Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 77-81

Д. В. Кожухарь

Одесский Национальный Университет им. И. И. Мечникова, Одесса
E-mail: manx2@yandex.ru

Пример поворотно-конформного отображения псевдосферы со свойством взаимности

В статье рассмотрено специальное конформное отображение псевдосферы и показано что оно обладает свойством переводить геодезические линии в специальные линии — решения вариационной изопериметрической задачи. Показано что обратное отображение обладает аналогичным свойством.

Ключевые слова: *конформное отображение, псевдосфера*

1. В статье мы рассмотрим специальное отображение и покажем что оно является конформным и поворотным со свойством взаимности.

Поворотность отображения означает, что при отображении геодезические линии переходят в изопериметрические экстремали, то есть в кривые, являющиеся решением вариационной задачи по нахождению прямейших среди кривых одинаковой длины, соединяющих две фиксированные точки. Свойство взаимности означает, что при обратном отображении геодезические линии также переходят в кривые описанного вида.

Впервые поворотное отображение было рассмотрено в работах С. Г. Лейко [2]. Показано, что на двумерных поверхностях кривая является изопериметрической экстремалью поворота если вдоль неё кривизна Френе k и гауссова кривизна K пропорциональны: $k = cK$. Показано, что отображение является поворотным тогда и только тогда, когда существуют два инварианта λ и ψ таких, что в общей по отображению системе координат выполняются следующие равенства:

$$\nabla_j\psi_i = \psi_i(\psi_j + \frac{K_j}{K}) + K(Ae^{\psi}+1)g_{ij},$$
$$P^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \bar{\Gamma}^h_{ij} = \lambda_i\delta^h_j + \lambda_j\delta^h_i + \psi^h g_{ij}, \tag{1}$$

где $\nabla_j\psi_i$ — ковариантная производная в метрике g_{ij} и A — некоторая константа.

2. Рассмотрим псевдосферу в $\mathbb{E}^3$, которая задана параметрическими уравнениями:

$$x = r\sin\alpha, \quad y = r\cos\alpha, \quad z = \sqrt{1-r^2} - \sec h^{-1}(r)). \tag{2}$$

Здесь параметр r представляет расстояние от точки псевдосферы до оси вращения, а α — угол поворота точки поверхности от плоскости yz. Данная параметризация представляет собой результат обращения трактрисы вокруг оси z. В такой параметризации метрическая форма поверхности принимает вид:

$$ds^2 = r^{-2}dr^2 + r^2d\alpha^2. \tag{3}$$

Компоненты связности в этой метрике имеют вид:

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 0, \Gamma^2_{12} = r^{-1}, \Gamma^1_{11} = -r^{-1}, \Gamma^1_{22} = -r^3. \tag{4}$$

Гауссова кривизна поверхности постоянна и равна -1.

Рассмотрим отображение, сохраняющее угол α, но «вытягивающее» точки от оси в направлении к краю поверхности по правилу:

$$\bar{r} = r(1-r)^{-1}. \tag{5}$$

При этом точки, соответствующие параметру r в промежутке значений $(0; 0.5)$, вытянутся на промежуток значений $(0; 1)$. Обратное отображение характеризуется следующим правилом:

$$r = \bar{r}(1+\bar{r})^{-1} \tag{6}$$

и, соответственно, совершает обратное «стягивание» точек всей поверхности на часть поверхности.

3. Покажем, что отображения (5) и (6) обладают свойством переводить геодезичиские линии в изопериметрические экстремали поворота.

Теорема 1. *Отображение (5) псевдосферы (2) является поворотно-конформным со свойством взаимности.*

Доказательство. Подставив выражение, связывающее новые и старые параметры точки, в метрическую форму псевдосферы, и переобозначая параметры, мы получим выражение для метрики второй поверхности в общих по отображению координатах:

$$d\bar{s}^2 = (1-r)^{-2} r^{-2} dr^2 + (1-r)^{-2} r^2 d\alpha^2. \tag{7}$$

Метрические формы пропорциональны с точностью до множителя:

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\psi} g_{ij}, \tag{8}$$

где $e^{2\psi} = (1-r)^{-2}$, что означает конформность отображения.

