Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 309-422

Е. А. Полулях

Институт математики НАН Украины, Киев,
Терещенковская, 3
E-mail: `polulyah@imath.kiev.ua`

О проекциях на одометры динамических систем с компактным фазовым пространством

Введение

Важную роль в исследовании обратимых динамических систем (д. с.) с дискретным временем (каскадов) играет информация о том

— на какие минимальные динамические системы существует проекция данной динамической системы (X, f);
— как устроены эти проекции;
— как взаимосвязаны различные проекции д. с. (X, f) на минимальные д. с.; в частности, существует ли для двух проекций $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$ динамических систем, такой что $h_2 = \psi \circ h_1$.

Получить ответы на такие вопросы в общем случае — весьма нетривиальная задача. Чтобы приблизиться к ее решению, современные исследователи рассматривают проекции данной д. с. не на все минимальные д. с., а на некоторые "простые" классы таких д. с. (дистальные и равностепенно-непрерывные минимальные д. с., минимальные д. с., допускающие единственную инвариантную эргодическую меру, и т. д.).

Пусть рассматривается семейство $\mathfrak{A}$ минимальных динамических систем и исследуются свойства проекций д. с. (X, f) на элементы этого семейства. В некоторых случаях элементы класса всех проекций д. с. (X, f) на д. с. из $\mathfrak{A}$ удается упорядочить в следующем смысле.

Пусть $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ — проекции. Скажем, что $h_1 \sim h_2$, если существует изоморфизм динамических систем $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такой что $h_2 = \psi \circ h_1$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ фактор-семейство всех проекций из (X, f) на элементы класса $\mathfrak{A}$ по этому отношению эквивалентности. Введем на $\mathfrak{B}$ бинарное отношение $\preceq$. Пусть B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$. Скажем, что $B_1 \preceq B_2$, если найдутся представители $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ класса B_1 и $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ класса B_2, а также морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такие что $h_2 = \psi \circ h_1$. Без труда проверяется, что отношение $\preceq$ определено корректно (т. е. не зависит от выбора представителей из B_1 и B_2).

Важно знать, является ли отношение $\preceq$ на классе $\mathfrak{B}$ отношением частичного порядка.[1] В случае положительного ответа на этот вопрос возникает задача описать свойства класса $\mathfrak{B}$ с частичным порядком $\preceq$, в частности указать классы всех его максимальных и минимальных элементов и найти наибольший и наименьший элементы (если они существуют).

[1] Несложно проверить, что если отношение $\preceq$ не является отношением порядка на $\mathfrak{B}$, то для некоторой д. с. (Y, g) из $\mathfrak{A}$ существует морфизм $\alpha : (Y, g) \to (Y, g)$ такой, что отображение $\alpha : Y \to Y$ не является инъективным. Вопрос о существовании таких минимальных динамических систем интересен сам по себе.

В предлагаемой работе рассматривается класс $\mathcal{A}$ всех одометров (групповых вращений над адическими группами). Известно, что этот класс совпадает с классом всех минимальных дистальных динамических систем, фазовое пространство которых гомеоморфно множеству Кантора или конечно. Известно также, что элементы класса $\mathcal{A}$ классифицируются (с точностью до топологической сопряженности) при помощи решетки так называемых супернатуральных чисел $(\Sigma, \leq)$.

Мы рассматриваем динамические системы (X, f) с Хаусдорфовым компактным фазовым пространством и их проекции на элементы класса $\mathcal{A}$ (отметим, что всегда существует тривиальная проекция $(X, f) \to (\{pt\}, Id)$ на динамическую систему, фазовое пространство которой состоит из одной точки).

Оказывается, существование нетривиальных проекций д. с. (X, f) на элементы семейства $\mathcal{A}$ связано с существованием так называемых периодических разбиений д. с. (X, f) (конечных замкнутых разбиений пространства X, элементы которых циклически переставляются под действием отображения $f : X \to X$).

Пусть $\mathcal{P}(X, f) \subseteq \mathbb{N}$ — множество мощностей всех периодических разбиений д. с. (X, f). Тогда $\mathcal{P}(X, f)$ — топологический инвариант д. с. (X, f) и существование нетривиальных проекций д. с. (X, f) на элементы семейства $\mathcal{A}$ эквивалентно неравенству $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$.

Обозначим через $\mathcal{A}(X, f)$ класс всех элементов $\mathcal{A}$, на которые существуют проекции динамической системы (X, f). Пусть $\Sigma(X, f)$ — подмножество множества супернатуральных чисел, соответствующее классу $\mathcal{A}(X, f)$. Пусть еще

$\mathfrak{B}(X, f)$ — семейство всех проекций д. с. (X, f) на элементы класса $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}'(X, f)$ — фактор-класс класса $\mathfrak{B}(X, f)$ по отношению $\sim$ (см. выше).

К основным результатам, полученным в данной работе, можно отнести следующие утверждения.

Пусть (X, f) — динамическая система с компактным Хаусдорфовым фазовым пространством и $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$. Тогда

— бинарное отношение $\preceq$ на классе $\mathfrak{B}'(X, f)$ является отношением частичного порядка;
— существует сюрьективное отображение $\Lambda_0 : (\mathfrak{B}'(X, f), \preceq) \to (\Sigma(X, f), \leq)$, сохраняющее отношение порядка и такое, что класс всех максимальных элементов из $(\mathfrak{B}'(X, f), \preceq)$ совпадает с полным прообразом наибольшего элемента множества $(\Sigma(X, f), \leq)$;
— упорядоченный класс $(\mathfrak{B}'(X, f), \preceq)$ изоморфен упорядоченному множеству $(\Sigma(X, f), \leq)$ тогда и только тогда, когда д. с. (X, f) неразложима (то есть пространство X нельзя представить в виде несвязной суммы двух собственных замкнутых инвариантных подмножеств).

Для того, чтобы получить эти результаты, автор подробно исследует свойства периодических разбиений, одометров и супернатуральных чисел.

В последнем разделе из основных результатов извлекаются следствия, относящиеся к так называемым почти взаимно-однозначным расширениям одометров, классу динамических систем, который интенсивно исследуется в последнее время.

В заключение автор хотел бы поблагодарить А. М. Шарковского за обсуждение результатов на семинаре отдела динамических систем Института математики НАН Украины, а также И. Ю. Власенко, С. Ф. Коляду, В. В. Любашенко, С. И. Максименко, М. А. Панкова, А. А. Пришляка, В. В. Сергейчука и В. В. Шарко за обсуждение результатов на семинарах и ряд ценных замечаний. Отдельную благодарность хотелось бы выразить С. Ф. Коляде за то, что он ознакомил автора с современными работами, в которых исследуются расширения одометров.

Предварительные сведения

Фактор-пространства и фактор-отображения. Фиксируем некоторое множество A.

Определение 0.1. Разбиением *множества* A *называется семейство* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *непустых подмножеств множества* A, *удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $A = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$;
2) $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ *при* α, $\beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta$.

Определение 0.2. *Разбиение* $\{\widetilde{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Sigma}$ *множества* A *называется* измельчением *разбиения* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, *если для каждого* $\gamma \in \Sigma$ *найдется такое* $\alpha \in \Lambda$, *что* $\widetilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$.

Замечание 0.1. *Пусть разбиение* $\{\widetilde{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Sigma}$ *является измельчением разбиения* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *множества* A. *Из свойства 2) определения 0.1 легко следует, что для любых* $\alpha \in \Lambda$ *и* $\gamma \in \Sigma$ *либо* $\widetilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$, *либо* $\widetilde{A}_\gamma \cap A_\alpha = \varnothing$.

Замечание 0.2. *Существует биективное соответствие между разбиениями множества* A *и отношениями эквивалентности на* A:

1) *любому разбиению* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *можно поставить в соответствие отношение эквивалентности* ρ *при*

помощи соотношения

$$(a_1\ \rho\ a_2) \Longleftrightarrow (\exists\, \alpha \in \Lambda\ : a_1, a_2 \in A_\alpha)\ ;$$

2) *обратно, каждому отношению эквивалентности σ на множестве A соответствует разбиение на классы эквивалентности.*

Пусть A — множество, $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — его разбиение.

Определение 0.3. *Множество $A/\mathfrak{A}$, элементами которого являются элементы разбиения $\mathfrak{A}$, называется* фактор-множеством *множества A по разбиению $\mathfrak{A}$.*

Отображение $pr : A \to \mathfrak{A}$, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ элемент $A_\alpha \in A/\mathfrak{A}$, такой что $a \in A_\alpha$, называется отображением проекции.

Эквивалентно, можно определить фактор-множество A/ρ по отношению эквивалентности ρ (см. замечание 0.2).

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ — его разбиение.

Зададим на множестве $X/\mathfrak{H}$ топологию по следующему правилу: скажем, что подмножество $B \subseteq X/\mathfrak{H}$ открыто тогда и только тогда, когда его полный прообраз $pr^{-1}(B)$ открыт в X. Эта топология называется *фактор-топологией* и является самой слабой топологией на пространстве X, в которой отображение $pr : X \to X/\mathfrak{H}$ непрерывно.

Пусть X и Y — топологические пространства, $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, $\mathfrak{T}$ — разбиение пространства Y. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, которое переводит элементы разбиения $\mathfrak{H}$ в элементы разбиения $\mathfrak{T}$. Тогда определено непрерывное *фактор-отображение*

$\operatorname{fact} f : X/\mathfrak{H} \to Y/\mathfrak{T}$, такое что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "pr_X"'] & Y \arrow[d, "pr_Y"] \\ X/\mathfrak{H} \arrow[r, "\operatorname{fact} f"'] & Y/\mathfrak{T} \end{tikzcd}$$

Пусть снова $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологического пространства X в пространство Y. Обозначим через $\operatorname{zer} f$ разбиение пространства X, элементами которого являются полные прообразы точек пространства Y под действием отображения f. Пусть еще $\mathfrak{T}$ — разбиение пространства Y, каждый элемент которого состоит ровно из одной точки. Ясно, что $pr_Y = Id : Y \to Y/\mathfrak{T}$ — суть тождественное отображение.

Определение 0.4. *Отображение* $\operatorname{fact} f : X/\operatorname{zer} f \to Y$, *для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "pr_X"'] & Y \arrow[d, equal] \\ X/\operatorname{zer} f \arrow[r, "\operatorname{fact} f"'] & Y \end{tikzcd}$$

называется взаимно-однозначным фактором *отображения f.*

Инъективность взаимно-однозначного фактора проверяется непосредственно.

Определение 0.5. *Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется* факторным, *если $f(X) = Y$ и взаимно-однозначный фактор* $\operatorname{fact} f : X/\operatorname{zer} f \to Y$ *является гомеоморфизмом.*

Предложение 0.1 (см. [1]). *Пусть для непрерывного отображения $f : X \to Y$ выполняются следующие условия:*

(1) $f(X) = Y$;
(2) *отображение f открыто (замкнуто).*

Тогда f — факторное отображение.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 0.1. *Пусть X, Y_1, Y_2 — топологические пространства, $\varphi_1 : X \to Y_1$ и $\varphi_2 : X \to Y_2$ — непрерывные отображения.*

Если отображение φ_1 факторно, то следующие условия эквивалентны:

(1) *разбиение $\operatorname{zer}\varphi_1$ пространства X является измельчением разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$;*
(2) *существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.*

Доказательство. 1. Пусть разбиение $\operatorname{zer}\varphi_1$ является измельчением разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$. Тогда отображение φ_2 переводит элементы разбиения $\operatorname{zer}\varphi_1$ в точки пространства Y_2 и корректно определено фактор-отображение $\pi = \operatorname{fact}\varphi_2 : X/\operatorname{zer}\varphi_1 \to Y_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & Y_2 \arrow[d, equal] \\ X/\operatorname{zer}\varphi_1 \arrow[r, "\pi"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Пусть $\chi = \operatorname{fact}\varphi_1 : X/\operatorname{zer}\varphi_1 \to Y_1$ — взаимно-однозначный фактор отображения φ_1, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \| \\ X/\operatorname{zer}\varphi_1 & \xrightarrow[\chi]{} & Y_1 \end{array}$$

Так как отображение φ_1 факторно, то χ — гомеоморфизм пространства $X/\operatorname{zer}\varphi_1$ на Y_1.

Рассмотрим непрерывное отображение

$$\psi = \pi \circ \chi^{-1} : Y_1 \to Y_2 \,.$$

Имеем

$$\psi \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ pr_1 = \pi \circ pr_1 = \varphi_2 \,,$$

что и требовалось.

2. Пусть существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Фиксируем элемент H_1 разбиения $\operatorname{zer}\varphi_1$. По определению, найдется $y_1 \in Y_1$, такое что $H_1 = \varphi_1^{-1}(y_1)$. Пусть $y_2 = \psi(y_1) \in Y_2$. Тогда $H_2 = \varphi_2^{-1}(y_2) = (\psi \circ \varphi_1)^{-1}(y_2) = \varphi_1^{-1}(\psi^{-1}(y_2)) \supseteq \varphi_1^{-1}(y_1) = H_1$. Снова по определению, H_2 — элемент разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$.

Из-за произвола в выборе элемента H_1 разбиения $\operatorname{zer}\varphi_1$ заключаем, что разбиение $\operatorname{zer}\varphi_1$ является измельчением разбиения $\operatorname{zer}\varphi_2$. $\square$

Категории и функторы.

Определение 0.6. *Категория* $\mathcal{K}$ *состоит из класса* объектов $\operatorname{Ob}\mathcal{K}$ *и класса* морфизмов $\operatorname{Mor}\mathcal{K}$, *которые связаны между собой следующими условиями:*

1) *каждой упорядоченной паре* $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *сопоставлено некоторое множество* $H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *морфизмов категории* $\mathcal{K}$*;*
2) *каждый морфизм категории* $\mathcal{K}$ *принадлежит одному и только одному из множеств* $H_{\mathcal{K}}(A, B)$*;*
3) *в классе* $\mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$ *определена частичная бинарная операция умножения: произведение* $\beta \circ \alpha$ *морфизмов* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *и* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(C, D)$ *определено тогда и только тогда, когда* $B = C$*, и в этом случае* $\beta \circ \alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, D)$*;*

   частичное умножение ассоциативно: $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ *для любых* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$*,* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(B, C)$ *и* $\gamma \in H_{\mathcal{K}}(C, D)$*;*
4) *для каждого* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *множество* $H_{\mathcal{K}}(A, A)$ *содержит* единичный морфизм 1_A*, такой что* $\beta \circ 1_A = \beta$ *и* $1_A \circ \alpha = \alpha$ *для любых морфизмов* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(B, A)$ *и* $\beta \in H_{\mathcal{K}}(A, C)$.

Определение 0.7. *Категория* $\mathfrak{L}$ *называется* подкатегорией *категории* $\mathcal{K}$*, если*

a) $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$*;*
b) $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}$*;*
c) *единичные морфизмы категории* $\mathfrak{L}$ *являются единичными морфизмами категории* $\mathcal{K}$*;*
d) *произведение* $\beta \circ \alpha$ *морфизмов* α*,* $\beta \in \mathrm{Mor}\,\mathfrak{L}$ *совпадает с произведением этих же морфизмов в категории* $\mathcal{K}$.

Определение 0.8. *Подкатегория* $\mathfrak{L}$ *категории* $\mathcal{K}$ *называется* полной *подкатегорией, если* $H_{\mathfrak{L}}(A, B) = H_{\mathcal{K}}(A, B)$ *для любых* A*,* $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$.

Определение 0.9. *Морфизм* $\sigma : A \to B$ *называется* мономорфизмом *категории* $\mathcal{K}$ *(*$\sigma \in \mathrm{Mon}\,\mathcal{K}$*), если для любых* *двух морфизмов* $\alpha,\ \beta : X \to A$ *из равенства* $\sigma \circ \alpha = \sigma \circ \beta$ *следует равенство* $\alpha = \beta$.

Определение 0.10. *Морфизм* $\nu : A \to B$ *называется* эпиморфизмом *(*$\nu \in \mathrm{Ep}\,\mathcal{K}$*), если для любых* $\alpha,\ \beta : B \to Y$ *из равенства* $\alpha \circ \nu = \beta \circ \nu$ *следует равенство* $\alpha = \beta$.

Определение 0.11. *Морфизм* $\rho : A \to B$ *называется* биморфизмом *(*$\rho \in \mathrm{Bim}\,\mathcal{K}$*), если* $\rho \in \mathrm{Mon}\ \mathcal{K} \cap \mathrm{Ep}\ \mathcal{K}$.

Определение 0.12. *Морфизм* $\varphi : A \to B$ *называется* изоморфизмом *(*$\varphi \in \mathrm{Iso}\,\mathcal{K}$*), если существует такой морфизм* $\psi : B \to A$*, что* $\psi \circ \varphi = 1_A$ *и* $\varphi \circ \psi = 1_B$.

Определение 0.13. *Два объекта* $A,\ B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *называются* изоморфными*, если* $H_{\mathcal{K}}(A, B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathcal{K} \neq \varnothing$.

Определение 0.14. *Полная подкатегория* $\mathfrak{Z}$ *категории* $\mathcal{K}$*, содержащая ровно по одному представителю из каждого класса изоморфных объектов категории* $\mathcal{K}$*, называется* скелетом *категории* $\mathcal{K}$.

Определение 0.15. *Объект* 0_r *категории* $\mathcal{K}$ *называется* правым нулем *категории* $\mathcal{K}$*, если для каждого* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\alpha_A : A \to 0_r$.

Определение 0.16. *Объект* 0_l *называется* левым нулем *категории* $\mathcal{K}$*, если для каждого* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$ *существует единственный морфизм* $\beta_A : 0_l \to A$.

Определение 0.17. Одноместным ковариантным функтором *из категории* $\mathcal{K}$ *в категорию* $\mathfrak{L}$ *называется соответствие* $F : \mathcal{K} \to \mathfrak{L}$*, удовлетворяющее условиям:*

1) $F(A) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ *для каждого* $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}$;
2) $F(\alpha) \in H_{\mathfrak{L}}(F(A), F(B))$ *для каждого* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$;
3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$ *для любого единичного морфизма категории* $\mathcal{K}$;

4) *если* $\alpha \in H_{\mathcal{K}}(A, B)$, $\beta \in H_{\mathcal{K}}(B, C)$, *то* $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$.

