Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 35-46

В. М. Прокіп

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
НАН України, м.Львів*
E-mail: vprokip@mail.ru

Про трикутні унітальні дільники многочленних матриць над факторіальною областю

Встановлено умови існування унітальних трикутних дільників многочленних матриць над факторіальною областю.

Установлены условия существования унитальных треугольных делителей многочленных матриц над факториальной областью.

We establish conditions for existence of monic triangular divisors of polynomial matrices over a factorial domain.

Ключові слова: *monic divisor, polynomial matrix, factorial domain*

Нехай R факторіальна область з одиницею e, $R_{n,m}$ і $R_{n,m}[x]$ множини $n \times m$ матриць над кільцем R та над кільцем многочленів $R[x]$ відповідно; I_n – одинична матриця порядку n. Надалі через LR_n та $LR_n[x]$ позначатимемо кільця $n \times n$ нижніх трикутних матриць над R та $R[x]$ відповідно, а під записом (a, b) будемо розуміти найбільший спільний дільник (н.с.д.) ненульових елементів $a, b \in R$.

В даній статті розглядається задача про зображення неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ у вигляді добутку

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{1}$$

де

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x] \qquad (2)$$

– нижня трикутна унітальна многочленна матриця степеня r $(1 \leq r \leq \deg A(x))$, тобто $b_i(x)$ унітальні многочлени степеня r для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ і $\deg b_{ij}(x) < \deg b_i(x)$ для всіх $j < i$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Нагадаємо, що матрицю $B(x)$ можна записати у вигляді $B(x) = I_n x^r + B_1 x^{r-1} + \dots + B_r$, де $B_l \in LR_n$ для всіх $l = l, 2, \dots, r$. Очевидно також, що $\det B(x) = b_1(x) b_2(x) \cdots b_n(x)$.

В такій постановці дана задача є надзвичайно складною в розумінні вказання необхідних та достатніх умов існування такої факторизації (див. [1]). В цій статті встановлено умови, за яких для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує факторизація виду (1) з умовою (2), у випадку, коли матриці $B(x)$ і $C(x)$ мають взаємно прості визначники. Крім цього вказано умови, за яких для неособливої матриці $A(x)$ існують блочно-трикутні унітальні дільники. Відзначимо, що дана стаття є продовженням досліджень, які розпочаті в роботах [2], [3].

Матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ поставимо у відповідність матриці

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \end{bmatrix} \in R_{1,n}[x],$$

$$A_k(x) = \begin{bmatrix} & A_{k-1}(x) & & \\ a_{k1}(x) & a_{k2}(x) & \dots & a_{kn}(x) \end{bmatrix} \in R_{k,n}[x],$$

де $1 < k \leq n$. Тепер через $a_i(x)$ позначимо н.с.д. мінорів i−го порядку матриць $A_i(x)$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, що $A_n(x) = A(x)$ і $a_n(x) = \det A(x)$.

Нехай для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує факторизація (1) з умовою (2). Неважко переконатись в тому, що

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x) c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x) b_k(x) c_k(x), \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{cases} \qquad (3)$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \cdots + b_{kr} \in R[x]$ і $1 \leq r \leq \deg A(x)$.

Зрозуміло, що виконання умов (3) є необхідною умовою існування для матриці $A(x)$ факторизації (1) з умовою (2). В цьому зв'язку об'єктом нашого дослідження будуть неособливі матриці $A(x)$ із $R_{n,n}[x]$, для яких має місце система рівностей (3). Матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$, яку запишемо у вигляді $A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_s$, та многочлену $d(x) = x^{rn} + d_1x^{rn-1} + \cdots + d_{rn}$ поставимо у відповідність матриці

$$M = \left[\begin{array}{cccccc} A_0 & A_1 & \dots & A_s & & \\ & A_0 & A_1 & \dots & A_s & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & A_0 & A_1 & \dots & A_s \\ I_n & I_nd_1 & \dots & I_nd_{nr} & & \\ & I_n & I_nd_1 & \dots & I_nd_{nr} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & I_n & I_nd_1 & \dots & I_nd_{nr} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} (n-1)r \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\A\\A\\A\end{array}}\right\} s-r \end{array},$$

$$N = \left[\begin{array}{cccccccc} A_0d_1 - A_1 & \dots & A_0d_s - A_s & A_0d_{s+1} & \dots & A_0d_{rn} & \underbrace{O\dots O}_{t} \end{array}\right],$$

де $t = nr + s - r - \max\{s, rn\}$, O – нульова матриця порядку n. На незаповнених місцях в матриці M знаходяться нулі (див. також [2]).

