\eta^\alpha \equiv \frac{d\eta^h}{dt} + \Gamma^h_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = \rho\eta^h, \tag{1}$$

где инвариант ρ зависит только от t. Если C^2-кривая L риманова C^r-пространства V^n, $(r \geq 2)$ состоит лишь из геодезических точек, то она называется геодезической линией этого пространства.

Соотношения (1) говорят о том, что кривая L является геодезической тогда и только тогда, когда касательный вектор к ней коллинеарен вдоль нее. В любом римановом пространстве V^n класса C^r $(r > 1)$ через каждую точку M_0 в каждом направлении η^h_0 можно провести геодезическую линию и притом только одну (см., например, [3]).

Предположим, что между римановыми C^r-пространствами V^n и $\overline{V^n}$ $(n \geq 1,\ r > 1)$ установлен C^r-диффеоморфизм. Если при этом все геодезические линии пространства V^n переходят в геодезические линии пространства $\overline{V^n}$, то говорят, что данный C^r- диффеоморфизм является геодезическим отображением (глобально, в целом) риманова пространства V^n на риманово пространство $\overline{V^n}$.

Чаще, однако, рассматривают локальные геодезические отображения римановых пространств. Пусть отображение f, определенное в некоторой окрестности U точки M_0 риманова C^r-пространства V^n $(n \geq 1,\ r > 1)$ C^r-диффеоморфно переводит эту окрестность в окрестность $\overline{U}$ некоторого C^r-пространства $\overline{V^n}$ так, что при этом все геодезические линии, содержащиеся в окрестности U, переходят в геодезические линии окрестности $\overline{U}$. Тогда f есть отображение, геодезическое в окрестности точки M_0. Если такие отображения можно определить для некоторой окрестности каждой точки пространства V^n, то говорят, что V^n локально допускает геодезические отображения.

Очевидно, всякое геодезическое отображение пространства V^n на пространство $\overline{V^n}$ является и локальным геодезическим отображением. Более того, из определения геодезического отображения тотчас же вытекает, что C^r-диффеоморфизм между римановыми C^r-пространствами V^n и $\overline{V^n}$, являющийся локальным геодезическим отображением, будет и геодезическим отображением V^n на $\overline{V^n}$ в целом. Существуют, однако, широкие классы римановых пространств, локально допускающих нетривиальные (отличные от аффинных) геодезические отображения, но не допускающие таких отображений в целом [4].

Пусть координатная окрестность U C^r-пространства V^n $(n > 1,\ r > 1)$ C^r-диффеоморфна некоторой координатной окрестности $\overline{U}$ C^r-пространства $\overline{V^n}$. Доказано (см., например, [6]), что этот C^r-диффеоморфизм тогда и только тогда будет геодезическим отображением U на $\overline{U}$, когда в общей по отображению системе координат выполняются условия:

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_i \overline{g}_{kj} + \psi_j \overline{g}_{ki}. \tag{2}$$

Здесь $\overline{g}_{ij}$ — метрический тензор пространства $\overline{V^n}$, ψ_i — некоторый ковектор, ковариантное дифференцирование производится в пространстве V^n. Равенство (2) инвариантно относительно выбора локальной системы координат.

В соответствии с приведенными выше определениями, соотношение (2), очевидно, можно использовать и для изучения геодезических отображений римановых пространств в целом: для того, чтобы C^r-диффеоморфизм между C^r-пространствами V^n и $\overline{V^n}$ $(n \geq 2,\ r > 1)$ был геодезическим отображением V^n на $\overline{V^n}$ необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой точки пространства V^n в общей по отображению системе координат выполнялись условия (2).