Определение 0.18. *Одноместный ковариантный функтор, взаимно-однозначно отображающий категорию* $\mathcal{K}$ *на категорию* $\mathfrak{L}$, *называется* изоморфизмом *категорий.*

Динамические системы.

Определение 0.19. Динамической системой с дискретным временем *называют пару* (X, f), *где* X *— топологическое пространство,* $f : X \to X$ *гомеоморфизм. Пространство* X *называют* фазовым пространством *этой динамической системы.*

Рассмотрим категорию $\mathcal{K}$, объектами которой являются динамические системы, а морфизмами динамических систем (X, f) и (Y, g) служат непрерывные отображения $h : X \to Y$ их фазовых пространств, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \tag{0.6}$$

В дальнейшем мы будем обозначать морфизм h объекта (X, f) в (Y, g) следующим образом:

$$h : (X, f) \to (Y, g)\,.$$

Определение 0.20. *Морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$ *называется* вложением *динамической системы* (X, f) *в* (Y, g), *если отображение* h *инъективно. В этом случае* (X, f) *называется* подсистемой *динамической системы* (Y, g).

Определение 0.21. *Морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$ *называется* проекцией, *если* $h(X) = Y$.

Динамическая система (Y, g) *называется* фактор-системой *динамической системы* (X, f).

Динамическая система (X, f) *называется* расширением *динамической системы* (Y, g).

Определение 0.22. *Назовём динамические системы* (X, f) *и* (Y, g) топологически сопряженными, *если существует такой морфизм* $h : (X, f) \to (Y, g)$, *что отображение* $h : X \to Y$ *является гомеоморфизмом пространства* X *на пространство* Y.

Во всех дальнейших рассмотрениях мы ограничимся полной подкатегорией $\mathcal{K}_0$ категории $\mathcal{K}$, объектами которой являются *динамические системы с хаусдорфовыми компактными фазовыми пространствами.* Мы их будем называть динамическими системами или *потоками.*

Определение 0.23. *Пусть* (X, f) *— динамическая система (пространство* X *хаусдорфово и компактно). Подмножество* $A \subseteq X$ *называется* инвариантным множеством (X, f), *если* $f(A) = A$.

С каждой точкой $x \in X$ фазового пространства динамической системы (X, f) принято связывать такие инвариантные множества:

– траектория точки x

$$\mathrm{Orb}_f(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(x)\,;$$

– замыкание $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ траектории точки x;
– α и ω–предельные множества точки x

$$\alpha(x) = \bigcap_{n<0} \overline{\bigcup_{k \le n} f^k(x)}\,, \quad \omega(x) = \bigcap_{n>0} \overline{\bigcup_{k \ge n} f^k(x)}\ .$$

Определение 0.24. *Точка x называется* устойчивой по Пуассону в отрицательном (положительном) направлении*, если $\alpha(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ (если $\omega(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$).*

Точка x называется устойчивой по Пуассону*, если $\alpha(x) = \omega(x) = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$.*

Определение 0.25. *Точка x называется* рекуррентной*, если для любой окрестности U точки x найдется такое $n(U) \in \mathbb{N}$, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство*

$$U \cap \bigcup_{i=k}^{k+n(U)-1} f^i(x) \neq \varnothing\,.$$

Определение 0.26. *Точка x называется* почти периодической*, если для любой окрестности U точки x найдется такое $n(U) \in \mathbb{N}$, что*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{kn(U)}(x) \subseteq U\,.$$

Замечание 0.3. *Последнее определение ни в коем случае не является общепринятым.*

Существует другая терминология (см. [2, 12]), согласно которой точки, устойчивые по Пуассону, называются рекуррентными, а рекуррентные точки называются почти периодическими.

Определение 0.27. *Назовем непустое замкнутое инвариантное множество $A \subseteq X$* минимальным множеством *динамической системы (X, f), если A не содержит собственных замкнутых инвариантных подмножеств этой динамической системы.*

Несложно видеть, что для объекта (X, f) категории $\mathcal{K}_0$ минимальное множество A характеризуется тем, что $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = A$ для каждого $x \in A$.

В дальнейшем нам будет необходим следующий результат (см. [2, 4, 12])

Теорема 0.1 (Birkhoff). *Каждый объект (X, f) категории $\mathcal{K}_0$ обладает следующими свойствами:*

- *для каждого $x \in X$ множества $\alpha(x)$ и $\omega(x)$ содержат некоторые минимальные подмножества динамической системы (X, f);*
- *для любой рекуррентной точки $x \in X$ множество $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ минимально;*
- *каждая точка $x \in A$ произвольного минимального множества A является рекуррентной.*

Определение 0.28. *Динамическая система (X, f) называется* минимальной*, если ее фазовое пространство X является минимальным множеством.*

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 0.2. *Пусть (X, f), (Y_1, g_1), $(Y_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_0$, $\varphi_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ и $\varphi_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ — морфизмы.*

Пусть отображение $\varphi_1 : X \to Y_1$ сюръективно. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) *разбиение $\mathrm{zer}\,\varphi_1$ пространства X является измельчением разбиения $\mathrm{zer}\,\varphi_2$;*
(2) *существует морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такой что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.*

Доказательство. **1.** Пусть разбиение $\mathrm{zer}\,\varphi_1$ пространства X является измельчением разбиения $\mathrm{zer}\,\varphi_2$.

Известно, что отображение компакта в Хаусдорфово пространство замкнуто (см. [1]). Известно также, что непрерывное сюръективное замкнутое отображение является факторным (см. предложение 0.1).

Итак, сюръективное отображение компактов $\varphi_1 : X \to Y_1$ является факторным и мы находимся в условиях леммы 0.1.

Следовательно, существует непрерывное отображение $\psi : Y_1 \to Y_2$, такое что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Проверим коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ Y_2 & \xrightarrow[g_2]{} & Y_2 \end{array}$$

Пусть $y_1 \in Y_1$. Так как отображение φ_1 сюръективно по условию леммы, то найдется $x \in \varphi_1^{-1}(y_1) \subseteq X$. Тогда $g_2 \circ \psi(y_1) = g_2 \circ \psi \circ \varphi_1(x) = g_2 \circ \varphi_2(x) = \varphi_2 \circ f(x) = \psi \circ \varphi_1 \circ f(x) = \psi \circ g_1 \circ \varphi_1(x) = \psi \circ g_1(y_1)$.

Из-за произвола в выборе точки $y_1 \in Y_1$ заключаем, что $\psi \circ g_1 = g_2 \circ \psi$ и $\psi \in \operatorname{Mor} \mathcal{K}_0$.

2. Пусть существует морфизм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такой что $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Тогда $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 : X \to Y_2$ и дальнейшее доказательство в точности повторяет вторую часть доказательства леммы 0.1. □

1. Периодические разбиения.

1.1. **Определение периодического разбиения.** Пусть заданы компактное хаусдорфово пространство X и гомеоморфизм $f : X \to X$.

Определение 1.1. *Конечный набор* $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ *подмножеств пространства* X *назовём* периодическим разбиением *динамической системы* (X, f) длины m, *если он удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *все* $W_i^{(m)}$ *— открыто-замкнутые подмножества пространства* X*;*
(ii) $W_i^{(m)} = f(W_{i-1}^{(m)})$, $i = 1, \ldots, m-1$ *и* $W_0^{(m)} = f(W_{m-1}^{(m)})$*;*
(iii) $W_i^{(m)} \cap W_j^{(m)} = \varnothing$ *при* $i \neq j$*;*
(iv) $X = \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i^{(m)}$.

Определение 1.2. *Множество всех длин всевозможных периодических разбиений динамической системы* (X, f) *назовем* множеством периодов *динамической системы* (X, f) *и обозначим* $\mathcal{P}(X, f)$.

Замечание 1.1. *Для любой динамической системы* (X, f) *множество* $\mathcal{P}(X, f)$ *не пусто. Действительно, всегда существует тривиальное периодическое разбиение* $W^{(1)} = \{W_0^{(1)} = X\}$ *динамической системы* (X, f) *длины единица, т. е.* $1 \in \mathcal{P}(X, f)$.

Замечание 1.2. *Пусть* $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (X, f) *длины* m. *Из свойств (ii) и (iii) определения 1.1 немедленно следует, что для каждого* $n \in \mathbb{Z}$

$$f^n(W_0^{(m)}) = W_i^{(m)}, \text{ если } n \equiv i \pmod{m} \text{ и}$$
$$f^n(W_0^{(m)}) \cap W_i^{(m)} = \varnothing, \text{ если } n \not\equiv i \pmod{m}.$$

Более обще:

$$f^n(W_i^{(m)}) = W_j^{(m)}, \text{ если } n \equiv j - i \pmod{m} \text{ и}$$
$$f^n(W_i^{(m)}) \cap W_j^{(m)} = \varnothing, \text{ если } n \not\equiv j - i \pmod{m}.$$

Базовые свойства множества $\mathcal{P}(X, f)$ описываются следующими двумя утверждениями

Предложение 1.1. *Пусть* $m \in \mathcal{P}(X, f)$ *и* m *делится на* $d \in \mathbb{N}$. *Тогда* $d \in \mathcal{P}(X, f)$.

Доказательство . Пусть $\{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ — периодическое разбиение длины m. Представим m в виде $m = ad$, $a \in \mathbb{N}$. Рассмотрим набор множеств

$$V_j^{(d)} = \bigcup_{k=0}^{a-1} W_{j+kd}^{(m)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\ , \\ s\equiv j \pmod d}} f^s(W_0^{(m)}) \ , \quad j = 0, \ldots, d-1 \ .$$

Очевидно, так определенный набор множеств $\{V_j^{(d)}\}_{j=0}^{d-1}$ удовлетворяет свойствам (i), (iii) и (iv) определения 1.1. Проверим, что он удовлетворяет свойству (ii) этого определения.

Так как $m \equiv 0 \pmod d$, то сравнения $s \equiv j \pmod d$ и $s \equiv j + tm \pmod d$ эквивалентны для всех $t \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, $f^{tm}(W_s^{(m)}) = W_s^{(m)}$, $t \in \mathbb{Z}$, $s = 0, \ldots, m-1$. Поэтому

$$V_j^{(d)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\ , \\ s\equiv j \pmod d}} f^s(W_0^{(m)}) = \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m-1\}\ , \\ s\equiv j \pmod d}} f^{tm+s}(W_0^{(m)}) =$$

$$= \bigcup_{t\in\mathbb{Z}} \bigcup_{\substack{r\in\{tm,\ldots,(t+1)m-1\}\ , \\ r\equiv j \pmod d}} f^r(W_0^{(m)}) = \bigcup_{\substack{r\in\mathbb{Z}\ , \\ r\equiv j \pmod d}} f^r(W_0^{(m)}) \ .$$

Спаведливость свойства (ii) определения 1.1 есть очевидным следствием этой цепочки равенств.

Предложение доказано. □

Предложение 1.2. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ и D — наименьшее общее кратное чисел m_1 и m_2. Тогда $D \in \mathcal{P}(X, f)$.*

Для того, чтобы доказать предложение 1.2, нам понадобятся некоторые дополнительные рассмотрения, которым будет посвящен следующий раздел.

1.2. **Основные свойства периодических разбиений.** Ясно, что для любого $m \in \mathcal{P}(X, f)$, $m > 1$, существует больше одного периодического разбиения динамической системы (X, f) длины m. Действительно, фиксировав разбиение $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ можно для произвольного $k \in \{1, \dots, m-1\}$ построить периодическое разбиение $W^{(m)}(k) = \{W_i^{(m)}(k)\}_{i=0}^{m-1}$ при помощи циклической перестановки индексов элементов разбиения $W_i^{(m)}$,

$$W_j^{(m)}(k) = W_i^{(m)} \quad \text{при } j \equiv i + k \pmod{m}, \qquad j = 0, \dots, m-1 .$$

Определение 1.3. *Пусть $m \in \mathcal{P}(X, f)$. Два периодических разбиения динамической системы (X, f) назовем* эквивалентными, *если одно разбиение может быть получено из другого при помощи циклической перестановки индексов.*

Зададимся таким вопросом: если $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$, то при каких условиях для $m \in \mathcal{P}(X, f)$ любые два периодических разбиения длины m эквивалентны?

Определение 1.4. *Динамическую систему (X, f) назовем* неразложимой, *если она удовлетворяет свойству*

(A) *Если $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и X_1, X_2 — замкнутые инвариантные подмножества динамической системы (X, f), то либо $X_1 = \varnothing$, либо $X_2 = \varnothing$.*

Замечание 1.3. *Пусть K — замкнутое инвариантное множество динамической системы (X, f), которая обладает периодическим разбиением $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ длины m.*

Для каждого $i = 0, \dots, m-1$

$$f(W_i^{(m)} \cap K) = f(W_i^{(m)}) \cap f(K) = f(W_i^{(m)}) \cap K ,$$

поэтому, в частности, $W_i^{(m)} \cap K \neq \varnothing$, $i = 0, \dots, m-1$, *и если* K *открыто-замкнуто в* X, *то набор множеств* $\{V_i^{(m)} = W_i^{(m)} \cap K\}_{i=0}^{m-1}$ *удовлетворяет свойствам (i) – (iii) определения 1.1.*

Предложение 1.3. *Пусть* $m \in \mathcal{P}(X, f)$, $m > 1$. *Динамическая система* (X, f) *неразложима тогда и только тогда, когда существует единственное с точностью до циклической перестановки индексов периодическое разбиение* $W^{(m)}$ *длины* m.

Доказательство. 1. Пусть $W^{(m)}$, $\widetilde{W}^{(m)}$ — два неэквивалентных периодических разбиения динамической системы (X, f) длины m.

Из свойства (iv) определения 1.1 следует, что циклической перестановкой индексов в одном из разбиений мы можем добиться того, чтобы $V_0^{(m)} = W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)} \neq \varnothing$. По нашему предположению $W_0^{(m)} \neq \widetilde{W}_0^{(m)}$. Пусть, например, $K = W_0^{(m)} \setminus \widetilde{W}_0^{(m)} \neq \varnothing$.

Обозначим $V_i^{(m)} = f^i(V_0^{(m)})$, $i = 1, \dots, m-1$. Заметим, что $V_i^{(m)} \subset W_i^{(m)}$, поэтому $V_i^{(m)} \cap W_0^{(m)} = \varnothing$ при $i = 1, \dots, m-1$. Это следует из условия (iii) определения 1.1.

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
f(V_{m-1}^{(m)}) = f^m(V_0^{(m)}) = f^m(W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)}) = \\
= f^m(W_0^{(m)}) \cap f^m(\widetilde{W}_0^{(m)}) = W_0^{(m)} \cap \widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m)} .
\end{aligned}
$$

Третье равенство справедливо, так как f — гомеоморфизм, предпоследнее равенство следует из условия (ii) определения 1.1.

Следовательно,

$$X_1 = \bigcup_{i=0}^{m-1} V_i^{(m)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i(V_0^{(m)})$$

— инвариантное подмножество динамической системы (X, f) (тогда и $X_2 = X \setminus X_1$ является инвариантным для этой динамичесткой системы). При этом $X_1 \neq \varnothing$ по построению и $X_2 \neq \varnothing$, так как $X_1 \cap W_0^{(m)} = V_0^{(m)}$ и $W_0^{(m)} \setminus V_0^{(m)} = K \subset X \setminus X_1$.

Из условия (i) определения 1.1 следует, что множество $V_0^{(m)}$ (а вместе с ним и все $V_i^{(m)}$) открыто-замкнутое, тогда и множества X_1, X_2 открыто-замкнуты в X.

Итак, динамическая система (X, f) не является неразложимой.

Случай $\widetilde{W}_0^{(m)} \setminus W_0^{(m)} \neq \varnothing$ рассматривается аналогично.

2. Обратно, предположим, что динамическая система (X, f) не является неразложимой. Фиксируем разбиение $X = X_1 \cup X_2$ пространства X на два собственных непересекающихся инвариантных замкнутых подмножества. Отметим, что подмножества X_1 и X_2 будут также и открыты в X.

Фиксируем кроме того периодическое разбиение $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ динамической системы (X, f) длины m.

Непустые наборы множеств $\{V_i^{(m),1} = W_i^{(m)} \cap X_1\}_{i=0}^{m-1}$ и $\{V_i^{(m),2} = W_i^{(m)} \cap X_2\}_{i=0}^{m-1}$ удовлетворяют свойствам (i) – (iii) определения 1.1 (см. замечание 1.3).

Легко видеть, что

$$X_j = X_j \cap \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i^{(m)} = \\ = \bigcup_{i=0}^{m-1} (W_i^{(m)} \cap X_j) = \bigcup_{i=0}^{m-1} V_i^{(m),\,j}\ , \quad j = 1, 2\ .$$

Так как $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $V_r^{(m),\,1} \cap V_s^{(m),\,2} = \varnothing$ для любых $r, s \in \{0, \ldots, m-1\}$.

Положим

$$\widetilde{W}_i^{(m)} = V_i^{(m),\,1} \cup V_{i-1}^{(m),\,2}\ , \quad i = 1, \ldots, m-1\ ,$$

$$\widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m),\,1} \cup V_{m-1}^{(m),\,2}\ .$$

Элементарная непосредственная проверка показывает, что семейство множеств $\{\widetilde{W}_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины m. При этом $W_0^{(m)} \setminus \widetilde{W}_0^{(m)} = V_0^{(m),\,1} \neq \varnothing$, $\widetilde{W}_0^{(m)} \setminus W_0^{(m)} = V_{m-1}^{(m),\,2} \neq \varnothing$.

Следовательно, набор $\{\widetilde{W}_i^{(m)}\}$ не может быть получен из набора $\{W_i^{(m)}\}$ при помощи циклической перестановки индексов. $\square$

Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$, d и D — соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел m_1 и m_2.