Теорема 1. *Припустимо, що для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ виконуються умови*

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x)c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x)b_k(x)c_k(x), \quad k = 2, 3, \dots, n; \end{cases}$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \cdots + b_{kr} \in R[x]$. Нехай, далі,

$$d(x) = b_1(x)b_2(x)\cdots b_n(x).$$

Якщо $(b_i(x), c_j(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \dots, n$ та $j = 1, 2, \dots, n$, то для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

така, що

$$B(x)=\begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0\\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \dots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x)\end{bmatrix}\in LR_n[x]$$

– унітальна многочленна матриця степеня $r\geq 1$ *і*

$$\deg b_{ij}(x)<\deg b_i(x)$$

для всіх $j<i$*, тоді і тільки тоді, коли матричне рівняння* $ZM=N$ *розв'язне. Якщо ж шуканий дільник* $B(x)$ *існує, то він однозначно визначається набором многочленів* $\{b_1(x), b_2(x),\dots,b_n(x)\}$.

Доведення. Необхідність випливає з теореми 1 роботи [2].

Достатність. Нехай рівняння $ZM=N$ розв'язне. На підставі теореми 1 із [2] для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x)=B(x)C(x)$$

така, що $B(x)\in R_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r із визначником

$$\det B(x)=d(x)=b_1(x)b_2(x)\cdots b_n(x).$$

Крім цього, матриця $B(x)$ однозначно визначається многочленом $d(x)$.

Оскільки R область цілісності, то R міститься в деякому полі P (зокрема в полі часток кільця R), тобто $R\subset P$. Для матриці $A(x)\in P_{n,n}[x]$ існує матриця $W(x)\in GL(n,P)$ така, що

$$A(x)W(x)=H(x)=$$

$$\begin{bmatrix} h_{11}(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\\ h_{21}(x) & h_{22}(x) & 0 & \dots & \dots & 0\\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & h_{33}(x) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ h_{n1}(x) & h_{n2}(x) & h_{n3}(x) & \dots & h_{n,n-1}(x) & h_{nn}(x)\end{bmatrix}\in LR_n[x],$$

де $\deg h_{ij}(x) < \deg h_{ii}(x)$ для всіх $1 \le j < i \le n$, тобто матриця $H(x)$ є нормальною формою Ерміта матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ (див. [4]).

Так як над матрицею $A(x) \in P_{n,n}[x]$ ми виконумо елементарні перетворення з її стовпчиками, то неважко переконатись в тому, що многочлени $a_k(x)$ і $h_{kk}(x)$ асоційовані над полем P. Отже,

$$h_{kk}(x) = b_k(x) g_{kk}(x); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доведемо, що для матриці $H(x)$ існує факторизація

$$H(x) = D(x)G(x), \tag{4}$$

де

$$D(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ d_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_{31}(x) & d_{32}(x) & b_3(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & d_{n3}(x) & \dots & d_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x],$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} g_{11}(x) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1}(x) & g_{n2}(x) & g_{n3}(x) & \dots & g_{n,n-1}(x) & g_{nn}(x) \end{bmatrix} \in LR_n[x],$$

а $d_{ij}(x)$ та $g_{ij}(x)$ деякі многочлени із $P[x]$, причому

$$\deg d_{ij}(x) < \deg b_i(x)$$

для всіх $1 \le j < i \le n$.

Помноживши в правій частині рівності (4) $D(x)$ на перший стовпчик матриці $G(x)$ здобуваємо систему рівностей

$$\begin{cases} b_1(x)g_{11}(x) = h_{11}(x), \\ d_{21}(x)g_{11}(x) + b_2(x)g_{21}(x) = h_{21}(x), \\ d_{31}(x)g_{11}(x) + d_{32}(x)g_{21}(x) + b_3(x)g_{31}(x) = h_{31}(x), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ d_{n1}(x)g_{11}(x) + d_{n2}(x)g_{21}(x) + \dots + b_n(x)g_{n1}(x) = h_{n1}(x). \end{cases}$$

Так як $(b_1(x), g_{jj}(x)) = e$ для всіх $1 \le j \le n$, то ця система рівнянь розв'язна. Зрозуміло, що многочлени $d_{k1}(x)$ можна вибрати так, що $\deg d_{k1}(x) < \deg b_k(x)$ для всіх $2 \le k \le n$.