Фигурирующий в (2) ковектор ψ_i определяет рассматриваемое геодезическое отображение. Так как в каждом римановом пространстве V^n

$$\Gamma^{\alpha}_{i\alpha} = \frac{1}{2}\partial_i \ln |g|,$$

где $g = \det ||g_{ij}|| (\neq 0)$, то

$$\psi_i = \frac{1}{2(n+1)}\partial_i \ln \left|\frac{\overline{g}}{g}\right|, \tag{3}$$

где $\overline{g} = \det ||\overline{g}_{ij}|| (\neq 0)$. В силу того, что $\frac{\overline{g}}{g}$ при преобразовании координат представляет собой инвариант, ковектор градиентен : $\psi_i = \partial_i \psi$. При $\psi_i \equiv 0$ геодезическое отображение вырождается в аффинное и, как уже говорилось, считается тривиальным, при ψ_i не совпадающем тождественно с нулем — нетривиальным.

Если пространство V^n не допускает (локально или глобально) нетривиальных геодезических отображений, то говорят, что оно (локально или глобально) геодезически однозначно определено в том смысле, что его объект аффинной связности единственным образом определяется совокупностью его геодезических линий.

C^r-диффеоморфные римановы C^r-пространства V^n и $\overline{V^n}$, как и C^r-диффеоморфные окрестности этих пространств, всегда можно отнести к общему по рассматриваемому диффеоморфизму атласу, то есть, фактически, считать, что метрические тензоры g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$ определены на одном и том же C^r-многообразии M^n (некоторой его окрестности). Поэтому вопрос о том, допускает ли данное V^n локально или глобально нетривиальные геодезические отображения, сводится к вопросу существования в некоторой окрестности каждой точки V^n или на всем V^n симметричного неособенного C^{r-1}-тензора $\overline{g}_{ij}$ и C^{r-2}-ковектора $\psi_i (\neq 0)$, удовлетворяющих уравнениям (2), (3). Следовательно, в заданном римановом пространстве V^n (2) и (3) образуют основную систему уравнений теории геодезических отображений (в форме Леви-Чивиты). Это система нелинейных дифференциальных уравнений в ковариантных производных первого порядка относительно компонент тензора $\overline{g}_{ij}$, не являющаяся системой типа Коши. В общем случае такие системы не допускают эффективного исследования регулярными методами на предмет существования и единственности их решений.

Положив

$$a_{ij} = e^{2\psi} \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \tag{4}$$

$$\lambda_i = -e^{2\psi} \psi_\alpha \overline{g}^{\alpha\beta} g_{\beta i}, \tag{5}$$

$$\mu = e^{2\psi} [(n+1)\psi_\alpha \psi_\beta - \psi_{\alpha,\ \beta}] \overline{g}^{\alpha\beta}, \tag{6}$$

Н. С. Синюков перешел [3] к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, допускающей регулярные методы исследования. Точнее, им было доказано, что для того, чтобы риманово C^r-пространство V^n $(n \geq 2,\ r > 3)$ допускало нетривиальные геодезические отображения, необходимо и достаточно, чтобы система дифференциальных уравнений

$$a_{ij,\ k} = \lambda_{(i} g_{j)k}, \tag{7}$$

$$n\lambda_{i,\ k} = \mu g_{ik} + a_{\alpha i} R^{\alpha}_{\cdot\ k} - a_{\alpha\beta} R^{\alpha\ \ \beta}_{ik\ \cdot}, \tag{8}$$

$$(n-1)\mu_{,\ k} = 2(n-1)\lambda_\alpha R^{\alpha}_{\cdot\ k} + a_{\alpha\beta} \left(2R^{\alpha\ \ \ \beta}_{\cdot\ k\ ,\ \cdot} - R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot,\ k} \right), \tag{9}$$

имела в этом пространстве решение относительно симметричного неособенного дважды ковариантного C^{r-1}-тензора a_{ij}, ковариантного C^{r-2}-вектора $\lambda_i (\neq 0)$ и C^{r-3}-инварианта μ.