Рассмотрим два периодических разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ пространства X длин m_1 и m_2.

Предложение 1.4. *Пусть пересечение $W_k^1 \cap W_l^2$ не пусто для некоторых $k \in \{0, \ldots, m_1-1\}$, $l \in \{0, \ldots, m_2-1\}$.*

Тогда набор множеств $\{V_s^{(D)} = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет условиям (i) — (iii) определения 1.1.

Доказательство. В силу определения 1.1 для периодических разбиений $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ множество $V_0^{(D)} = W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}$ открыто-замкнуто в X. Так как f — гомеоморфизм, то и все $V_s^{(D)}$ открыто-замкнуты в X и набор $\{V_s^{(D)}\}$ удовлетворяет условию (i) определения 1.1.

Снова, учитывая взаимную однозначность отображения f, получим

$$(1.1)\quad f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)})\,, \quad s \in \mathbb{Z}\,,$$

в частности,

$$f(V_{D-1}^{(D)}) = f^D(V_0^{(D)}) = f^D(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ = f^D(W_k^{(m_1)}) \cap f^D(W_l^{(m_2)}) = W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} = V_0^{(D)}\,,$$

так как по своему определению $D \equiv 0 \pmod{m_r}$, $r = 1, 2$. Этим доказано выполнение свойства (ii) определения 1.1.

С учетом свойства (ii) определения 1.1 и равенство (1.1), для доказательства свойства (iii) нам теперь достаточно проверить, что $V_0^{(D)} \cap V_s^{(D)} = \varnothing$, $s = 1, \ldots, D-1$.

Предположим, что $V_0^{(D)} \cap f^s(V_0^{(D)}) \neq \varnothing$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Тогда, в частности,

$$W_k^{(m_1)} \cap f^s(W_k^{(m_1)}) \neq \varnothing\,, \quad W_l^{(m_2)} \cap f^s(W_l^{(m_2)}) \neq \varnothing\,,$$

а это возможно в силу замечания 1.2 только если $s \equiv 0 \pmod{m_1}$ и $s \equiv 0 \pmod{m_2}$, то есть только тогда, когда s — общее кратное чисел m_1 и m_2. Следовательно, $V_0^{(D)} \cap V_s^{(D)} = \varnothing$ при $s = 1, \ldots, D-1$ и набор множеств $\{V_s^{(D)}\}$ удовлетворяет свойству (iii) определения 1.1. $\square$

Обозначим

$$V_s^{(D)}(k,l) = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\,, \quad s = 0, \ldots, D-1\,,$$

$$A(k,l) = \bigcup_{s=0}^{D-1} V_s^{(D)}(k,l)\ .$$

Из предложения 1.4 следует, что $A(k,l)$ — открыто-замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (X,f) и если множество $V_0^{(D)}(k,l)$ не пусто, то набор множеств $\{V_s^{(D)}(k,l)\}_{s=0}^{D-1}$ является периодическим разбиением динамической системы $(A(k,l), f|_{A(k,l)})$ длины D.

Замечание 1.4. *Если динамическая система (X,f) неразложима, то либо $A(k,l)=\varnothing$, либо $A(k,l)=X$ и тогда $\{V_s^{(D)}(k,l)\}_{s=0}^{D-1}$ — периодическое разбиение динамической системы (X,f) длины D и $D \in \mathcal{P}(X,f)$.*

Из свойства (iv) определения 1.1 следует, что найдутся k,l, для которых множество $A(k,l)$ не пусто. Из сказанного заключаем, что предложение 1.2 справедливо для неразложимых динамических систем.

Если динамическая система (X,f) не является неразложимой, вообще говоря, не обязательно $A(k,l) \in \{\varnothing\}\cup\{X\}$.

Определение 1.5. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X,f)$. Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ динамической системы (X,f) называются* согласованными*, если для любых $k \in \{0,\ldots,m_1-1\}$, $l \in \{0,\ldots,m_2-1\}$ либо $A(k,l)=\varnothing$, либо $A(k,l)=X$.*

Замечание 1.5. *Из предложения 1.4 легко следует, что если $m_2=m_1$, то согласованность разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ означает, что эти два разбиения эквивалентны.*

Замечание 1.6. *Непосредственным следствием определений эквивалентности и согласованности периодических разбиений является следующее утверждение.*

Пусть периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы. Тогда если периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m_2)}$ эквивалентно разбиению $W^{(m_2)}$, то периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(m_2)}$ согласованы.

Если для некоторых m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ найдутся согласованные разбиения пространства X длин m_1 и m_2, то, повторяя рассуждения из замечания 1.4, можно утверждать, что наименьшее общее кратное D чисел m_1 и m_2 лежит в $\mathcal{P}(X, f)$. Следовательно, доказательство предложения 1.2 сводится к проверке того, что для любой пары m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ существуют соответствующие согласованные периодические разбиения динамической системы (X, f).

В оставшейся части раздела мы докажем несколько более общее

Предложение 1.5. *Пусть m_1, $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$. Для любого периодического разбиения $W^{(m_1)}$ динамической системы (X, f) длины m_1 найдется согласованное с ним периодическое разбиение $W^{(m_2)}$ длины m_2.*

Следствие 1.1. *Пусть динамическая система (X, f) неразложима. Тогда любые два периодических разбиения динамической системы (X, f) согласованы.*

Для доказательства предложения 1.5 изучим некоторые свойства конструкций, описанных выше.

Из замечания 1.3 следует, что набор $\{W_i^{(m_r)} \cap A(k,l)\}_{i=0}^{m_r}$, $r = 1, 2$, является периодическим разбиением длины m_r для динамической системы $(A(k,l), f|_{A(k,l)})$.

Следующее предложение дает ответ на вопрос, как связаны периодические разбиения $\{V_s^{(D)}(k,l)\}_{s=0}^{D-1}$ и $\{W_i^{(m_r)} \cap A(k,l)\}_{i=0}^{m_r}$, $r = 1, 2$, динамической системы $(A(k,l), f|_{A(k,l)})$.

Лемма 1.1. *Пусть* $V_0^{(D)}(k,l) \neq \varnothing$, $i \in \{0,\dots,m_1-1\}$, $j \in \{0,\dots,m_2-1\}$.

Если $j-i \equiv l-k \pmod d$, *то* $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \subseteq A(k,l)$. *При этом* $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} = V_s^{(D)}(k,l)$, *где* $s \in \{0,\dots,D-1\}$ *является решением системы сравнений*

$$\begin{cases} s \equiv i-k \pmod{m_1}, \\ s \equiv j-l \pmod{m_2}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Если $j-i \not\equiv l-k \pmod d$, *то* $(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap A(k,l) = \varnothing$.

Замечание 1.7. *Напомним, что система (1.2) совместна тогда и только тогда, когда* $j-i \equiv l-k \pmod d$ *(см. [5]).*

Доказательство леммы 1.1. **1.** Пусть $j-i \equiv l-k \pmod d$. Тогда существует единственное $(\mathrm{mod}\ D)$ решение s системы (1.2) (см. [5]). Следовательно,

$$\begin{aligned} &A(k,l) \supseteq V_s^{(D)}(k,l) = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ &= f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)}) = f^{i-k}(W_k^{(m_1)}) \cap f^{j-l}(W_l^{(m_2)}) = \\ &\qquad = f^{i-k} \circ f^k(W_0^{(m_1)}) \cap f^{j-l} \circ f^l(W_0^{(m_2)}) = \\ &\qquad\qquad = f^i(W_0^{(m_1)}) \cap f^j(W_0^{(m_2)}) = W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что f — гомеоморфизм и, в частности, отображения f и f^{-1} взаимно–однозначны.

2. Предположим теперь, что $(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap A(k,l) \neq \varnothing$. Тогда найдется $s \in \{0,\dots,D-1\}$, такое что

$$\begin{aligned} &(W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap (f^s(W_k^{(m_1)}) \cap f^s(W_l^{(m_2)})) = \\ &\quad = (W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)}) \cap V_s^{(D)}(k,l) \neq \varnothing. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W_i^{(m_1)} \cap f^s(W_k^{(m_1)}) \neq \varnothing \text{ и } W_j^{(m_2)} \cap f^s(W_l^{(m_2)}) \neq \varnothing\,.$$

Из замечания 1.2 теперь вытекает, что s удовлетворяет системе (1.2), и, в частности, $i-k \equiv j-l \pmod{d}$. $\square$

Следствие 1.2. *Пусть множества $A(k_1,l_1)$, $A(k_2,l_2)$ не пусты для некоторых $k_1,k_2 \in \{0,\dots,m_1-1\}$ и $l_1,l_2 \in \{0,\dots,m_2-1\}$.*

Если $k_1-k_2 \equiv l_1-l_2 \pmod{d}$, то $A(k_1,l_1)=A(k_2,l_2)$. В противном случае $A(k_1,l_1) \cap A(k_2,l_2)=\varnothing$.

Доказательство. Мы уже знаем, что $A(k_1,l_1)$ и $A(k_2,l_2)$ — замкнутые инвариантные подмножества динамической системы (X,f).

1. Пусть $k_1-k_2 \equiv l_1-l_2 \pmod{d}$. Тогда $(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \subseteq A(k_2,l_2)$ согласно лемме 1.1. Следовательно,

$$A(k_1,l_1)=\bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(A(k_2,l_2)) = A(k_2,l_2)\,.$$

Меняя ролями $A(k_1,l_1)$ и $A(k_2,l_2)$, получим обратное включение.

2. Пусть теперь $k_1-k_2 \not\equiv l_1-l_2 \pmod{d}$. Тогда

$$\varnothing = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \cap f^s(A(k_2,l_2)) =$$
$$= \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s(W_{k_1}^{(m_1)} \cap W_{l_1}^{(m_2)}) \cap A(k_2,l_2) = A(k_1,l_1) \cap A(k_2,l_2)\,.$$

Следствие доказано. □

Следствие 1.3. *Если выполняется равенство* $A(k,l) = X$ *для* $k \in \{0,\dots,m_1-1\}$ *и* $l \in \{0,\dots,m_2-1\}$*, то периодические разбиения* $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы.*

Следствие 1.4. *Если для* $k \in \{0,\dots,m_1\}$ *и* $l \in \{0,\dots,m_2\}$ *найдется множество* $K \subseteq W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}$*, такое что*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K) = X\ ,$$

то периодические разбиения $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы.*

Доказательство . Утверждение следствия вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(K) \ &\subseteq \ \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}) = \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{r=0}^{D-1} f^{r+Dm}(V_0^{(D)}(k,l)) = \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{Dm}\left(\bigcup_{r=0}^{D-1} f^r(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\right) = \\ &= \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{Dm}(A(k,l)) = A(k,l) \end{aligned}$$

и следствия 1.3 □

Следствие 1.5. *Предположим, что* $W_k^{(m_1)} \supseteq W_l^{(m_2)}$ *для некоторых* $k \in \{0,\dots,m_1-1\}$ *и* $l \in \{0,\dots,m_2-1\}$

Тогда

1) *разбиения* $W^{(m_1)}$ *и* $W^{(m_2)}$ *согласованы;*
2) m_1 *делит* m_2*.*

Доказательство . 1. Возьмем $K = W_l^{(m_2)}$. Из свойства (iv) периодических разбиений и следствия 1.4 вытекает, что периодические разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы и $A(k,l) = X$.

2. Из леммы 1.1 следует, что $W_i^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $i \equiv k \pmod{d}$.

Предположим, что $d \neq m_1$. Тогда найдется такое $\tau \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$, $\tau \neq k$, что $\tau \equiv k \pmod{d}$. Следовательно, $W_\tau^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$. С другой стороны, $W_l^{(m_2)} \subseteq W_k^{(m_1)}$ по условию и $W_k^{(m_1)} \cap W_\tau^{(m_1)} = \varnothing$ по определению 1.1.

Полученное противоречие доказывает, что $d = m_1$ и m_1 делит m_2. $\square$

Следствие 1.6. *Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ и m_2 делится на m_1.*

Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы тогда и только тогда, когда разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $W^{(m_2)}$ согласованы.

Найдем $k \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$ и $l \in \{0, \ldots, m_2 - 1\}$, для которых $W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)} \neq \varnothing$. Тогда $A(k,l) = X$.

Так как m_1 делит m_2, то $d = m_1$.

Фиксируем $j \in \{0, \ldots, m_2 - 1\}$. Из леммы 1.1 следует, что $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $i \equiv j - l + k \pmod{m_1}$. Существует единственное $\tau \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$, такое что $\tau \equiv j - l + k \pmod{m_1}$. Так как

$$X = \bigcup_{i=0}^{m_1 - 1} W_i^{(m_1)}$$

и $W_i^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} = \varnothing$ при $i \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$, $i \neq \tau$, то $W_j^{(m_2)} \subseteq W_\tau^{(m_1)}$.

Из-за произвола в выборе $j \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ заключаем, что разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$.

2. Достаточность вытекает из следствия 1.5. $\square$

Доказательство предложения 1.5. Пусть $W^{(m_1)}$ — периодическое разбиение длины m_1. Фиксируем периодическое разбиение $W^{(m_2)}$ длины m_2.

Рассмотрим множества

$$A(0, j) = \bigcup_{s=0}^{D-1} f^s \left(W_0^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \right) , \quad j = 0, \dots, m_2 - 1 .$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} W_0^{(m_1)} &= W_0^{(m_1)} \cap \bigcup_{j=0}^{m_2-1} W_j^{(m_2)} = \\ &= \bigcup_{j=0}^{m_2-1} \left(W_0^{(m_1)} \cap W_j^{(m_2)} \right) \subseteq \bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) . \end{aligned}$$

Так как $A(0, j)$, $j = 0, \dots, m_2 - 1$, — инвариантные подмножества динамической системы (X, f), то

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) &= \bigcup_{j=0}^{m_2-1} \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i(A(0, j)) = \\ &= \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i \left(\bigcup_{j=0}^{m_2-1} A(0, j) \right) \supseteq \bigcup_{i=0}^{m_1-1} f^i(W_0^{(m_1)}) = X . \end{aligned}$$

Из следствия 1.2 нам известно, что $A(0, j) = A(0, k)$ при $j \equiv k \pmod d$ и $A(0, j) \cap A(0, k) = \varnothing$ при $j \not\equiv k \pmod d$,

поэтому
$$X = \bigcup_{j=0}^{d-1} A(0,j)\ .$$
В последнем равенстве все множества $A(0,j)$ попарно не пересекаются. Некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Пусть $A_1 = A(0,k_1), \ldots, A_l = A(0,k_l)$ — все непустые множества из набора $\{A(0,j)\}_{j=0}^{d-1}$.

Обозначим
$$\begin{aligned} V_s^{(D)}(j) &= V_s^{(D)}(0,k_j) = f^s\left(W_0^{(m_1)} \cap W_{k_j}^{(m_2)}\right)\ , \\ & j = 1,\ldots,l\ , \quad s = 0,\ldots,D-1\ . \end{aligned}$$
Тогда
$$X = \bigcup_{j=1}^{l} A_j = \bigcup_{j=1}^{l}\bigcup_{s=0}^{D-1} V_s^{(D)}(j) = \bigcup_{s=0}^{D-1}\left(\bigcup_{j=1}^{l} V_s^{(D)}(j)\right)\ , \tag{1.3}$$
Заметим, что $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(j) = \varnothing$, если $s \neq r$ или $i \neq j$.

Действительно, $V_s^{(D)}(i) \subset A_i$, $V_r^{(D)}(j) \subset A_j$, поэтому по построению $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(j) \subset A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Пусть теперь $i = j$. Из предложения 1.4 мы знаем, что набор множеств $\{V_s^{(D)}(i)\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii) определения 1.1. Следовательно, $V_s^{(D)}(i) \cap V_r^{(D)}(i) = \varnothing$ при $s \neq r$.

Обозначим
$$\widetilde{W}_0^{(D)} = \bigcup_{j=1}^{l} V_0^{(D)}(j)\ ,$$
$$\widetilde{W}_s^{(D)} = f^s\left(\widetilde{W}_0^{(D)}\right) = \bigcup_{j=1}^{l} V_s^{(D)}(j)\ , \quad s = 1,\ldots,D-1\ .$$
Из сказанного выше вытекает, что $\widetilde{W}_s^{(D)} \cap \widetilde{W}_r^{(D)} = \varnothing$ при $s \neq r$, то есть набор множеств $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}_{s=0}^{D-1}$ удовлетворяет

условию (iii) определения 1.1. Из формулы (1.3) следует, что этот набор удовлетворяет также и свойству (iv) указанного определения.

Вспомним, что все наборы множеств $\{V_s^{(D)}(i)\}_{s=0}^{D-1}$, $i = 1, \dots, l$, удовлетворяют свойствам (i) – (iii) определения 1.1. Из этого, во первых, следует, что все множества набора $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}$ открыто замкнуты в X; во вторых,

$$f\left(\widetilde{W}_{D-1}^{(D)}\right) = \bigcup_{j=1}^{l} f(V_{D-1}^{(D)}(j)) = \bigcup_{j=1}^{l} V_0^{(D)}(j) = \widetilde{W}_0^{(D)} .$$

Итак, набор множеств $\{\widetilde{W}_s^{(D)}\}_{s=0}^{D-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины D. Этим мы полностью доказали предложение 1.2.

Периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(D)}$ согласованы, так как $\widetilde{W}_0^{(D)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ по построению (см. следствие 1.5).

Обозначим

$$\widetilde{W}_k^{(m_2)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\dots,D-1\}\ , \\ s\equiv k \pmod{m_2}}} \widetilde{W}_s^{(D)} , \quad k = 0, \dots, m_2 - 1 .$$

Простая непосредственная проверка показывает, что $\{\widetilde{W}_k^{(m_2)}\}_{k=0}^{m_2-1}$ — периодическое разбиение длины m_2 (см. доказательство предложения 1.1).