Продовжуючи аналогічні міркування з решту стовпчиками матриці $G(x)$ і враховуючи те, що $(b_i(x), g_{jj}(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ та $j = 1, 2, \ldots, n$, в кінцевому результаті здобуваємо, що матриця $H(x)$ допускає факторизацію

$$H(x) = D(x)G(x),$$

де

$$D(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ d_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \ldots & d_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix}$$

– нижня трикутна унітальна многочленна матриця степеня r з елементами $b_i(x)$ на головній діагоналі і

$$\deg d_{ij}(x) < \deg b_i(x), \qquad j < i.$$

Так як $(\det D(x), \det G(x)) = e$, то на підставі наслідку 5 із [5] унітальна матриця $D(x) \in P_{n,n}[x]$ однозначно визначена многочленом

$$d(x) = b_1(x)b_2(x) \cdots b_n(x).$$

Отже, для матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ існують факторизації

$$A(x) = B(x)C(x) = D(x)F(x),$$

де $F(x) = G(x)W^{-1}(x)$. Очевидно, що матриця $B(x)$ теж однозначно визначена многочленом $d(x)$ над полем P. На підставі наслідку 5 із [5] здобуваємо $B(x) = D(x) \in LR_n[x]$, що і доводить теорему. $\square$

Із доведення достатності теореми 1 отримуємо наступне твердження, які сформулюємо вигляді.

Наслідок 1. Припустимо, що для неособливої матриці $A(x) \in P_{n,n}[x]$ виконуються умови

$$\begin{cases} a_1(x) = b_1(x)c_1(x), \\ a_k(x) = a_{k-1}(x)b_k(x)c_k(x), \quad k = 2, 3, \ldots, n; \end{cases}$$

де $b_k(x) = x^r + b_{k1}x^{r-1} + \cdots + b_{kr} \in P[x]$ і $r \geq 1$. Якщо $(b_i(x), c_j(x)) = e$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$ та $j = 1, 2, \ldots, n$, то для матриці $A(x)$ існує факторизація

$$A(x) = B(x)C(x)$$

така, що

$$B(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ b_{21}(x) & b_2(x) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \ldots & b_{n,n-1}(x) & b_n(x) \end{bmatrix} \in LP_n[x]$$

– унітальна многочленна матриця степеня r і

$$\deg b_{ij}(x) < \deg b_i(x)$$

для всіх $j < i$. Якщо ж шуканий дільник $B(x)$ існує, то він однозначно визначається набором многочленів

$$\{b_1(x), b_2(x), \cdots, b_n(x)\}.$$

В роботах [2], [3] встановлені умови, за яких для неособливої матриці $A(x) \in R_{n,n}[x]$ існує унітальний дільник $B(x)$ із заданим визначником $\det B(x) = b(x)$. Нижче вкажемо умови, за яких для матриці $A(x)$ існують блочно-трикутні унітальні дільники.

Теорема 2. *Нехай неособлива матриця $A(x) \in R_{n,n}[x]$ допускає факторизації*

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x), \tag{5}$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ *та* $B(x) \in R_{n,n}[x]$ *– унітальні многочленні матриці степеня* r*. Якщо* $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$*, то*

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ *– унітальна многочленна матриця степеня* r*.*

Доведення. Так як $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то з рівності (5) здобуваємо, що $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x).$$

Матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix},$$

де $B_{11}(x) \in R_{k,k}[x]$, $B_{22}(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$. Очевидно, що $B_{11}(x)$ і $B_{22}(x)$ – унітальні многочленні матриці степеня r. Тепер рівність (5) запишемо так

$$\begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} C(x).$$

Звідси здобуваємо

$$\begin{bmatrix} I_k \cdot \det B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) C^*(x) =$$

$$\begin{bmatrix} B_1^*(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} \det C(x), \qquad (6)$$

де $C^*(x)$ та $B_1^*(x)$ взаємні матриці до матриць $C(x)$ та $B_1(x)$ відповідно. Оскільки $(\det B_1(x), \det C(x)) = e$, то з рівності (6) випливає

$$B_1^*(x) \cdot [\, B_{11}(x) \quad B_{12}(x) \,] = 0(\mod \det B_1(x)). \qquad (7)$$

Так як $\deg B_1^*(x) = r(k-1)$ і $\deg B_1(x) > \deg B_{12}(x)$, то

$$\deg[B_1^*(x) B_{12}(x)] \le kr - 1 < \deg \det B_1(x).$$

Отже, рівність (7) можлива лише у випадку, коли

$$B_{12}(x) = 0.$$

Оскільки $\deg[B_1^*(x)B_{11}(x)\,] = kr$, то з рівності

$$B_1^*(x)B_{11}(x) = 0(\mod \det B_1(x))$$

отримуємо $B_1(x) = B_{11}(x)$. Поклавши $B_{22}(x) = B_2(x)$, матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді $B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix}$, що і доводить теорему. □

Теорема 3. *Нехай неособлива матриця $A(x) \in R_{n,n}[x]$ допускає факторизації*

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x),$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ та $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r. Нехай, далі,

$$(\det B_1(x), \det C_1(x), d_A(x)) = e,$$

$$(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = e,$$

де $d_A(x)$ – н.с.д. мінорів $(n-1)$–го порядку матриці $A(x)$. Якщо $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x),$$

то

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r.