Система (7)–(9) первого порядка, типа Коши, линейная, с однозначно определенными пространством V^n коэффициентами. Ковектор λ_i, удовлетворяющий уравнениям системы (7)–(9), градиентен:

$$\lambda_i = \partial_i \lambda, \tag{10}$$

где, с точностью до постоянной, $\lambda = \frac{1}{2} a^{\gamma}_{.\gamma}$

$$\mu \equiv \lambda^{\alpha}_{.,\alpha} \equiv g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial x^j} - \lambda_\alpha \Gamma^{\alpha}_{ij} \right).$$

По известному решению системы (7)–(9) метрический тензор $\overline{g}_{ij}$ пространства $\overline{V^n}$, на которое в силу наличия этого решения, рассматриваемое пространство V^n допускает нетривиальное геодезическое отображение, находится из соотношений, обратных к (4)–(6). Именно, из (4) и (5) вытекает, что

$$\psi_i = -\lambda_\alpha a^{\alpha\beta} g_{\beta i} = \frac{1}{2} \partial_i \ln \left| \frac{\widetilde{g}}{g} \right|, \tag{11}$$

где $a^{\alpha\beta}$ — элементы матрицы, обратной к $||a_{ij}||$, $\widetilde{g} = \det ||a^{ij}_{..}||$. Значит, с точностью до постоянной

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\widetilde{g}}{g} \right|$$

и в силу (4),

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi} a^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}. \tag{12}$$

Соотношения перехода (4)–(6) и (11)–(12) показывают, что система (7)–(9), подобно системе основных уравнений в форме Леви-Чивиты, характеризует как локальные геодезические отображения, так и геодезические отображения в целом. Ее решения носят тогда соответственно локальный или глобальный характер.

Применение известной теоремы Грина [2,5] позволяет доказать, что справедлива

Теорема 1. *Геодезическое отображение в целом компактного, ориентируемого, с положительно определенной метрикой риманова C^r-пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$) на риманово C^r-пространство $\overline{V^n}$ тривиально, если имеет место неравенство*

$$\int\limits_{V^n} e^{4\psi} \overline{g}^{\alpha\beta} \overline{g}^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv \geq 0, \tag{13}$$

где

$$T_{\alpha\gamma\sigma\beta} = g_{\gamma\beta} R_{\alpha\sigma} - R_{\alpha\gamma\sigma\beta}. \tag{14}$$

Доказательство. Для решения a_{ij}, $\lambda_i (\neq 0)$, μ системы (7)–(9), отвечающего определенному некоторым ковектором $\psi_i (\neq 0)$ нетривиальному геодезическому отображению в целом рассматриваемого пространства V^n на C^r-пространство $\overline{V^n}$, в соответствии с уравнениями системы (7)–(9) имеют место соотношения:

$$\left(\lambda^{i}_{\cdot} a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma}\right)_{,i} = \mu a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma} + 2\lambda_\alpha \lambda^{\alpha}_{\cdot}\ ,$$

$$\left(\lambda_\alpha a^{\alpha i}_{\cdot\ \cdot}\right)_{,i} = \frac{1}{n} \mu a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma} + \frac{1}{n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\ \cdot} a^{\gamma\sigma}_{\cdot\ \cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} + (n+1) \lambda_\alpha \lambda^{\alpha}_{\cdot}.$$

Но по теореме Грина

$$\int\limits_{V^n} \left(\lambda^{i}_{\cdot} a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma}\right)_{,i} dv = 0; \int\limits_{V^n} \left(\lambda_\alpha a^{\alpha i}_{\cdot\ \cdot}\right)_{,i} dv = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{V^n} \mu a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma} dv = -2 \int\limits_{V^n} \lambda_\alpha \lambda^{\alpha}_{\cdot} dv, \tag{15}$$

$$\int\limits_{V^n} \mu a^{\gamma}_{\cdot\ \gamma} dv + \int\limits_{V^n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\ \cdot} a^{\gamma\sigma}_{\cdot\ \cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv + n(n+1) \int\limits_{V^n} \lambda^{\alpha}_{\cdot} \lambda_\alpha dv = 0. \tag{16}$$