Из следствия 1.4 следует, что периодические разбиения $W^{(m_1)}$ и $\widetilde{W}^{(m_2)}$ согласованы, так как $W_0^{(m_1)} \cap \widetilde{W}_0^{(m_2)} \supseteq \widetilde{W}_0^{(D)}$.

Предложение 1.5 полностью доказано. □

Замечание 1.8. *Вообще говоря, если динамическая система (X, f) не является неразложимой, исходя из произвольного фиксированного разбиения $W^{(m_2)}$, можно построить больше одного периодического разбиения длины*

m_2, согласованного с заранее заданным разбиением $W^{(m_1)}$ длины m_1.

А именно, используя обозначения, введенные при доказательстве предложения 1.5, положим

$$\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l) = \bigcup_{j=1}^{l} V_{t_j}^{(D)}(j) \ ,$$

где $t_j \equiv 0 \pmod{m_1}$, $t_j \in \{0, \ldots, D-1\}$, $j = 1, \ldots, l$. Тогда, пользуясь замечанием 1.2, заключаем, что

$$\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l) \subseteq W_0^{(m_1)} \ .$$

Обозначим

(1.4)
$$\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l) \ = \bigcup_{\substack{s \in \{0, \ldots, D-1\}\ , \\ s \equiv k \pmod{m_2}}} f^s(\widetilde{W}_0^{(D)}(t_1, \ldots, t_l)) \ , \quad k = 0, \ldots, m_2 - 1 \ .$$

Теперь рассуждая так же, как и при доказательстве предложения 1.5, можно показать, что набор $\{\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l)\}_{k=0}^{m_2-1}$ является периодическим разбиением длины m_2, согласованным с разбиением $W^{(m_1)}$.

Пусть $\widetilde{W}_k^{(m_2)}(t_1, \ldots, t_l)$, $\widetilde{W}_r^{(m_2)}(\tau_1, \ldots, \tau_l)$ — два периодических разбиения вида (1.4). Заменяя их на эквивалентные, не нарушая отношение согласованности, можно добиться, чтобы $t_1 = \tau_1 = 0$ (см. замечание 1.5). Легко *видеть, что*

$$\bigcup_{s=0}^{m_2-1}\Big(\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,t_2,\dots,t_l)\cap\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,\tau_2,\dots,\tau_l)\Big)=$$
$$=A_1\cup\bigcup_{\substack{t_j=\tau_j\ ,\\ j\in\{2,\dots,l\}}}A_j\ .$$

Таким образом, согласованность периодических разбиений $\{\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,t_2,\dots,t_l)\}$ *и* $\{\widetilde{W}_s^{(m_2)}(0,\tau_2,\dots,\tau_l)\}$ *эквивалентна тому, что* $t_j=\tau_j$ *при всех* $j\in\{2,\dots,l\}$.

Замечание 1.9. *Очевидно, отношение согласованности двух периодических разбиений рефлексивно и симметрично. Однако предыдущее замечание показывает, что это отношение вообще говоря не транзитивно.*

1.3. **Правильные последовательности периодических разбиений.** В этом подразделе мы докажем ряд утверждений, которые связаны с исследованием вопроса о транзитивности отношения согласованности периодических разбиений и будут использоваться в дальнейших построениях.

В дальнейшем изложении нам понадобятся следующие объекты.

Определение 1.6. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i\in\mathcal{P}(X,f)\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Назовем последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X,f) правильной, *если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) n_k *делит* n_{k+1}, $k\in\mathbb{N}$;
2) *разбиения* $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ *и* $\{W_{s_{k+1}}^{(n_{k+1})}\}$ *согласованы для всех* $k\in\mathbb{N}$.

Замечание 1.10. *Используя следствие 1.6, легко видеть, что любая правильная последовательность* $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f) *удовлетворяет условию*

3) *периодические разбиения* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *и* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *согласованы для всех* $k, l \in \mathbb{N}$.

Действительно, пусть k, $l \in \mathbb{N}$, $k < l$. *Согласно следствию 1.6 разбиение* $\{W^{(n_i)}_{s_i}\}$ *пространства* X *является измельчением разбиения* $\{W^{(n_{i+1})}_{s_{i+1}}\}$ *для каждого* $i \in \mathbb{N}$. *Следовательно, разбиение* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *является измельчением разбиения* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *и, вновь используя следствие 1.6, заключаем, что разбиения* $\{W^{(n_l)}_{s_l}\}$ *и* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$ *согласованы.*

Предложение 1.6. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющая условию 1) определения 1.6.*

Существует правильная последовательность $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f).

Доказательство. Это утверждение легко доказывается при помощи индуктивного применения предложения 1.5. □

Предложение 1.7. *Пусть задана правильная последовательность* $\{W^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *периодических разбиений динамической системы* (X, f).

Пусть $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ *и* m_1 *делит* m_2.

Тогда

a) *найдется периодическое разбиение* $\{W^{(m_1)}_i\}_{i=0}^{m_1-1}$ *длины* m_1 *динамической системы* (X, f), *согласованное с каждым из разбиений* $\{W^{(n_k)}_{s_k}\}$, $k \in \mathbb{N}$;

b) *для любого периодического разбиения* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *из пункта* a) *найдется периодическое разбиение* $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и с каждым из разбиений* $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство предложения 1.7 опирается на три леммы.

Пусть $m_1, m_2, n \in \mathcal{P}(X, f)$, причем m_1 делит m_2.

Обозначим через d_i наибольший общий делитель чисел n и m_i, $i = 1, 2$; пусть также D_i — наименьшее общее кратное чисел n и m_i, $i = 1, 2$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$, $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$, $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *— периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1, m_2 *и* n*, соответственно. Пусть разбиения* $\{W_k^{(n)}\}$ *и* $\{W_j^{(m_2)}\}$ *согласованы.*

Если согласованы разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_j^{(m_2)}\}$*, то согласованы и разбиения* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}$.

Лемма 1.3. *Пусть* $d_1 = d_2$.

Пусть $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *— согласованные периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1*, и* n*, соответственно.*

Тогда любое периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с разбиением* $\{W_i^{(m_1)}\}$*, согласовано также и с разбиением* $\{W_k^{(n)}\}$.

Лемма 1.4. *Пусть* $D_1 = D_2$.

Пусть $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}_{k=0}^{n-1}$ *согласованные периодические разбиения динамической системы* (X, f) *длин* m_1*, и* n*, соответственно.*

Тогда найдется периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ *длины* m_2*, согласованное с каждым из разбиений* $\{W_i^{(m_1)}\}$ *и* $\{W_k^{(n)}\}$.

Доказательство леммы 1.2. Заменяя разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ на эквивалентное, можно считать, что $W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$ (см. замечание 1.6). Тогда $W_0^{(m_2)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ (см. следствие 1.6).

Аналогично, заменяя разбиение $\{W_k^{(n)}\}$ на эквивалентное, будем считать, что $K = W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$. Из определения 1.5 следует, что

$$\bigcup_{t\in\mathbb{Z}} f^t(K) = \bigcup_{t=0}^{D_2-1} f^t\left(W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)}\right) = X \ .$$

С другой стороны, $K = W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)}$, поэтому из следствия 1.4 следует, что разбиения $W_i^{(m_1)}$ и $W_k^{(n)}$ согласованы. □

Доказательство леммы 1.3. Так как $d_1 = d_2$ и d_1 делит m_1, то и d_2 делит m_1.

Пользуясь тем, что замена периодического разбиения на эквивалентное не влияет на отношение согласованности (см. замечание 1.6), можно считать, что $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$ и $W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)} \neq \varnothing$. Так как разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы, то $W_0^{(m_2)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ (см. следствие 1.6). Следовательно, $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$.

Обозначим

$$A = \bigcup_{s=0}^{D_2-1} f^s(W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)}) \ .$$

Учитывая следствие 1.3, для доказательства леммы нам достаточно проверить равенство $A = X$.

Рассмотрим пару согласованных разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$. Из определения 1.5, леммы 1.1 и следствия 1.6 следует, что

$$W_0^{(m_1)} = W_0^{(m_1)} \cap \bigcup_{s=0}^{m_2-1} f^s\left(W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)}\right) = \\ = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\ldots,m_2-1\}\,, \\ s\equiv 0 \pmod{m_1}}} W_s^{(m_2)}\ .$$

Рассмотрим теперь периодические разбиения $\{W_k^{(n)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$.

Из леммы 1.1 получим

$$W_0^{(n)} \cap A = W_0^{(n)} \cap \bigcup_{\substack{r\in\{0,\ldots,m_2-1\}\,, \\ r\equiv 0 \pmod{d_2}}} W_r^{(m_2)}\ .$$

Так как d_2 делит m_1, то сравнение $r \equiv 0 \pmod{d_2}$ есть следствием сравнения $r \equiv 0 \pmod{m_1}$ и

$$W_0^{(m_1)} = \bigcup_{\substack{r\in\{0,\ldots,m_2-1\}\,, \\ r\equiv 0 \pmod{m_1}}} W_r^{(m_2)} \subseteq \bigcup_{\substack{r\in\{0,\ldots,m_2-1\}\,, \\ r\equiv 0 \pmod{d_2}}} W_r^{(m_2)}\ .$$

Следовательно, $W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(n)} \cap A \subset A$. Но множество A является инвариантным относительно действия гомеоморфизма f, поэтому

$$A = \bigcup_{s=0}^{D_1-1} f^s(A) \supseteq \bigcup_{s=0}^{D_1-1} f^s\left(W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)}\right) = X\ .$$

Последнее равенство справедливо, так как периодические разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$ согласованы. $\square$

Доказательство леммы 1.4. Учитывая замечание 1.6, можно считать, что $W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)} \neq \varnothing$. Обозначим

$$V_s = f^s\left(W_0^{(n)} \cap W_0^{(m_1)}\right)\ , \quad s = 0, \dots, D_1 - 1\ .$$

Так как периодические разбиения $\{W_k^{(n)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$ согласованы и $D_2 = D_1$ по условию леммы, то

$$X = \bigcup_{s=0}^{D_1-1} V_s = \bigcup_{s=0}^{D_2-1} V_s$$

и $\{V_s\}_{s=0}^{D_2-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (X, f) длины D_2.

Обозначим

$$W_j^{(m_2)} = \bigcup_{\substack{s\in\{0,\dots,D_2-1\}\ , \\ s\equiv j \pmod{m_2}}} V_s\ , \quad j = 0, \dots, m_2 - 1\ .$$

Получим периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ динамической системы (X, f) длины m_2 (см. доказательство предложения 1.1).

Докажем теперь, что это периодическое разбиение согласовано с каждым из разбиений $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$.

Так как $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_2)}$ по построению, то $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_2)} \cap W_0^{(n)}$. Теперь из свойства (iv) определения 1.1 и из следствия 1.4 следует, что периодические разбиения $\{W_i^{(m_2)}\}$ и $\{W_k^{(n)}\}$ согласованы.

Аналогично, по построению $V_0 = W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(n)} \subseteq W_0^{(m_1)}$ и $V_0 \subseteq W_0^{(m_2)}$. Следовательно, $V_0 \subseteq W_0^{(m_1)} \cap W_0^{(m_2)}$ и из следствия 1.4 получим, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы. □

Доказательство предложения 1.7.

a) Пусть d_k^1 — наибольший общий делитель чисел n_k и m_1. Из условия 1) предложения следует, что n_{k+l} делится на d_k^1 при всех $l \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$d_1^1 \leq d_2^1 \leq \ldots \leq d_k^1 \leq \ldots .$$

С другой стороны, $d_k^1 \leq m_1$ при $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, найдется $l \in \mathbb{N}$, такое что $d_k^1 = d_l^1$ при $k \geq l$.

Пользуясь предложением 1.5, найдем периодическое разбиение $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ длины m_1, согласованное с разбиением $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$. Покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ это разбиение согласовано с разбиением $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$.

Пусть $k > l$. Тогда $d_k^1 = d_l^1$. Из замечания 1.10 следует, что разбиения $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы. Применяя лемму 1.3 к периодическим разбиениям $\{W_i^{(m_1)}\}$, $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы.

Пусть теперь $k < l$. Снова из замечания 1.10 получим, что разбиения $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы. Применяя теперь к периодическим разбиениям $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$ лемму 1.2, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ согласованы.

b) Пусть d_k^2 — наибольший общий делитель чисел n_k и m_2. Повторяя рассуждения пункта a), заключаем, что найдется $\tau \in \mathbb{N}$, такое что $d_k^2 = d_\tau^2$ при $k \geq \tau$.

Для доказательства пункта b) нам теперь достаточно найти периодическое разбиение длины m_2, согласованное одновременно с разбиениями $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ и $\{W_i^{(m_1)}\}$. Тогда повторяя рассуждения пункта а), мы докажем, что оно будет согласовано с каждым $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим тройку чисел m_1, m_2, $n_\tau \in \mathcal{P}(X, f)$. Обозначим для удобства через d_k и D_k наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел n_τ и m_k, $k = 1, 2$.

Так как m_1 делит m_2 по условию предложения, то d_1 делит d_2 и D_1 делит D_2. Пусть

$$m = \frac{m_1}{d_1} \cdot d_2 \ .$$

Ясно, что m_1 делит m, так как число d_2/d_1 целое. С другой стороны,

$$\frac{m_2}{m} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{m_2 n_\tau}{d_2}\right)\left(\frac{m_1 n_\tau}{d_1}\right)^{-1} = \frac{D_2}{D_1} \in \mathbb{N} \ ,$$

то есть m делит m_2.

Пусть d и D — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел m и n_τ.

Очевидно, d_1 делит d и d делит d_2. Так как число m_1/d_1 целое, то m делится на d_2 и d_2 является общим делителем чисел m и n_τ. Следовательно, $d_2 = d$.

С другой стороны,

$$D = \frac{m n_\tau}{d} = \frac{m_1 d_2}{d_1} \cdot \frac{n_\tau}{d_2} = \frac{m_1 n_\tau}{d_1} = D_1 \ .$$

Из предложения 1.1 следует, что $m \in \mathcal{P}(X, f)$, так как m делит m_2 и $m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$.

Применяя к числам m_1, m, $n_\tau \in \mathcal{P}(X, f)$ и согласованным периодическим разбиениям $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ лемму 1.4, найдем периодическое разбиение $\{W_k^{(m)}\}_{k=0}^{m-1}$ длины m, согласованное с каждым из этих разбиений.

Используя предложение 1.5, найдем периодическое разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ длины m_2, согласованное с разбиением $\{W_k^{(m)}\}$. Применяя лемму 1.3 к числам m, m_2, n_τ и периодическим разбиениям $\{W_k^{(m)}\}$, $\{W_j^{(m_2)}\}$, $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$, заключаем, что разбиения $\{W_j^{(m_2)}\}$ и $\{W_{s_\tau}^{(n_\tau)}\}$ согласованы.

Согласно следствию 1.6 разбиение $\{W_j^{(m_2)}\}$ пространства X является измельчением разбиения $\{W_k^{(m)}\}$, значит оно тем более является измельчением разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$. Снова применяя следствие 1.6, заключаем, что разбиения $\{W_i^{(m_1)}\}$ и $\{W_j^{(m_2)}\}$ согласованы.

Предложение 1.7 полностью доказано. □

Замечание 1.11. *Пусть задана правильная последовательность $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$ периодических разбиений и*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{r_i}^{(n_i)} \neq \varnothing$$

для некоторой последовательности $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Тогда из следствия 1.6 получим

$$W_{r_1}^{(n_1)} \supseteq W_{r_2}^{(n_2)} \supseteq \ldots W_{r_i}^{(n_i)} \supseteq \ldots .$$

Далее, если $K \subseteq X$ — замкнутое подмножество компакта X, такое что $K \cap W_{r_i}^{(n_i)} \neq \varnothing$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, то последовательность вложенных компактов

$$\left(K \cap W_{r_1}^{(n_1)}\right) \supseteq \ldots \supseteq \left(K \cap W_{r_i}^{(n_i)}\right) \supseteq \ldots$$

имеет непустое пересечение, иными словами,

$$K \cap \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_{r_i}^{(n_i)}\right) \neq \varnothing .$$

Определение 1.7. *Назовем правильные последовательности периодических разбиений* $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, и* $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}_{\tau_j=0}^{m_j-1}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, динамической системы* (X, f) согласованными*, если согласованы при всех* i*,* $j \in \mathbb{N}$ *периодические разбиения* $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}$ *и* $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}$*.*

Непосредственно из предложения 1.7 следует

Предложение 1.8. *Пусть* $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$*,* $i \in \mathbb{N}$*, — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы* (X, f)*.*

Пусть $m_j \in \mathcal{P}(X, f)$*,* $j \in \mathbb{N}$*, и* m_j *делит* m_{j+1} *для каждого* $j \in \mathbb{N}$*.*

Тогда найдется правильная последовательность $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}_{\tau_j=0}^{m_j-1}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, периодических разбиений динамической системы* (X, f)*, согласованная с последовательностью* $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}$*,* $i \in \mathbb{N}$*.*

Замечание 1.12. *Из следствия 1.1 немедленно следует, что если динамическая система* (X, f) *неразложима, то любые две правильные последовательности периодических разбиений этой динамической системы согласованы.*

Замечание 1.13. *Пусть задана последовательность чисел* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$*, удовлетворяющая условию 1) определения 1.6.*

Если динамическая система (X, f) *не является неразложимой, то найдутся два несогласованных периодических разбиения* $W^{(n_1)}$ *и* $\widetilde{W}^{(n_1)}$ *этой динамической системы (см. предложение 1.3 и замечание 1.5).*

Очевидно, правильные последовательности периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$*, построенные при* *помощи индуктивного применения предложения 1.5, исходя из разбиений $W^{(n_1)}$ и $\widetilde{W}^{(n_1)}$, соответственно, не будут согласованы.*

1.4. **Периодические разбиения и возвращаемость траекторий динамической системы.** Пусть (X, f) — некоторая динамическая система.