Доведення. Нехай P – поле, яке містить факторіальну область R, тобто $R \subset P$. Так як

$$(\det B_1(x), \det C_1(x), d_A(x)) = e,$$

$$(\det B(x), \det C(x), d_A(x)) = e$$

$$\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x),$$

то на підставі теореми 2 із [6], матриця

$$\begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \in P_{n,n}[x]$$

є лівим дільником матриці $B(x) \in P_{n,n}[x]$, тобто

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} G(x).$$

Оскільки $B(x)$ та $B_1(x)$ – унітальні многочленні матриці, то з цієї рівності отримуємо, що $G(x) \in R_{n,n}[x]$.

Поклавши

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{bmatrix},$$

де $B_{11}(x), G_{11}(x) \in R_{k,k}[x]$ і $B_{22}(x), G_{22}(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$, останню рівність запишемо так

$$\begin{bmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k,n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{bmatrix}.$$

З даної рівності отримуємо

$$\begin{cases} B_{11}(x) = B_1(x) G_{11}(x), \\ B_{12}(x) = B_1(x) G_{12}(x). \end{cases} \tag{8}$$

Оскільки $B_{11}(x), B_1(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r, то з першої рівності системи (8) здобуваємо $G_{11}(x) = I_k$. Так як $\deg B_{12}(x) < \deg B_1(x)$, то з другої рівності системи (8) випливає, що $G_{12}(x) = 0$. Поклавши $B_{22}(x) = B_2(x)$, матрицю $B(x)$ запишемо у вигляді

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix}.$$

Теорему доведено. □

Наслідок 2. Нехай $A(x) \in R_{n,n}[x]$ – неособлива многочленна матриця і $d_A(x) = const$. Нехай, далі, матриця $A(x)$ допускає факторизації

$$A(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} C_1(x) = B(x)C(x),$$

де $B_1(x) \in R_{k,k}[x]$ та $B(x) \in R_{n,n}[x]$ – унітальні многочленні матриці степеня r. Якщо $\det B_1(x)$ є дільником $\det B(x)$, тобто $\det B(x) = b_2(x) \cdot \det B_1(x)$, то

$$B(x) = \begin{bmatrix} B_1(x) & 0 \\ B_{21}(x) & B_2(x) \end{bmatrix},$$

де $B_2(x) \in R_{n-k,n-k}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня r.

Відзначимо, що підставі [2], [3] та наведених вище результатів легко вказати умови існування розв'язків в трикутних матрицях для матричного многочленного рівняння

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \cdots + X A_{s-1} + A_s = 0,$$

де $A_i \in R_{n,n}$, а X – невідома матриця порядку n. Остання задача при певних обмеженнях досліджувалась в [7], [8].

Література

[1] *Казімірський П.С.* Розклад матричних многочленів на множники. - К.: Наукова думка, 1981. - 224 с.

[2] *Прокіп В.М.* Многочленні матриці над факторіальною областю та їх розкладність на множники. //Укр. мат. журн. – 1998.– **50**. – С.1438–1440.

[3] *Прокіп В.М.* Про дільники многочленних матриць над факторіальною областю. //Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001.– **44**, №4. – С.22–26.

[4] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука , 1966. – 576 с.

[5] *Прокіп В.М.* Про єдиність унітального дільника матричного многочлена над довільним полем. //Укр. мат. журн. – 1993.– **45**. – С.803–809.

[6] *Prokip V.* The multiplicativity of the Smith normal form. // Linear and Multilinear Algebra. – 1995.– **38**. – P.189–192.

[7] *Кириллов А.Ф.* О числе решений уравнения $X^2 = 0$ в треугольных матрицах над конечным полем. //Функ. анализ и его прложения. – 1995.– **29**, № 1. – С.82–87.

[8] *Ekhad Sh., Zeilberger D.* The number of solutions of $X^2 = 0$ in triangular matrices over $GF(q)$ // The Electronic Journal of Combinatorics. – 1996.– **3**, N.1. – P.25–26.