Для удобства примем r за первую координату и α — за вторую: $x_1 = r$, $x_2 = \alpha$. Будем обозначить дифференцирования по ним соответствующими нижними знаками.

А. Покажем, что отображение удовлетворяет условиям поворотности (1). В случае конформного отображения псевдосферы эти условия принимают вид:

$$\nabla_j \psi_i = \psi_i \psi_j - (Ae^{\psi} + 1) g_{ij}, \tag{9}$$

С учетом условия конформности отображения (8) уравнения поворотности приобретают вид:

$$\begin{aligned} \nabla_1\psi_1 =& (1-r)^{-2} - (A(1-r)^{-1} + 1) r^{-2}, \\ \nabla_2\psi_1 =& 0, \\ \nabla_1\psi_2 =& 0, \\ \nabla_2\psi_2 =& -(A(1-r)^{-1} + 1) r^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Вычислим ковариантные производные в левой части равенства при помощи значений компонент связности (4):

$$\begin{aligned}
\nabla_1\psi_1 =& \frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \psi_1\Gamma^1_{11} = (1-r)^{-2} - (1-r)^{-1}(-r^{-1}),\\
\nabla_2\psi_1 =& \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} - \psi_1\Gamma^1_{12} = 0,\\
\nabla_1\psi_2 =& \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \psi_1\Gamma^1_{21} = 0,\\
\nabla_2\psi_2 =& \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \psi_1\Gamma^1_{22} = -(1-r)^{-1}(-r^3).
\end{aligned}$$

Подставим эти значения в уравнения поворотности (10). Тогда второе и третье уравнения выполняются тождественно, а первое и четвертое уравнения приводят к одному уравнению:

$$-(1-r)^{-1}(-r^{-1}) = -(A(1-r)^{-1}+1)r^{-2}. \tag{11}$$

Оно тождественно выполняется при $A=-1$. Таким образом, поворотность отображения доказана.

Б. Для доказательства того, что обратное отображение также поворотно сделаем на второй поверхности (7) замену переменных (6): $\bar r = R(1+R)^{-1}$. И на первой поверхности (3) сделаем замену переменных: $r = \bar R(1+\bar R)^{-1}$. Тогда обратное отображение $R\to\bar R$, $\alpha\to\bar\alpha$ примет вид отображения поверхности с метрикой

$$d\bar s^2 = R^{-2}dR^2 + R^2 d\alpha^2 \tag{12}$$

на поверхность с метрикой

$$d\bar s^2 = (1+\bar R)^{-2}\bar R^{-2}d\bar R^2 + (1+\bar R)^{-2}\bar R^2 d\bar\alpha^2. \tag{13}$$

Не сложно проверить выполнение уравнений поворотности (9). Мы получим единственное уравнение, аналогичное уравнению (11):

$$(1+R)^{-1}R^{-1} = (\bar A(1+R)^{-1}+1)R^{-2}, \tag{14}$$

которое тождественно выполняется при $\bar A = -1$. Теорема доказана. □

4. Отметим, что уравнения поворотности для отображения (9) удовлетворяют уравнениям конциркулярных отображений, исследованных К. Яно [4], а значит рассматриваемое отображение переводит геодезические окружности в геодезические окружности.

Список литературы

[1] В. Ф. Каган, *Основы теории поверхностей, ч.1-2.* - М.-Л.: ГИТТЛ, 1947–1948.

[2] С. Г. Лейко, *Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидового пространства*, Матем. Заметки. Москва, Наука, 1990. Т.47,№3. С.52-57.

[3] А. П. Норден, *Теория поверхностей.* М., ГИТТЛ, 1956.

[4] K. Yano, *Concircular geometry, I–IV.* Proc. Imp. Acad., Tokyo, Volume 16, 195–200, 354–360, 442–448, 505–511 (1940).