Лемма 1.5. *Пусть для некоторой рекуррентной точки $x \in X$ найдется замкнутая окрестность U, обладающая следующим свойством: существует $n \in \mathbb{N}$, для которого*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{kn}(x) \subset U\,.$$

Пусть

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{nk}(x) \in U \ \forall k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{1.5}$$

Тогда динамическая система $(\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}, f)$ обладает таким периодическим разбиением $\{W_i\}_{i=0}^{m-1}$ длины m, что $x \in W_0 \subseteq U$.

Доказательство. По теореме Биркгофа $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ является минимальным множеством д. с. (X, f). В частности, пространство $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ компактно.

Будем считать, что гомеоморфизм f задан на пространстве $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ с индуцированной с X топологией и все множества, которые возникнут в доказательстве, будем рассматривать именно в этой топологии.

Обозначим

$$W = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{mk}(x)}\,, \quad \widetilde{W} = \mathrm{Int} W\,.$$

Рассмотрим два набора множеств

$$\begin{aligned} W_0 = W\,, \quad & W_i = f^i(W) = f(W_{i-1})\,, \quad && i = 1, \dots, m-1\,; \\ & \widetilde{W}_i = \mathrm{Int} W_i\,, && i = 0, \dots, m-1\,. \end{aligned}$$

Ясно, что для набора множеств $\{W_i\}$ выполняются свойства (ii) и (iv) определения 1.1. Все множества W_i замкнуты, поэтому свойство (i) есть непосредственное следствие свойств (ii) и (iii).

Итак, для того, чтобы доказать лемму, достаточно проверить условие (iii) определения 1.1.

Сначала покажем, что $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Действительно, по теореме Бэра о категориях[1] из (iv) следует, что по крайней мере одно из множеств $\{W_i\}$ не является множеством I-й категории (и имеет непустую внутренность в $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$). Так как f — гомеоморфизм, то все W_i имеют непустую внутренность, то есть $\widetilde{W}_i \neq \varnothing$.

Теперь проверим соотношение $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Предположим, что это не так. Пусть $V = \widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j \neq \varnothing$ и, для определенности, $i < j$. Так как по построению множество $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{km+i}(x)$ плотно в $\widetilde{W}_i$, то $f^{ms+i}(x) \in V$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$.

$$f^{ms+i}(x) \in V \subseteq \widetilde{W}_j \subseteq W_j = \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{km+j}(x)}\,,$$

поэтому найдется последовательность $\{l_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ целых чисел, для которой $f^{ml_r+j}(x) \to f^{ms+i}(x)$ при $r \to \infty$. Из этого следует, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$

$$f^{m(l_r-s+k)+(j-i)}(x) \to f^{km}(x)\,.$$

То есть

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{km}(x) \subseteq \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^{km+(j-i)}(x)} = W_{j-i}\,.$$

[1] Теорема Бэра о категориях применима в пространствах, полных по Чеху, а как известно, любой компакт является пространством, полным по Чеху (см. [1])

Переходя к замыканиям, получим $W_0 \subseteq W_{j-i}$. Меняя ролями i и j, получим обратное включение. Следовательно, $W_0 = W_{j-i}$.

Заметим, что

$$f^{(j-i)k}(x) \in f^{(j-i)k}(W_0) = f^{(j-i)(k-1)} \circ f^{j-i}(W_0) = \\ = f^{(j-i)(k-1)}(W_0) = \ldots = W_0 \subseteq U$$

при $k \geq 0$ и

$$\begin{aligned} f^{-|k|(j-i)}(x) \quad \in \quad & f^{-|k|(j-i)}(W_0) = f^{-|k|(j-i)}(W_{j-i}) = \\ & = f^{(-|k|+1)(j-i)} \circ f^{-(j-i)}(W_{j-i}) = \\ & = f^{(-|k|+1)(j-i)}(W_0) = \ldots = W_0 \quad \subseteq \quad U \end{aligned}$$

при $k < 0$ (напомним, что множество U замкнуто по условию леммы). То есть $f^{k(j-i)}(x) \in U$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Так как по предположению $0 < j - i < m$, то мы получили противоречие с выбором m (см. соотношение (1.5)). Следовательно, $\widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Проверим теперь равенства $\widetilde{W}_i = W_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Легко видеть, что

$$\widetilde{W}_i = \mathrm{Int} W_i = \mathrm{Int}(f(W_{i-1})) = f(\mathrm{Int}(W_{i-1})) = f(\widetilde{W}_{i-1}), \\ i = 1, \ldots, m-1,$$

и $\widetilde{W}_0 = f(\widetilde{W}_{m-1})$, так как f — гомеоморфизм. Обозначим

$$Q = \bigcup_{i=0}^{m-1} \widetilde{W}_i = \bigcup_{i=0}^{m-1} f^i(\widetilde{W}_0).$$

Q — открытое инвариантное подмножество динамической системы $(\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}, f)$. Пусть $K = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \setminus Q$. Очевидно, K — замкнутое инвариантное подмножество названной динамической системы.

Множество $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ минимально, поэтому либо $K = \varnothing$, либо $K = \overline{\mathrm{Orb}\, f(x)}$. Мы уже доказали, что $Q \neq \varnothing$, следовательно $K = \varnothing$ и

$$\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = \bigcup_{i=0}^{m-1} \widetilde{W}_i \,.$$

Так как множества из набора $\{\widetilde{W}_i\}$ попарно не пересекаются, то все они открыто-замкнутые и $\widetilde{W}_i = W_i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. По доказанному выше из этого немедленно следует условие (iii) определения 1.1.

Лемма полностью доказана. $\square$

2. Супернатуральные числа и подмножества множества натуральных чисел.

2.1. **Супернатуральные числа.**

Определение 2.1. *Пусть* $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ *— множество всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность*

$$N = (N_2, N_3, \ldots, N_p, \ldots) \ , \qquad N_p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \ , \quad p \in \mathcal{S} \ ,$$

называется супернатуральным числом*.*

Множество всех супернатуральных чисел мы будем обозначать через Σ.

Введем на множестве Σ отношение частичного порядка. Скажем, что

$$M \leq N \ , \quad M, N \in \Sigma \ ,$$

если $M_p \leq N_p$ для каждого $p \in \mathcal{S}$ (будем считать, что $k \leq \infty$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$). Элементарная непосредственная проверка показывает, что это определение корректно.

Зададим на множестве Σ бинарную операцию. Для $M = (M_p)$ и $N = (N_p)$ положим

$$M \cdot N = K = (K_p) \; ;$$

$$K_p = \left\{ \begin{array}{cl} M_p + N_p \; , & \text{если } M_p \neq \infty \text{ и } N_p \neq \infty \; , \\ \infty \; , & \text{в противном случае} \; . \end{array} \right\} \; , \quad p \in \mathcal{S} \; .$$

Тривиально проверяется, что $(\Sigma, \cdot)$ полугруппа с единицей $E = (E_p = 0)$.

Замечание 2.1. *Простая непосредственная проверка показывает, что уравнение $M \cdot X = N$ имеет решение в $(\Sigma, \cdot)$ тогда и только тогда, когда $M \leq N$.*

Однако решение такого уравнения может быть и не единственным.

Пример 2.1. *Пусть $M = N = (N_p)$,*

$$N_p = \left\{ \begin{array}{ll} \infty \; , & \textit{при } p = 2 \; , \\ 0 \; , & \textit{при } p \neq 2 \; . \end{array} \right.$$

Тогда $X^{(n)} = (X_p^{(n)})$,

$$X_p^{(n)} = \left\{ \begin{array}{ll} n \; , & \textit{при } p = 2 \; , \\ 0 \; , & \textit{при } p \neq 2 \; . \end{array} \right.$$

является решением уравнения $M \cdot X = N$ при любом $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$.

Так же, как и в полугруппе $(\mathbb{N}, \cdot)$, для любых двух M, $N \in \Sigma$ определены их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Легко видеть, что

$$\text{НОД}(M, N) = (d_p) \; , \quad d_p = \min(M_p, N_p) \; , \; p \in \mathcal{S} \; , \tag{2.1}$$

$$\text{НОК}(M, N) = (D_p) \; , \; D_p = \max(M_p, N_p) \; , \; p \in \mathcal{S} \; . \tag{2.2}$$

Здесь мы пользуемся следующими соглашениями:

$$\max(a, \infty) = \infty \; , \quad \min(a, \infty) = a \; , \quad a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\} \; .$$

Определим мономорфизм $\Phi_0 : (\mathbb{N}, \cdot) \to (\Sigma, \cdot)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим разложение

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

числа n на простые множители (мы предполагаем, что $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$). Положим $\Phi_0(n) = (\Phi_0(n)_p)$,

$$\Phi_0(n)_p = \begin{cases} \alpha_i \ , & \text{если } p = p_i \in \{p_1, \ldots, p_k\} \ , \\ 0 \ , & \text{в противном случае} \ . \end{cases}$$

Замечание 2.2. *Отметим, что для всех m, $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned} \Phi_0(\text{НОД}(m,n)) &= \text{НОД}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)) \ , \\ \Phi_0(\text{НОК}(m,n)) &= \text{НОК}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)) \ . \end{aligned}$$

2.2. **Допустимые подмножества множества натуральных чисел.** Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Для каждого $p \in \mathcal{S}$ пусть

$$\Phi(A)_p = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists a \in A : p^k \text{ делит } a\} = \sup_{a \in A} \Phi_0(a)_p \ .$$

Обозначим через Φ отображение

$$\Phi : A \mapsto \Phi(A) = (\Phi(A)_p)$$

из класса всех непустых подмножеств множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел в множество Σ супернатуральных чисел.

Замечание 2.3. *Легко проверяется, что определенное выше отношение порядка на множестве Σ превращает отображение Φ в изотонное, то есть для любых $A, B \subseteq \mathbb{N}$ из $A \subseteq B$ следует $\Phi(A) \leq \Phi(B)$.*

Пример 2.2. *Пусть $A = \{a\}$ — одноэлементное множество. Из определения легко следует, что $\Phi(\{a\}) = \Phi_0(a)$.*

Пример 2.3. *Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_j\}$ — конечное подмножество $\mathbb{N}$. Рассмотрим разложения чисел $a_1, \ldots, a_j$ на* *простые множители*

$$a_i = \prod_{p\in\mathcal{S}} p^{n_p(i)}\ , \quad i = 1, \ldots, j$$

(здесь $n_p(i) \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathcal{S}$, $i = 1, \ldots, j$*).*

По определению

$$\Phi(A)_p = \max\{n_p(1), \ldots, n_p(j)\}\ , \quad p \in \mathcal{S}\ ,$$

то есть $\Phi(\{a_1, \ldots, a_j\}) = \Phi(\{D\})$*, где* $D \in \mathbb{N}$ *— наименьшее общее кратное чисел* $a_1, \ldots, a_j$*.*

Замечание 2.4. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$*. Непосредственно из определения следует, что* $\Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)$ *для каждого* $a \in A$*.*

Замечание 2.5. *Из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что для любых непустых* A*,* $B \subseteq \mathbb{N}$

$$\Phi(A \cup B) = \text{НОК}(\Phi(A), \Phi(B))\ .$$

Кроме того, если $A \cap B \neq \varnothing$*, то*

$$\Phi(A \cap B) \leq \text{НОД}(\Phi(A), \Phi(B))\ .$$

Определение 2.2. *Непустое подмножество* $A \subseteq \mathbb{N}$ *назовем* допустимым*, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *если* $a \in A$ *и* $d \in \mathbb{N}$ *делит* a*, то* $d \in A$*;*
(ii) *для любых* $a, b \in A$ *их наименьшее общее кратное* D *также лежит в* A*.*

Обозначим набор всех допустимых множеств через $\mathcal{R}$*.*

Замечание 2.6. *Из предложений 1.1 и 1.2 следует, что множество* $\mathcal{P}(X, f)$ *допустимо для любой динамической системы* (X, f)*.*

Лемма 2.1. *Пусть* $A \in \mathcal{R}$*. Тогда*

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi_0(a) \leq \Phi(A)\}\ .$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $\Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)$. Пусть

$$a = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

— разложение числа a на простые множители. По определению соответствия Φ найдутся такие $b_1, \dots, b_k \in A$, что $p_i^{n_i}$ делит b_i, $i = 1, \dots, k$. Пусть b — наименьшее общее кратное чисел $b_1, \dots, b_k$. Тогда a делит b. Но $b \in A$ по определению допустимого множества. Следовательно, и $a \in A$. То есть

$$A \supseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\} \ .$$

Обратное включение

$$A \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\}$$

следует из замечания 2.4. $\square$

Непосредственным следствием леммы 2.1 является следующее

Предложение 2.1. *Отображение $\Phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Sigma$ биективно.*

Замечание 2.7. *Пусть $A, B \in \mathcal{R}$. Очевидно, $1 \in A \cap B \neq \varnothing$. Из леммы 2.1 немедленно следует соотношение*

$$\Phi(A \cap B) = \text{НОД}(\Phi(A), \Phi(B)) \ .$$

Определение 2.3. *Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Назовем последовательность $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$* правильной, *если a_i делит a_{i+1} для каждого $i \in \mathbb{N}$.*

Замечание 2.8. *Из замечания 2.3 следует, что для любого $A \subseteq \mathbb{N}$ и любой правильной последовательности $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$*

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(A) \ .$$

Предложение 2.2. *Пусть $A \in \mathcal{R}$. Тогда найдется правильная последовательность $\{b_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$, такая что $\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(A)$.*

Доказательство. Так как $A \subseteq \mathbb{N}$ — не более чем счетное множество, можно занумеровать все элементы множества A при помощи натуральных чисел. Пусть $b_1 = a_1$, b_i — наименьшее общее кратное чисел a_i и b_{i-1} при $i > 1$.

Ясно, что

$$\Phi(\{b_i\}) \geq \Phi(\{a_1, \ldots, a_i\}) \ , \quad i \in \mathbb{N} \ ,$$

поэтому

$$\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \geq \Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(A) \ .$$

С другой стороны, $b_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, так как множество A допустимое. Следовательно, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A$ и

$$\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(A) \ .$$

Для завершения доказательства остается заметить, что по построению b_i делит b_{i+1}, $i \in \mathbb{N}$, следовательно последовательность $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ правильная. □

Предложение 2.3. *Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$. Пусть заданы две правильные последовательности $\{a_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{b_j \in A\}_{j\in\mathbb{N}}$.*

Следующие условия эквивалентны:

1) $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})$;
2) *для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $j \in \mathbb{N}$, такое что a_i делит b_j.*

Доказательство. 1) Пусть $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Рассмотрим разложение

$$a = a_i = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

числа a_i на простые множители.

Из примера 2.2 и замечания 2.4 следует, что для $m = 1, \ldots, k$

$$\alpha_m = \Phi(\{a\})_{p_m} \le \Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_{p_m} \le \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_{p_m} .$$

Поэтому, для каждого p_m, $m = 1, \ldots, k$, найдется $j_m \in \mathbb{N}$, такое что $p_m^{\alpha_m}$ делит b_{j_m}.

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что

$$j_1 \le j_2 \le \ldots \le j_k .$$

Последовательность $\{b_j\}$ правильная, поэтому b_{j_m} делит b_{j_k}, $m = 1, \ldots, k$. Следовательно, $p_m^{\alpha_m}$ делит b_{j_k}, $m = 1, \ldots, k$.

Числа $p_1, \ldots, p_k$ по построению взаимно простые, поэтому их произведение $p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} = a$ делит b_{j_k}.

2) Предположим, что выполняется условие 2) предложения 2.3.

Пусть для некоторого $p \in \mathcal{S}$ выполняется неравенство

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \gneqq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p .$$

Тогда $n = \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p < \infty$ и по определению отображения Φ для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$b_j = p^{n_j}\widetilde{b}_j , \quad n_j \le n , \quad \text{НОД}(p, \widetilde{b}_j) = 1 .$$

С другой стороны, $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \ge n+1$, следовательно найдется $i_0 \in \mathbb{N}$, такое что p^{n+1} делит a_{i_0}. Воспользуемся теперь условием 2) предложения 2.3 и найдем $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что a_{i_0} делит b_{j_0}. Тем более, p^{n+1} делит b_{j_0}.

Однако, по построению $\text{НОД}(p^{n+1}, b_{j_0}) = p^{n_{j_0}} \le p^n$.

Полученное противоречие свидетельствует о том, что

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\})_p \le \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})_p , \quad p \in \mathcal{S} ,$$

то есть справедливо условие 1) предложения 2.3. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Пусть* $\{a_i \in A\}_{i\in\mathbb{N}}$ — *правильная последовательность.*

Для любой подпоследовательности $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *последовательности* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *имеет место равенство*

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}) \ .$$

3. Расширения одометров и периодические разбиения.

3.1. **Определение одометра.** Пусть $\{n_i \in \mathbb{N}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность, которая неограничено возрастает.

Рассмотрим последовательность конечных циклических групп $\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ и групповых гомоморфизмов

$$\varphi_i : \mathbb{Z}_{n_{i+1}} \to \mathbb{Z}_{n_i} \ ,$$
$$\varphi_i : 1 \mapsto 1 \ .$$

Возьмем обратный предел $A = \lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{inv} \mathbb{Z}_{n_i}$ этой последовательности групп и гомоморфизмов. Получим абелеву группу $(A, +)$.

Наделим каждое множество $\mathbb{Z}_{n_i} = \{0, 1, \ldots, n_i - 1\}$ дискретной топологией. Каждое из отображений φ_i является непрерывным в этой топологии. Пространство A с топологией $\mathcal{T}$ обратного предела гомеоморфно множеству Кантора Γ.

Легко видеть, что в группе $(A, +)$ операции сложения и перехода к противоположному элементу непрерывны в топологии $\mathcal{T}$, таким образом A превращается в топологическую группу.

Замечание 3.1. *Напомним, что обратный предел* $A = \lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{inv} \mathbb{Z}_{n_i}$ *можно представлять себе как подмножество*

$$A = \{\vec{a} = (a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}) \mid \varphi_i(a_{i+1}) = a_i \ , \ i \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

прямого произведения

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}\ . \tag{3.2}$$

В такой записи операция сложения в A *определяется покомпонентно, то есть* $\vec{a}+\vec{b}=(a_i+b_i)$ *для любых* $\vec{a}=(a_i)$, $\vec{b}=(b_i)\in A$.