Подставив (15) в (16) и приведя подобные члены, найдем:

$$\int\limits_{V^n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\,\cdot} a^{\gamma\sigma}_{\cdot\,\cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv + (n-1)(n+2) \int\limits_{V^n} \lambda_\alpha \lambda^\alpha_{\cdot} dv = 0. \tag{17}$$

Когда

$$\int\limits_{V^n} a^{\alpha\beta}_{\cdot\,\cdot} a^{\gamma\sigma}_{\cdot\,\cdot} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} dv \geq 0, \tag{18}$$

(17) возможно лишь при $\lambda_i \equiv 0$. Значит, в этом случае отображение пространства V^n не может быть нетривиальным. Подставив в (18) вместо тензора $a^{ij}_{\cdot\,\cdot}$ его выражение через метрический тензор $\overline{g}_{ij}$ пространства V^n (формулы (4)) мы перейдем к неравенству (13). □

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Теорема 2. *Компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r-пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} имеет место неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} \geq 0$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Известно [4], что обладающие положительно определенной метрикой компактные пространства постоянной неположительной кривизны в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений. Подчеркнем, что такие пространства удовлетворяют и условиям теоремы 2. В самом деле, в этом случае

$$T_{ijkl} = -k\left(n g_{jl} g_{ik} - g_{jk} g_{il}\right)$$

и для произвольного симметричного тензора b^{ij}

$$b^{il} b^{jk} T_{ijkl} = -k\left(n b^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta} b^{\alpha\beta} - \left(b^{\gamma}_{\ \cdot\gamma}\right)^2\right).$$

Но $nb_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot} b^{\alpha\beta} - \left(b^{\gamma}{}_{\cdot\gamma}^{\cdot}\right)^2 \geq 0$, если метрика рассматриваемого пространства положительно определена. Значит, при $k \leq 0$

$$b^{il} b^{jk} T_{ijkl} \geq 0$$

для любого симметричного тензора b^{ij}.

Теорема 3. *Компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r-пространства V^n ($n > 1$, $r > 2$), в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0 \tag{19}$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Доказательство. Предположим, в удовлетворяющем условиям теоремы 3 пространстве V^n $b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0$ для любого симметричного тензора b^{ij}. Положим $b^{ij} = p^i q^j + p^j q^i$, где

$$g_{ij} p^i q^j = 0, \; g_{ij} p^i p^j = g_{ij} q^i q^j = 1.$$

(Для каждой точки пространства V^n векторы p^i, q^j, удовлетворяющие этим условиям хотя бы в данной точке V^n, можно выбрать всегда [56]). Тогда

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma\sigma\beta} b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} &= R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \left(p^\alpha q^\beta + p^\beta q^\alpha\right) (p^\gamma q^\sigma + p^\sigma q^\gamma) = \\ &= R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\sigma q^\beta q^\gamma + R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\gamma p^\beta q^\alpha q^\sigma = \\ &= -2 R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\beta q^\gamma q^\sigma. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$R_{\alpha\gamma\sigma\beta} p^\alpha p^\beta q^\gamma q^\sigma \geq 0 \tag{20}$$

В произвольной точке исследуемого пространства V^n рассмотрим теперь единичный вектор p^i и $(n-1)$ единичных векторов $q^i_{(1)}$, $q^i_{(2)}, \ldots, q^i_{(n-1)}$, ортогональных вектору p^i и между собой. (Их также можно выбрать всегда [6]). Из (20) вытекает, что $R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta q^\gamma_{(a)} q^\sigma_{(a)} \geq 0$, $a = \overline{1, n-1}$. Кроме того, очевидно, $R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta p^\gamma p^\sigma \equiv 0$. Следовательно,

$$R_{\alpha\gamma\sigma\beta}p^\alpha p^\beta \left(p^\gamma p^\sigma + \sum_{a=1}^{n-1} q^\gamma_{(a)} q^\sigma_{(a)} \right) \geq 0. \tag{21}$$