Как известно, топология прямого произведения (3.2) задается при помощи базы, состоящей из так называемых цилиндрических множеств

$$U(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})=\{(a_i)\mid a_{i_s}=x_{i_s}\,,\ s=1,\ldots,k\}\ ;$$
$$x_{i_s}\in\mathbb{Z}_{n_{i_s}}\,,\ i_1<\ldots<i_k\,,\ k\in\mathbb{N}\ .$$

Из определения множества A (см. соотношение (3.1)) легко видеть, что

$$U(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})\cap A=U(x_{i_k})\cap A$$

для любых $k\in\mathbb{N}$, $i_1<\ldots<i_k$ и $x_{i_s}\in\mathbb{Z}_{n_{i_s}}$. Итак, набор множеств

$$\begin{gathered} V_{x_j}=U(x_j)\cap A=\{(a_i)\in A\mid a_j=x_j\}\quad= \\ =\left\{(a_i)\in A\ \middle|\ a_j=x_j\,,\quad \begin{matrix} a_k=\varphi_k\circ\ldots\circ\varphi_{j-1}(x_j)\\ \text{при } k<j\end{matrix}\right\}\ ; \\ j\in\mathbb{N}\,,\ x_j\in\mathbb{Z}_{n_j} \end{gathered} \tag{3.3}$$

является базой топологии пространства A.

Естественная метрика $\mathrm{d}:A\times A\to\mathbb{R}_+$ на A, ассоциированная с последовательностью $\{n_i\}$, определяется следующим образом:

$$\mathrm{d}(\vec{x},\vec{y})=n_m^{-1}\,,$$

где $m=\min\{i\in\mathbb{N}\mid x_k=y_k \text{ при } k<i \text{ и } x_i\neq y_i\}$. Корректность этого определения проверяется непосредственно.

Рассмотрим элемент $\vec{e} = (1) = (1, \ldots, 1, \ldots) \in A$. Этот элемент называется *генератором* группы A и обладает тем свойством, что порожденная им циклическая подгруппа $\langle \vec{e} \rangle$ плотна в A в топологии $\mathcal{T}$.

Отображение сдвига на элемент $\vec{e}$

$$g : A \to A\,,$$

$$g : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{e}$$

очевидно, является гомеоморфизмом.

Определение 3.1. *Динамическая система (A, g) называется* одометром*.*

Замечание 3.2. *Из того, что подгруппа $\langle \vec{e} \rangle$ плотна в A, немедленно следует, что каждая траектория д. с. (A, g) плотна в A, то есть одометр всегда является минимальной динамической системой.*

Лемма 3.1. *Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $x_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$ набор множеств $\{W_j^{(n_k)} = V_{x_k+j}\}_{j=0,\ldots,n_i-1}$ является периодическим разбиением динамической системы (A, g) длины n_k.*

Доказательство. Очевидно,

$$A = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_s = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{n_k}} V_{x_k+j}\ .$$

Следовательно, для набора $\{W_j^{(n_k)}\}$ выполнено условие (iv) определения 1.1.

Так как все множества V_{x_k+j}, $j \in \mathbb{Z}_{n_k}$, открыты по определению и попарно не пересекаются, то набор $\{W_j^{(n_k)}\}$ удовлетворяет также свойствам (i) и (iii) периодического разбиения.

Для завершения доказательства нам достаточно проверить, что $g(V_{a_k}) = V_{a_k+1}$ $(1 \in \mathbb{Z}_{n_k})$ для каждого $a_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$.

Пусть $\vec{b} = (b_i) \in V_{a_k}$. Тогда $b_k = a_k$ и $g(\vec{b}) = \vec{b} + \vec{e} = (b_i + 1) \in V_{a_k+1}$. Следовательно, $g(V_{a_k}) \subseteq V_{a_k+1}$.

Обратно, пусть $\vec{c} = (c_i) \in V_{a_k+1}$. Тогда $c_k = a_k + 1$ и $g^{-1}(\vec{c}) = \vec{c} - \vec{e} = (c_i - 1) \in V_{a_k}$. Следовательно, $g(V_{a_k}) \supseteq V_{a_k+1}$. $\square$

Замечание 3.3. *Из соотношения (3.3) немедленно следует, что*

$$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{d}(g(\vec{x}), g(\vec{y}))$$

для всех $\vec{x}$, $\vec{y} \in A$.

3.2. **Правильные последовательности периодических разбиений и ассоциированные с ними разбиения фазового пространства динамической системы.** Пусть (X, f) — динамическая система с компактным фазовым пространством, $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — неограниченная правильная последовательность. Пусть $\{W^{(n_i)}\}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $x \in X$. Заметим, что в силу свойств периодических разбиений для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует единственное $\alpha_i(x) \in \mathbb{Z}_{n_i}$, такое что $x \in W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$, то есть корректно определено отображение

$$F : X \to \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}\,,$$

$$F : x \mapsto (\alpha_i(x))\,, \quad x \in X\,.$$

Каждому $x \in X$ сопоставим подмножество

$$H(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)} \ni x$$

пространства X. Из определений 1.1, 1.6 и следствия 1.6 следует, что

1) все $H(x)$ — непустые замкнутые множества;
2) $H(x) = H(y)$, если $F(x) = F(y)$, $H(x) \cap H(y) = \varnothing$, если $F(x) \neq F(y)$;
3) $F(f^{\pm 1}(x)) = F(x) \pm \vec{e}$ для всех $x \in X$ (напомним, что $\vec{e} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in A$).

Для каждого $\vec{a} = (a_i) \in F(X)$ фиксируем $x \in F^{-1}(\vec{a})$ и обозначим $H_{\vec{a}} = H(x)$. Из 2) следует, что множество $H_{\vec{a}}$ не зависит от выбора $x \in F^{-1}(\vec{a})$.

Из 1) и 2) следует, что набор множеств $\mathfrak{H} = \{H_{\vec{a}}\}_{\vec{a} \in F(X)} = \operatorname{zer}(F)$ представляет собой разбиение пространства X, элементами которого являются полные прообразы точек пространства $F(X)$, и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & X & \xrightarrow{F} & F(X) \\ & & {\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\| \\ X/\operatorname{zer}(F) & = & X/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & F(X) \end{array}$$

Предложение 3.1. *Отображение F непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим предбазу топологии

$$U_{x_j} = \{\vec{a} = (a_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i} \mid a_j = x_j\}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}, \quad j \in \mathbb{N},$$

пространства $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$.

Простая непосредственная проверка показывает, что

$$F^{-1}(U_{x_j}) = W_{x_j}^{(n_j)}, \qquad x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Для завершения доказательства теперь остается вспомнить, что все множества $W_{x_j}^{(n_j)}$ открыты в X по определению. $\square$

Так как X — компакт, $\operatorname{fact} F$ — непререывное взаимно–однозначное отображение $X/\mathfrak{H}$ на $F(X)$ и пространство $F(X)$ хаусдорфово, то $\operatorname{fact} F$ — гомеоморфизм (см. [1]).

Для каждого $\vec{a} \in F(X)$ из 2) и 3) легко получается равенство $f(F^{-1}(\vec{a})) = F^{-1}(\vec{a} + \vec{e})$. Таким образом, если мы обозначим

$$g : F(X) \to F(X)\,, \quad g : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e}\,;$$

$$\overline{f} = \operatorname{fact} f : X/\mathfrak{H} \to X/\mathfrak{H}\,, \quad \overline{f} : H_{\vec{a}} \mapsto H_{\vec{a}+\vec{e}}\,;$$

то получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} (X, f) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "pr"'] & (F(X), g) \arrow[d, equal] \\ (X/\mathfrak{H}, \overline{f}) \arrow[r, "\operatorname{fact} F"] & (F(X), g) \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Зададимся теперь вопросом: что из себя представляет множество $F(X)$?

Фиксируем $x \in X$ и рассмотрим множество

$$F(\operatorname{Orb}_f(x)) = \{F(x) + n\vec{e} \mid n \in \mathbb{Z}\} = F(x) + \langle\vec{e}\rangle\,.$$

Ясно, что $F(x) + \langle\vec{e}\rangle \subseteq F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) \subseteq \overline{F(x) + \langle\vec{e}\rangle} = F(x) + \overline{\langle\vec{e}\rangle} = F(x) + A$ (A — адическая группа, построенная по последовательности $\{n_i\}$, см. выше).

Так как $\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ — компакт, то множество $F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)})$ замкнуто в $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$. Множество $F(x)+\langle\vec{e}\rangle$ плотно в $F(x)+A$, поэтому $F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) = F(x) + A$.

Пусть теперь y — другая точка пространства X. $\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ — замкнутое инвариантное подмножество динамической системы (X, f). Следовательно (см. замечание1.3), $W^{(n_i)}_{s_i} \cap \overline{\operatorname{Orb}_f(x)} \neq \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$.

Пусть $F(y) = (\beta_i)$. Из замечания 1.11 следует, что множество $H_{(\beta_i)} \cap \overline{\operatorname{Orb}_f(x)}$ не пусто и

$$F(y) = F(H_{(\beta_i)}) \in F(\overline{\operatorname{Orb}_f(x)}) = F(x) + A\,.$$

В результате получим

$$F(X) = F(x) + A\,,$$

то есть $F(X)$ — смежный класс группы $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ по подгруппе A.

Замечание 3.4. *Очевидно, $F(X) = A$ тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} \neq \varnothing\,. \tag{3.5}$$

Определение 3.2. *Правильная последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f) называется* когерентной*, если она удовлетворяет соотношению (3.5).*

Из предложения 1.6, замечания 1.5 и конструкции, приведенной выше, следует

Предложение 3.2. *Пусть (X, f) — динамическая система, фазовое пространство которой хаусдорфово и компактно.*

Для любой неограниченной правильной последовательности $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$ на одометр (A, g), построенный по последовательности $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Пусть теперь $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность и пусть $\{W^{(n_i)}\}$ и $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}$ — две согласованные правильные последовательности периодических разбиений динамической системы (X, f). Тогда (см. замечание 1.5 и определение 1.3) периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(n_i)}$ эквивалентны для каждого $i \in \mathbb{N}$. Из этого немедленно заключаем, что

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}) = \mathfrak{H}(\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}) = \widetilde{\mathfrak{H}}\,.$$

Предложение 3.3. *Пусть задана правильная последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f).*

Набор множеств $\{pr(W^{(n_i)}_{s_i}) \mid i \in \mathbb{N}\,,\ s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) *это правильная последовательность периодических разбиений динамической системы $(X/\mathfrak{H}, \overline{f})$;*
2) *это база топологии пространства $X/\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Из сказанного выше немедленно следует, что последовательность $\{W^{(n_i)}\}$ можно считать когерентной.

Теперь предложение следует из соотношений

$$W^{(n_i)}_{s_i} = F^{-1}(V_{s_i})\,, \qquad s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\,, \quad i \in \mathbb{N}$$

(см. формулу (3.3), лемму 3.1 и следствие 1.6) и коммутативной диаграммы (3.4), нижняя стрелка которой является гомеоморфизмом. □

Предложение 3.4. *Пусть $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{m_j \in \mathcal{P}(X, f)\}_{j\in\mathbb{N}}$ — две правильные последовательности, такие что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ — согласованные правильные последовательности периодических разбиений динамической системы (X, f).

Тогда разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ пространства X, индуцированое последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$, является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$, индуцированого последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$.

Доказательство. Фиксируем точку $x \in X$. Найдутся такие $(\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ и $(\beta_j) \in \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{m_j}$, что

$$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i} \cap \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j}\,.$$

Согласно предложению 2.3 для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $k(i) \in \mathbb{N}$, такое что n_i делит $m_{k(i)}$. Так как периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(m_{k(i)})}$ согласованы, то по следствию 1.6 второе из них является измельчением первого.

Итак, $\widetilde{W}^{(m_{k(i)})}_{\beta_{k(i)}} \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i}$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$H_{(\alpha_i)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i} \supseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_{k(i)})}_{\beta_{k(i)}} \supseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j} = \widetilde{H}_{(\beta_j)}\,.$$

В силу произвола в выборе $x \in X$ из сказанного заключаем, что для произвольных $(\alpha_i) \in F(X)$ и $(\beta_j) \in \widetilde{F}(X)$ либо $H_{(\alpha_i)} \cap \widetilde{H}_{(\beta_j)} = \varnothing$, либо $H_{(\alpha_i)} \supseteq \widetilde{H}_{(\beta_j)}$. $\Box$

Следствие 3.1. *Если в условиях предложения 3.3 имеет место равенство* $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$, *то разбиения* $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *пространства* X *совпадают.*

Предложение 3.5. *Пусть* $\{n_i \in \mathcal{P}(X,f)\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{m_j \in \mathcal{P}(X,f)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— две правильные последовательности.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X,f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Пусть последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *не являются согласованными.*

Тогда $H(x) \setminus \widetilde{H}(x) \neq \varnothing$ *и* $\widetilde{H}(x) \setminus H(x) \neq \varnothing$ *для каждого* $x \in X$.

Доказательство. Пусть $x \in X$. Найдутся такие $(\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ и $(\beta_j) \in \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{m_j}$, что

$$H(x) = H_{(\alpha_i)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i}\,, \quad \widetilde{H}(x) = \widetilde{H}_{(\beta_j)} = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\beta_j}\,.$$

По определению $H(x) \cap \widetilde{H}(x) \neq \varnothing$.

Согласно условию предложения существуют такие $k, l \in \mathbb{N}$, что периодические разбиения $W^{(n_k)}$ и $\widetilde{W}^{(m_l)}$ не согласованы, то есть

$$x \in A_{k,l} = \bigcup_{t \in \mathbb{Z}} f^t \Big(W^{(n_k)}_{\alpha_k} \cap \widetilde{W}^{(m_l)}_{\beta_l} \Big) \neq X\,.$$

Итак, пространство X распадается в объединение двух непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $A_{k,l}$ и $B_{k,l} = X \setminus A_{k,l}$ динамической системы (X, f) (см. предложение 1.4).

Очевидно, $H(x) \cap \widetilde{H}(x) \subseteq W^{(n_k)}_{\alpha_k} \cap \widetilde{W}^{(m_l)}_{\beta_l} \subseteq A_{k,l}$.

Однако,

$$H(x) \setminus \widetilde{H}(x) \supseteq H(x) \cap B_{k,l} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \Big(W^{(n_i)}_{\alpha_i} \cap B_{k,l} \Big) \neq \varnothing$$

(см. замечания 1.3 и 1.11). Аналогично, $\widetilde{H}(x) \setminus H(x) \neq \varnothing$. $\square$

Предложение 3.6. *Пусть* $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ *и* $\{m_j \in \mathcal{P}(X, f)\}_{j \in \mathbb{N}}$ *— две правильные последовательности.*

Пусть $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X, f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Если найдется $x \in X$, *такое что*

$$H(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)} \supseteq \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(x)} = \widetilde{H}(x)\,,$$

то разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *является измельчением разбиения* $\mathfrak{H}$, *последовательности* $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *согласованы и* $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Следствие 3.2. *Пусть* $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *— правильные последовательности периодических разбиений динамической системы* (X, f), $\mathfrak{H}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *— разбиения пространства* X, *индуцированные этими последовательностями.*

Следующие утверждения эквивалентны:

1) *разбиение* $\widetilde{\mathfrak{H}}$ *является измельчением разбиения* $\mathfrak{H}$ *(соответственно,* $\mathfrak{H} = \widetilde{\mathfrak{H}}$*),*
2) $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \le \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$ *(соответственно,* $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$*) и последовательности* $\{W^{(n_i)}\}$ *и* $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ *согласованы.*

Для доказательства предложения 3.6 нам понадобится следующая почти очевидная

Лемма 3.2. *Пусть* X *— хаусдорфово пространство,*

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots \supseteq K_i \supseteq \ldots$$

— некоторая последовательность его непустых компактных подмножеств.

Для любой открытой окрестности U *множества*

$$K = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$$

найдется $n \in \mathbb{N}$, *такое что* $K_i \subseteq U$ *при* $i \ge n$.

Доказательство. Предположим, найдется окрестность $U \supseteq K$ и последовательность $\{x_i \in K_i \setminus U\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Так как по построению $x_i \in K_1$, $i \in \mathbb{N}$, и K_1 — компакт, то эта последовательность имеет хотя-бы одну предельную точку $x \in K_1 \setminus U \subseteq X \setminus U$.

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ из условия леммы $x_i \in K_i \subseteq K_m$, $i \ge m$. Следовательно, $x \in K_m$, $m \in \mathbb{N}$ и $x \in K \setminus U$.

Полученное противоречие завершает доказательство. □

Доказательство предложения 3.6. **1.** Докажем, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется $j(i) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

— n_i делит $m_{j(i)}$;

— периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ является измельчением разбиения $W^{(n_i)}$.

Фиксируем $i \in \mathbb{N}$. Очевидно, что открытая окрестность $W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$ множества $\widetilde{H}(x) \subseteq H(x) \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$ и последовательность замкнутых множеств

$$\widetilde{W}^{(m_1)}_{\widetilde{\alpha}_1(x)} \supseteq \widetilde{W}^{(m_2)}_{\widetilde{\alpha}_2(x)} \supseteq \ldots \supseteq \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(x)} \supseteq \ldots$$

удовлетворяют условию леммы 3.2. Следовательно, найдется $j(i) \in \mathbb{N}$, для которого $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}_{\widetilde{\alpha}_{j(i)}(x)} \subseteq W^{(n_i)}_{\alpha_i(x)}$.

Из следствия 1.5 заключаем, что периодические разбиения $W^{(n_i)}$ и $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ согласованы и n_i делит $m_{j(i)}$. Теперь из следствия 1.6 вытекает, что разбиение $\widetilde{W}^{(m_{j(i)})}$ является измельчением разбиения $W^{(n_i)}$.

2. Проверим, что $H(y) \supseteq \widetilde{H}(y)$ для каждого $y \in X$, то есть разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$.

Действительно, из сказанного выше следует, что

$$\widetilde{H}(y) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_j)}_{\widetilde{\alpha}_j(y)} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \widetilde{W}^{(m_{j(i)})}_{\widetilde{\alpha}_{j(i)}(y)} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W^{(n_i)}_{\alpha_i(y)} = H(y)$$

для каждого $y \in X$.

3. Из предыдущего пункта и предложения 3.5 следует, что последовательности периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ согласованы.

4. Из пункта 1 и предложения 2.3 заключаем, что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$. □

3.3. **Основные свойства одометров.** Покажем теперь на примере одометров, как работают утверждения, доказанные выше.

Предложение 3.7. *Пусть* (X,f) *и* (Y,g) *— динамические системы,* $p:(X,f)\to(Y,g)$ *— проекция. Если* $n\in\mathcal{P}(Y,h)$ *и* $W^{(n)}=\{W_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (Y,g)*, то* $n\in\mathcal{P}(X,f)$ *и* $\widetilde{W}^{(n)}=\{\widetilde{W}_i^{(n)}=p^{-1}(W_i^{(n)})\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ *— периодическое разбиение динамической системы* (X,f).

Доказательство сводится к простой непосредственной проверке. □

Следствие 3.3. *Пусть* (Y,h) *— фактор-система динамической системы* (X,f)*. Тогда* $\mathcal{P}(Y,h)\subseteq\mathcal{P}(X,f)$.

Воспользовавшись замечанием 2.3, получим еще

Следствие 3.4. *В условиях следствия 3.3 выполняется неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(Y,h))\leq\Phi(\mathcal{P}(X,f))$.

Замечание 3.5. *Итак, если топологически сопряжены динамические системы* (X,f) *и* (Y,g)*, то* $\Phi(\mathcal{P}(X,f))=\Phi(\mathcal{P}(Y,g))$*. Следовательно,* $\Phi(\mathcal{P}(X,f))\in\Sigma$ *является топологическим инвариантом динамической системы* $(X,f)\in\mathcal{K}_0$.

Предложение 3.8. *Пусть* (A,g) *— одометр, построенный по правильной последовательности* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Тогда $\Phi(\{\mathcal{P}(A,g)\})=\Phi(\{n_i\mid i\in\mathbb{N}\})$.

Пусть $\{W^{(m_j)}\}$ *— правильная последовательность периодических разбиений динамической системы* (A,g).

Набор множеств $\{W_{r_j}^{(m_j)}\mid r_j\in\mathbb{Z}_{m_j},\ j\in\mathbb{N}\}$ *является базой топологии пространства* A *тогда и только тогда, когда* $\Phi(\{m_j\mid j\in\mathbb{N}\})=\Phi(\{\mathcal{P}(A,g)\})$.

Доказательство. Из леммы 3.1 и соотношения (3.3) следует, что набор

$$W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = V_{s_i}\}_{s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}}\,, \quad i \in \mathbb{N}\,,$$

является правильной последовательностью периодических разбиений динамической системы (A, g). Построим по этой последовательности разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A. Так как набор (3.3) является базой топологии пространства A, то $H_{\vec{a}} = \{\vec{a}\}$ для каждого $\vec{a} \in A$.

1. Множество $\mathcal{P}(A, g)$ допустимое (см. замечание 2.6), следовательно найдется правильная последовательность $\{m_j \in \mathcal{P}(A, g)\}_{j \in \mathbb{N}}$, для которой

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g)) \geq \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$$

(см. предложение 2.2 и замечание 2.8).

Построим теперь по этой последовательности правильную последовательность периодических разбиений $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$, которая согласована с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ (см. предложение 1.8).

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$. Тогда из предложения 3.4 следует, что разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}}$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H}$. А это может быть только если $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$. Теперь из предложения 3.6 следует

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})\,.$$

2. Пусть теперь $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — некоторая правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (A, g), $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$.

Из первой части предложения 3.8 и замечания 2.8 заключаем, что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \geq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$.

Так как одометр (A, g) — минимальная динамическая система (см. замечание 3.2), то эта динамическая система неразложима и правильные последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ и $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ согласованы (см. замечание 1.12).

Применяя следствие 3.3, заключаем, что разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A является измельчением разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$, причем $\mathfrak{H} = \widetilde{\mathfrak{H}}$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g)).$$

Напомним, что набор $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \lambda}$ открытых подмножеств топологического пространства X является его базой топологии, когда выполняются следующие условия (см. [6]):

(a) если $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ для некоторых α, $\beta \in \Lambda$, то найдется $\gamma \in \Lambda$, такое что $U_\gamma \subseteq U_\alpha \cap U_\beta$;

(b) для каждого $x \in X$ и любой открытой окрестности U точки x найдется $\alpha \in \Lambda$, такое что $x \in U_\alpha \in U$.

Заметим, что для любой правильной последовательности периодических разбиений свойство (a) всегда выполняется (это следует непосредственно из определения 1.6 и замечания 1.10).

Пусть $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) \subsetneqq \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$. Тогда разбиения $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ не совпадают (см. следствие 3.2) и и найдутся две точки x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, принадлежащие одному элементу разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Следовательно, для каждого $\widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)}$, $s_j \in \mathbb{Z}_{m_j}$, $j \in \mathbb{N}$, либо $\widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)} \cap \{x_1, x_2\} = \varnothing$, либо $\{x_1, x_2\} \subseteq \widetilde{W}_{s_j}^{(m_j)}$ и свойство (b) не выполняется.

Пусть теперь $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$. В этом случае разбиения $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Пусть $x \in X$ и U — открытая окрестность точки x. По определению разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$ существует единственная последовательность $\{\alpha_j \in \mathbb{Z}_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, такая что

$$\{x\} = H(x) = \widetilde{H}(x) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{W}_{\alpha_j}^{(m_j)}.$$

При этом все множества из пересечения в правой части компактны (как замкнутые подмножества компактного пространства A) и $\widetilde{W}_{\alpha_{j+1}}^{(m_{j+1})} \subseteq \widetilde{W}_{\alpha_j}^{(m_j)}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. определение 1.6). Применяя лемму 3.2, заключаем, что найдется $k \in \mathbb{N}$, для которого $x \in \widetilde{W}_{\alpha_{j_k}}^{(m_{j_k})} \subseteq U$. $\square$

Теперь из предложения 3.2, следствия 3.4, предложения 3.8, замечания 2.6 и предложения 2.2 получим такое утверждение:

Теорема 3.1. *Пусть (X, f) — динамическая система с хаусдорфовым компактным фазовым пространством, (A, g) — одометр.*

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$;*
(ii) *выполняется неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.*

Для того, чтобы сформулировать следующее утверждение, мы нуждаемся в двух определениях.

Пусть (X, f) — динамическая система с компактным метрическим фазовым пространством (X, ρ).

Определение 3.3. *Пара точек x, $y \in X$, $x \neq y$, называется* дистальной, *если существует $\delta > 0$, такое что $\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ для каждого $n \in \mathbb{Z}$.*

Динамическая система (X, f) называется дистальной, *если любая пара точек x, $y \in X$, $x \neq y$, дистальна.*

Определение 3.4. *Динамическая система* (X, f) *называется* равностепенно непрерывной, *если семейство отображений* $\{f^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *является равностепенно непрерывным относительно метрики* ρ, *то есть если для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое что если* $\rho(x, y) < \delta$ *для некоторых* $x, y \in X$, *то* $\rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ *для каждого* $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 3.6. *Легко видеть, что дистальность и равностепенная непрерывность динамической системы* (X, f) *не зависят (в силу компактности* X*) от выбора метрики, порождающей заданную топологию на пространстве* X, *то есть дистальность и равностепенная непрерывность есть топологические свойства динамической системы* (X, f) *с метризуемым компактным фазовым пространством* X.

Теорема 3.2 (см. [7])**.** *Пусть* (Γ, f) *— минимальная динамическая система на множестве Кантора* Γ.

Тогда следующие условия равносильны:

1. *д. с.* (Γ, f) *топологически сопряжена с одометром;*
2. *д. с.* (Γ, f) *дистальна;*
3. *д. с.* (Γ, f) *равностепенно непрерывна.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2. и 3. для динамических систем с нульмерным компактным фазовым пространством непосредственно следует из результатов, полученных в работе [8].

Проверим импликацию 1. $\Rightarrow$ 3.

Пусть д. с. (Γ, f) топологически сопряжена при помощи гомеоморфизма $h : \Gamma \to A$ с одометром (A, g), который порожден допустимой последовательностью $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Перенесем естественную метрику d с пространства A на Γ при помощи соотношения

$$\rho(x, y) = \mathrm{d}(h(x), h(y)), \quad x, y \in \Gamma .$$

Из замечания 3.3 немедленно следует, что отображение f изометрично относительно метрики ρ. Таким образом, д. с. (Γ, f) равностепенно непрерывна.

Докажем импликацию 3. $\Rightarrow$ 1.

Фиксируем метрику $\rho : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}_+$. Пусть динамическая система (Γ, f) равностепенно непрерывна относительно метрики ρ.

Пусть $x \in \Gamma$, V — открыто-замкнутая окрестность точки x. Так как замкнутые множества V и $\Gamma \setminus V$ не пересекаются и Γ компактно, то

$$\rho(V, \Gamma \setminus V) = \varepsilon > 0 \,.$$

Найдется $\delta > 0$, такое что для любых y_1, $y_2 \in \Gamma$

$$(\rho(y_1, y_2) < 2\delta) \Rightarrow (\rho(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \varepsilon \,, \quad n \in \mathbb{Z}) \,.$$

Пусть $U = U_\delta(x)$. Тогда $\mathrm{Diam} U < 2\delta$ и $\mathrm{Diam} f^n(U) < \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{Z}$ либо $V \cap f^n(U) = \varnothing$, либо $f^n(U) \subseteq V$.

Так как динамическая система (Γ, f) минимальна, найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(x) \in U$. Тогда $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$. Ясно что, так как f — гомеоморфизм, то

$$f^{k+n}(U) \cap f^n(U) \neq \varnothing \,, \quad n \in \mathbb{Z} \,.$$

Проверим, что $f^{kn}(U) \subseteq V$, $n \in \mathbb{Z}$.

Проведем проверку по индукции для отрицательных n.

База индукции. Так как $\varnothing \neq f^{-k}(U) \cap U \subseteq f^{-k}(U) \cap V$, то $f^{-k}(U) \subseteq V$.

Шаг индукции. Пусть $f^{-ki}(U) \subseteq V$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\varnothing \neq f^{-k(i+1)}(U) \cap f^{-ki}(U) \subseteq f^{-k(i+1)}(U) \cap V$ и $f^{-k(i+1)}(U) \subseteq V$.

По индукции заключаем, что $f^{kn}(U) \subseteq V$ для всех $n < 0$.

Проверка этого включения для положительных n осуществляется аналогично.

Итак,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(x) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^{kn}(U) \subseteq V\,.$$

Из леммы 1.5 заключаем, что найдутся $m \in \mathcal{P}(\Gamma, f)$ и периодическое разбиение $W^{(m)}$ динамической системы (Γ, f) длины m, такие что $x \in W_0^{(m)} \subseteq V$.

Фиксируем $x \in \Gamma$ и последовательность $\{\varepsilon_i \geq 0\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$. Найдем для каждого ε_i такое $\delta_i > 0$, что для всех $y_1,\, y_2 \in \Gamma$

$$(\rho(y_1, y_2) < \delta_i) \Rightarrow (\rho(f^n(y_1), f^n(y_2)) < \varepsilon_i\,, \quad n \in \mathbb{Z})\,.$$

Построим теперь по индукции когерентную правильную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ динамической системы (Γ, f), такую что для каждого $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Diam} W_{s_i}^{(n_i)} < \varepsilon_i\,, \quad s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\,. \tag{3.6}$$

Пространство Γ нульмерно, поэтому существует последовательность $\{V_i \ni x\}_{i\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств, такая что $\mathrm{Diam} V_i < \delta_i$, $i \in \mathbb{N}$.

База индукции. Найдем периодическое разбиение $W^{(n_1)}$ динамической системы (Γ, f), такое что $x \in W_0^{(n_1)} \subseteq V_1$. Тогда $\mathrm{Diam} W_0^{(n_1)} < \delta_1$ и $\mathrm{Diam} W_{s_1}^{(n_1)} = \mathrm{Diam} f^{s_1}(W_0^{(n_1)}) < \varepsilon_1$, $s_1 \in \mathbb{Z}_{n_1}$, согласно выбору δ_1.

Шаг индукции. Пусть уже построен набор $\{W^{(n_i)}\}_{i=1}^k$ периодических разбиений динамической системы (Γ, f), такой что n_i делит n_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$,

$$W_0^{(n_1)} \supseteq \ldots \supseteq W_0^{(n_k)} \ni x$$

(из следствия 1.5 заключаем, что любые два периодических разбиения из этого набора согласованы), и для которого выполняются соотношения (3.6).

Обозначим $\widetilde{V}_{k+1} = V_{k+1} \cap W_0^{(n_k)} \ni x$. Очевидно, справедливо неравенство $\mathrm{Diam}\widetilde{V}_{k+1} < \delta_{k+1}$.

Найдем периодическое разбиение $W^{(n_{k+1})}$ динамической системы (Γ, f), такое что $x \in W_0^{(n_{k+1})} \subseteq \widetilde{V}_{k+1} \subseteq W_0^{(n_k)}$.

С одной стороны, $\mathrm{Diam}W_0^{(n_{k+1})} \leq \mathrm{Diam}\widetilde{V}_{k+1} < \delta_{k+1}$, поэтому $\mathrm{Diam}W_{s_1}^{(n_{k+1})} = \mathrm{Diam}f^{s_1}(W_0^{(n_{k+1})}) < \varepsilon_{k+1}$ для $s_{k+1} \in \mathbb{Z}_{n_{k+1}}$.

С другой стороны, n_k делит n_{k+1} и периодические разбиения $W^{(n_{k+1})}$ и $W^{(n_k)}$ согласованы по следствию 1.5.

По индукции получим когерентную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ динамической системы (Γ, f), все элементы которой удовлетворяют соотношению (3.6).

Построим по последовательности $\{W^{(n_i)}\}$ разбиение $\mathfrak{H}$ пространства Γ и проекцию $F : (\Gamma, f) \to (A, g)$.

Пусть $y \in \Gamma$, $(\alpha_i) = F(y) \in A$. Заметим, что для каждого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Diam}H(y) \leq \mathrm{Diam}\Big(\bigcap_{i=1}^{k} W_{\alpha_i}^{(n_i)}\Big) = \mathrm{Diam}W_{\alpha_k}^{(n_k)} \leq \varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Следовательно, $H(y) = \{y\}$ для каждого $y \in \Gamma$ и отображение проекции $pr : \Gamma \to \Gamma/\mathfrak{H}$ взаимно-однозначно. Следовательно, и отображение $F = (\mathrm{fact}\, F)\circ pr : \Gamma \to A$ взаимно-однозначно. Так как Γ — компакт, то F — гомеоморфизм, который сопрягает динамические системы (Γ, f) и (A, g) (см. коммутативную диаграмму (3.4)). $\square$

Замечание 3.7. *При определении одометра, построенного по правильной последовательности $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, мы требовали, чтобы эта последовательность была* неограничена.

Фактически это требование можно переписать в следующем виде:

$$\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Sigma \setminus \Phi_0(\mathbb{N})\,.$$

Посмотрим, что изменится, если $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi_0(m) \in \Phi_0(\mathbb{N})$. *В этом случае* $A = \lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{inv} \mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $\vec{e} = 1 \in \mathbb{Z}_m$, *и динамическая система* (A, g) *состоит из единственной периодической траектории длины* m.

Расширим определение одометров, включив в него и случай, когда $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Phi_0(\mathbb{N})$.

Тривиально проверяется, что все сказанное в подразделах 3.2 и 3.3, кроме теоремы 3.2, справедливо и для нашего нового определения.

Теорема 3.3 (см. [9, 10, 13])**. 1.** *Для каждого* $N \in \Sigma$ *существует одометр* (A, g), *такой что* $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.

2. *Одометры* (A_1, g_1) *и* (A_2, g_2) *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Доказательство. 1. Пусть $N \in \Sigma$. Найдем допустимое множество $\overline{A} \subseteq \mathcal{R}$, такое что $\Phi(\overline{A}) = N$ (см. предложение 2.1), и правильную последовательность $\{n_i \in \overline{A}\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\overline{A})$ (см. предложение 2.2). Построим по последовательности $\{n_i\}$ одометр (A, g). Из предложения 3.8 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\overline{A}) = N$.

2. (a) Пусть одометры (A_1, g_1) и (A_2, g_2) топологически сопряжены при помощи гомеоморфизма $h : A_1 \to A_2$.

Имеем две проекции

$$h : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2) \text{ и } h^{-1} : (A_2, g_2) \to (A_1, g_1)\,.$$

Следствие 3.4 дает нам $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

(b) Пусть теперь $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2)) = N \in \Sigma$.

Найдем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = N$ (см. выше), и построим по ней одометр (A, g).

Так как $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то из предложения 2.1 и замечания 2.6 получим $\mathcal{P}(A, g) = \mathcal{P}(A_1, g_1) = \mathcal{P}(A_2, g_2)$. Также из леммы 3.1 следует, что $n_i \in \mathcal{P}(A, g)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $n_i \in \mathcal{P}(A_k, g_k)$, $k = 1, 2$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем когерентную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A_1, g_1) и построим по ней разбиение $\mathfrak{H}$ пространства A_1.

Аналогично, пусть $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — когерентная последовательность периодических разбиений динамической системы (A_2, g_2) и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства A_2, индуцированное этой последовательностью.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
(A_1, g_1) & \xrightarrow{F} & (A, g) & \xleftarrow{\widetilde{F}} & (A_2, g_2) \\
{\scriptstyle pr}\big\downarrow & & \big\| & & \big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{pr}} \\
(A_1/\mathfrak{H}, \operatorname{fact} g_1) & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & (A, g) & \xleftarrow{\operatorname{fact} \widetilde{F}} & (A_2/\widetilde{\mathfrak{H}}, \operatorname{fact} g_2)
\end{array}$$

Мы уже знаем, что все отображения в нижней строке этой диаграммы являются изоморфизмами в категории $\mathcal{K}_0$.