С другой стороны, известно (см., например, [8]), что

$$p^\gamma p^\sigma + \sum_{a=1}^{n-1} q^\gamma_{(a)} q^\sigma_{(a)} = g^{\gamma\sigma}.$$

Поэтому (21) означает, что

$$R_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta \geq 0 \tag{22}$$

для произвольного единичного вектора p^i. Так как метрика рассматриваемого пространства положительно определена, (22) имеет место не только для произвольного единичного, но и вообще для любого вектора p^i в каждой точке пространства V^n. Но тогда для произвольного симметричного тензора b^{ij} в каждой точке пространства V^n

$$R_{\alpha\beta}g_{\gamma\sigma}b^{\alpha\gamma}b^{\beta\sigma} \geq 0.$$

В самом деле, в произвольной точке V^n две формы $g_{\gamma\sigma}$ и $R_{\gamma\sigma}$ ($g_{\gamma\sigma}$ положительно определена) можно одновременно привести к диагональному виду [1]. Тогда

$$R_{\alpha\beta}g_{\gamma\sigma}b^{\alpha\gamma}b^{\beta\sigma} = \sum_{i=1}^{n} R_{ii}\left(b^{ii}\right)^2 \geq 0$$

в силу (21).

Теперь очевидно, что в рассматриваемом пространстве V^n

$$T_{\alpha\gamma\sigma\beta}b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma} = \left(g_{\gamma\beta}R_{\alpha\sigma} - R_{\alpha\gamma\sigma\beta}\right)b^{\alpha\beta}b^{\gamma\sigma} \geq 0.$$

По теореме 1 такие пространства в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений. $\square$

В [7] И. Сато исследовал свойства так называемых римановых пространств “отделимой”, кривизны, тензор Римана которых удовлетворяет соотношениям

$$R_{ijkl} = \sigma S_{ij} S_{kl},$$

где σ — ненулевая постоянная, S_{ij} — некоторый кососимметрический тензор. При этом, в частности, на такие пространства накладывались условия компактности, ориентируемости, положительной определенности метрики.

Нетрудно убедиться в том, что при $\sigma \leq 0$ компактные, ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы пространства "отделимой" кривизны удовлетворяют условиям теоремы 3 и, значит, в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений.

Справедливость известной теоремы Грина для векторных полей с компактным носителем, заданных и на некомпактных ориентированных многообразиях с фиксированным элементом объема [2], позволяет распространить доказанные теоремы 1—3 и на некомпактные римановы пространства.

В частности, справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r-пространства V^n $(n > 1,\ r > 2)$, в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} T_{\alpha\gamma\sigma\beta} \geq 0,$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений, для которых ковектор ψ_i имеет компактный носитель.

Теорема 5. *Ориентируемые, с положительно определенной метрикой римановы C^r-пространства V^n $(n > 1,\ r > 2)$, в которых для произвольного симметричного тензора b^{ij} справедливо неравенство*

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma\sigma\beta} \leq 0$$

в целом не допускают нетривиальных геодезических отображений, для которых ковектор ψ_i имеет компактный носитель.

Список литературы

[1] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц //М.: Гостехиздат, 1953, 419 с.

[2] *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии, т. I. // М.: Наука, 1981, 344 с.

[3] *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств, // М.: Наука, 1979, 255 с.

[4] *Синюкова Е.Н.* О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств, // Матем. заметки — 1981 — **30**, вып.6, с. 889—894

[5] *Степанов С.Е.* Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях // Фундаментальная и прикладная математика — 2005 — т. 11 — **1**, с. 35—84

[6] *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия, М. :ИЛ, 1948, 316с.

[7] *Sato I.* On Riemannian manifolds of separated curvature //Tohoku Math. J. – 1960.– **2**. – Pp.23–34.

[8] *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти //М., ИЛ, 1957, 152 с.