Отображения pr и $\widetilde{pr}$ взаимно-однозначны по предложению 3.8. Так как пространства A_1 и A_2 компактны, то pr и $\widetilde{pr}$ изоморфизмы в категории $\mathcal{K}_0$.

Из сказанного следует, что морфизм

$$\widetilde{F}^{-1} \circ F = \widetilde{pr}^{-1} \circ (\operatorname{fact} \widetilde{F})^{-1} \circ (\operatorname{fact} F) \circ pr$$

является изоморфизмом и динамические системы (A_1, g_1) и (A_2, g_2) топологически сопряжены. $\square$

Замечание 3.8. *Пусть* (X,f), $(Y,g)\in\mathcal{K}_0$, $h:(X,f)\to(Y,g)$ *— морфизм. Если динамическая система* (Y,g) *минимальная, то* h *— проекция.*

Действительно, фиксируем $y\in Y$. По теореме Биркгофа имеем $\overline{\mathrm{Orb}_g(h(y))}=Y$. С другой стороны, так как X — компакт, то $h(X)$ — замкнутое подмножество пространства Y и, очевидно, $h(X)\supseteq\mathrm{Orb}_g(h(y))=h(\mathrm{Orb}_f(y))$.

Предложение 3.9. *Пусть* (A,g) *— одометр,* $h:(A,g)\to(A,g)$ *— морфизм. Тогда* h *изоморфизм.*

Доказательство. Зафиксируем правильную последовательность $\{n_i\in\mathcal{P}(A,g)\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i\mid i\in\mathbb{N}\})=\Phi(\mathcal{P}(A,g))$ (см. замечание 2.6 и предложение 2.2).

Выберем правильную последовательность периодических разбиений $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

h — эпиморфизм согласно замечанию 3.8, поэтому из предложения 3.7 следует, что для каждого $i\in\mathbb{N}$ набор множеств $\widetilde{W}^{(n_i)}=\{\widetilde{W}^{(n_i)}_{s_i}=h^{-1}(W^{(n_i)}_{s_i})\}_{i\in\mathbb{Z}_{n_i}}$ является периодическим разбиением динамической системы (A,g) длины n_i.

(A,g) — минимальная динамическая система, поэтому она неразложима. Применяя следствие 1.1, заключаем, что $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (A,g).

Из предложения 3.8 следует, что каждый из наборов множеств $\{W^{(n_i)}_{s_i}\mid s_i\in\mathbb{Z}_{n_i},\ i\in\mathbb{N}\}$ и $\{\widetilde{W}^{(n_i)}_{s_i}\mid s_i\in\mathbb{Z}_{n_i},\ i\in\mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому h — непрерывное взаимно-однозначное отображение. Так как A — компакт, то h — гомеоморфизм. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть* (Y_1, h_1), (Y_2, h_2) *— две динамические системы, топологически сопряженные с некоторыми одометрами.*

Если объекты (Y_1, h_1), $(Y_2, h_2) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{K}_0$ *изоморфны, то любой морфизм* $\alpha : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. 1. Допустим, что динамическая система (Y_1, h_1) топологически сопряжена с одометром (A, g). Пусть $\rho : (Y_1, h_1) \to (Y_1, h_1)$ — некоторый морфизм. Тогда ρ — изоморфизм.

Действительно, фиксируем изоморфизм $\phi : (Y_1, h_1) \to (A, g)$ и рассмотрим морфизм $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1} : (A, g) \to (A, g)$. Согласно предложению 3.9, $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ — изоморфизм. Тогда и $\rho = \phi^{-1} \circ (\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}) \circ \phi$ — изоморфизм.

2. Пусть существует изоморфизм $\psi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$.

Морфизм $\chi = \alpha \circ \psi^{-1} : (Y_2, h_2) \to (Y_2, h_2)$ является изоморфизмом (см. выше). Следовательно, и морфизм $\chi \circ \psi = \alpha \circ \psi^{-1} \circ \psi = \alpha$ является изоморфизмом. □

Пусть $(A, +)$ — адическая группа. Пусть $g : A \to A$,

$$g : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e}\,, \quad \vec{a} \in A\,.$$

Пусть (A, g) — соответствующий одометр.

Фиксируем $\vec{a}$, $\vec{b} \in A$. Расмотрим отображение

$$h_{\vec{a}, \vec{b}} : A \to A\,,$$

$$h_{\vec{a}, \vec{b}} : \vec{c} \mapsto \vec{c} + (\vec{b} - \vec{a})\,, \quad \vec{c} \in A\,.$$

Предложение 3.10. $h_{\vec{a}, \vec{b}} \circ g = g \circ h_{\vec{a}, \vec{b}}$.

Доказательство. Это очевидное следствие коммутативности группы (A, g). □

Замечание 3.9. *Пусть динамическая система* (X, f) *минимальна,* h_1, $h_2 : (X, f) \to (Y, g)$ *— два морфизма, такие что* $h_1(x) = h_2(x)$ *для некоторого* $x \in X$.

Тогда $h_1 = h_2$.

Действительно, для каждого $y = f^n(x) \in \mathrm{Orb}_f(x)$ имеем $h_1(y) = h_1 \circ f^n(x) = g^n \circ h_1(x) = g^n \circ h_2(x) = h_2 \circ f^n(x) = h_2(y)$. Поэтому $h_1|_{\mathrm{Orb}_f(x)} = h_2|_{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Так как $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ по теореме Биркгофа, то $h_1 = h_2$.

Комбинируя предложения 3.9, 3.10 и замечание 3.9, получим

Следствие 3.6. *Пусть* (A, g) *— динамическая система, топологически сопряженная с одометром. Для любой пары точек* x, $y \in A$ *существует единственный морфизм* $h_{x,y} : (A, g) \to (A, g)$, *такой что* $h_{x,y}(x) = y$, *и этот морфизм является изоморфизмом.*

3.4. **Отступление — одна категорная конструкция.** Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая категория.

Определение 3.5. *Скажем, что категория* $\mathfrak{L}$ *обладает свойством* **LU** *(Lifting Upstairs), если для любых объектов* A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ *и для произвольных морфизмов* $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ *и* $e_B \in H_{\mathfrak{L}}(B, B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ *найдется морфизм* $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$, *такой что*

$$\alpha e_B = e_A \alpha \ .$$

Определение 3.6. *Скажем, что категория* $\mathfrak{L}$ *обладает свойством* **LD** *(Lifting Downstairs), если для любых объектов* A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ *и для произвольных морфизмов* $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ *и* $f_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ *найдется морфизм* $f_B \in H_{\mathfrak{L}}(B, B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$, *такой что*

$$f_A \alpha = \alpha f_B \ .$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — категория. Для каждой пары объектов A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}$ определим на множестве $H_{\mathfrak{L}}(A,B)$ бинарное отношние $\sim$. Скажем, что $\alpha \sim \beta$, $\alpha, \beta \in H_{\mathfrak{L}}(A,B)$, если существуют такие $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ и $e_B \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$, что

$$e_A \alpha = \beta e_B \ .$$

Легко видеть, что $\sim$ есть отношение эквивалентности. Класс эквивалентности морфизма α будем обозначать $[\alpha]$.

Предложение 3.11. *Пусть категория $\mathfrak{L}$ удовлетворяет одному из свойств* **LU** *или* **LD**.

Тогда корректно определена категория $\overline{\mathfrak{L}}$, объектами которой являются объекты категории $\mathfrak{L}$ и для любой пары объектов A, $B \in \overline{\mathfrak{L}}$ множество морфизмов $H_{\overline{\mathfrak{L}}}(A,B)$ есть множество классов эквивалентности морфизмов из $H_{\mathfrak{L}}(A,B)$.

Доказательство. Предположим, категория $\mathfrak{L}$ обладает свойством **LU**.

Тривиальная проверка показывает, что $\overline{\mathfrak{L}}$ удовлетворяет свойствам 1) и 2) категории.

Для того, чтобы корректно определить операцию композиции морфизмов в $\overline{\mathfrak{L}}$, проверим, что для любой тройки объктов A, B, $C \in \mathfrak{L}$ и для любых морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A,B)$, $\beta \in H_{\mathfrak{L}}(B,C)$ выполняется равенство

$$[\alpha\beta] = [\alpha][\beta] = \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\} \ . \tag{3.7}$$

Пусть $\alpha' \in [\alpha]$, $\beta' \in [\beta]$. Тогда найдутся такие изоморфизмы $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$, e_B, $f_B \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$ и $f_C \in H_{\mathfrak{L}}(C,C) \cap \mathrm{Iso}\,\mathfrak{L}$, что

$$\alpha'\beta' = (e_A^{-1}\alpha e_B)(f_B^{-1}\beta f_C) = e_A^{-1}\alpha(e_B f_B^{-1})\beta f_C \ .$$

Очевидно, $e_B f_B^{-1} \in H_{\mathfrak{L}}(B,B) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$. Из свойства **LU** заключаем, что существует $g_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$, для которого $\alpha(e_B f_B^{-1}) = g_A\alpha$. Следовательно,

$$\alpha'\beta' = e_A^{-1}\alpha(e_B f_B^{-1})\beta f_C = (e_A^{-1} g_A)\alpha\beta f_C \ ,$$

$\alpha'\beta' \in [\alpha\beta]$ и $[\alpha\beta] \supseteq \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\}$.

Обратно, пусть $\gamma \in [\alpha\beta]$. Это значит, что для некоторых $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A,A) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ и $e_C \in H_{\mathfrak{L}}(C,C) \cap \operatorname{Iso}\mathfrak{L}$ имеет место соотношение

$$\gamma = e_A^{-1}(\alpha\beta)e_C = (e_A^{-1}\alpha)(\beta e_C) \ .$$

Очевидно, $e_A^{-1}\alpha = e_A^{-1}\alpha 1_B \in [\alpha]$ и $\beta e_C = 1_B^{-1}\beta e_C \in [\beta]$. Следовательно, $[\alpha\beta] \subseteq \{\alpha'\beta' \mid \alpha' \in [\alpha],\ \beta' \in [\beta]\}$.

Итак, мы установили, что частичное умножение классов эквивалентности морфизмов не зависит от выбора представителей, следовательно, оно определено корректно.

Ассоциативность умножения морфизмов в $\overline{\mathfrak{L}}$ следует из ассоциативности умножения морфизмов в категории $\mathfrak{L}$.

Для завершения доказательства нам остается заметить, что для любого $A \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}$ единичным морфизмом объекта A в $\overline{\mathfrak{L}}$ является $[1_A]$.

Если категория $\mathfrak{L}$ обладает свойством **LD**, доказательство проводится аналогично. $\square$

Замечание 3.10. *Приведенная выше конструкция является частным случаем так называемой* фактор-категории *(см. [11]).*

3.5. **Основные свойства одометров (продолжение).** Пусть (A_1, g_1), (A_2, g_2) — динамические системы, топологически сопряженные с одометрами, $\pi_1,\ \pi_2 : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$ и $h : (A_2, g_2) \to (A_2, g_2)$ — морфизмы.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех морфизмов $f : (A_1, g_1) \to (A_1, g_1)$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (A_1, g_1) & \xrightarrow{f} & (A_1, g_1) \\ {\scriptstyle \pi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ (A_2, g_2) & \xrightarrow[h]{} & (A_2, g_2) \end{array}$$

Из предложения 3.9 следует, что $h \in \operatorname{Iso} \mathcal{K}_0$ и $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Iso} \mathcal{K}_0$.

Предложение 3.12. *Множество $\mathcal{F}$ не пусто.*

Для любых $y \in A_2$ и $x_1 \in \pi_1^{-1}(y)$ имеет место равенство

$$\mathcal{F} = \left\{ h_{x_1, x_2} \mid x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y)) \right\} .$$

Доказательство предложения 3.12 опирается на следующие леммы.

Лемма 3.3. *Пусть (X, f) — неразложимая динамическая система, (A, g) — динамическая система, топологически сопряженная с одометром, π_1, $\pi_2 : (X, f) \to (A, g)$ — проекции.*

Тогда разбиения $\operatorname{zer} \pi_1$ и $\operatorname{zer} \pi_2$ пространства X совпадают.

Лемма 3.4. *Пусть (X, f), (A, g), π_1, $\pi_2 : (X, f) \to (A, g)$ те же, что и в лемме 3.3.*

Для любого морфизма $h : (X, f) \to (X, f)$ определено непрерывное отображение $\operatorname{fact} \pi_2 \circ h : A \to A$, оно удовлетворяет соотношению $g \circ (\operatorname{fact} \pi_2 \circ h) = (\operatorname{fact} \pi_2 \circ h) \circ g$.

Следовательно, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (X,f) & \xrightarrow{h} & (X,f) \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ (A,g) & \xrightarrow[\operatorname{fact}\pi_2\circ h]{} & (A,g) \end{array}$$

Доказательство леммы 3.3. Фиксируем правильную последовательность $\{n_i \in \Phi(\mathcal{P}(A,g))\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что

$$\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A,g))$$

(см. замечание 2.6 и предложение 2.2).

Построим правильную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A,g). Согласно предложению 3.8 набор множеств $\{W_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A.

Из предложения 3.7 следует, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ наборы множеств $\widetilde{W}^{(n_i)} = \{\widetilde{W}_{s_i}^{(n_i)} = \pi_1^{-1}(W_{s_i}^{(n_i)}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ и $\widehat{W}^{(n_i)} = \{\widehat{W}_{s_i}^{(n_i)} = \pi_2^{-1}(W_{s_i}^{(n_i)}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$ являются периодическими разбиениям динамической системы (X,f) длины n_i.

Динамическая система (X,f) неразложима, поэтому из следствия 1.1 и замечания 1.12 заключаем, что $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widehat{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — согласованные правильные последовательности периодических разбиений этой динамической системы.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ — разбиения пространства X, индуцированные соответственно последовательностями $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{\widehat{W}^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. По следствию 3.2 разбиения $\widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Набор множеств $\{\widetilde{W}_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ является прообразом базы топологии $\{W_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\ i \in \mathbb{N}\}$ под действием проекции π_1, поэтому разбиения $\operatorname{zer}\pi_1$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают.

Аналогично, разбиения $\operatorname{zer}\pi_2$ и $\widehat{\mathfrak{H}}$ совпадают. $\square$

Доказательство леммы 3.4. Пусть $h:(X,f)\to(X,f)$ — морфизм.

Так как динамическая система (A,g) минимальна, то морфизм $\pi_2\circ h:(X,f)\to(A,g)$ является проекцией. Из леммы 3.3 следует, что $\operatorname{zer}\pi_1=\operatorname{zer}\pi_2\circ h$. Для завершения доказательства нам остается применить лемму 0.2 к морфизмам $\varphi_1=\pi_1$ и $\varphi_2=\pi_2\circ h$. $\square$

Доказательство предложения 3.12. (A_1,g_1) — минимальная динамическая система, поэтому она неразложима.

Фиксируем $y\in A_2$ и $x_1\in\pi_1^{-1}(y)$. Пусть $x_2\in\pi_2^{-1}(h(y))$. Рассмотрим морфизм $h_{x_1,x_2}:(A_1,g_1)\to(A_1,g_1)$. Из леммы 3.4 следует, что корректно определен морфизм $\operatorname{fact}\pi_2\circ h_{x_1,x_2}:(A_2,g_2)\to(A_2,g_2)$, и справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\operatorname{fact}\pi_2\circ h_{x_1,x_2}(y) &= (\operatorname{fact}\pi_2\circ h_{x_1,x_2})\circ\pi_1(x_1) &=\\ &= \pi_2\circ h_{x_1,x_2}(x_1)=\pi_2(x_2) &= h(y)\ .\end{aligned}$$

Поэтому из следствия 3.6 заключаем, что $\operatorname{fact}\pi_2\circ h_{x_1,x_2}=h$ и $\mathcal{F}\supseteq\{h_{x_1,x_2}\mid x_2\in\pi_2^{-1}(h(y))\}$.

С другой стороны, для любого $f\in\mathcal{F}$ должно выполняться соотношение $f(x_1)\in f(\pi_1^{-1}(y))=\pi_2^{-1}(h(y))$ (см. лемму 3.3). Из следствия 3.6 получим $f=h_{x_1,f(x_1)}$ и $\mathcal{F}\subseteq\{h_{x_1,x_2}\mid x_2\in\pi_2^{-1}(h(y))\}$. $\square$

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}$ категории $\mathcal{K}_0$, объектами которой являются все динамические системы, топологически сопряженные с одометрами.

Следствие 3.7. *Категория $\mathcal{A}$ обладает свойствами* **LU** *и* **LD**.

Доказательство. **1.** Выполнение условия **LU** следует из предложения 3.12, если $\pi_1 = \pi_2 = \alpha$, и из следствия 3.6.

2. Выполнение условия **LD** следует из леммы 3.4, если (X, f) и (A, g) топологически сопряжены с одометрами и $\pi_1 = \pi_2 = \alpha$, и из следствия 3.6. $\square$

Фиксируем скелет $\mathcal{A}_0$ категории $\mathcal{A}$.

Замечание 3.11. *Из теоремы 3.3 и замечания 3.5 следует, что для каждого $N \in \Sigma$ категория $\mathcal{A}_0$ содержит ровно один объект (A, g), такой что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.*

Замечание 3.12. *Из теоремы 3.1 заключаем, что для любых двух объектов (A_1, g_1) и (A_2, g_2) категории $\mathcal{A}_0$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$;

(ii) $H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) \neq \varnothing$.

Воспользуемся предложением 3.11 и построим по категории $\mathcal{A}_0$ категорию $\overline{\mathcal{A}_0}$.

Из леммы 3.4 и следствия 3.6 получим

Следствие 3.8. *Пусть (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_0$.*

Если π_1, $\pi_2 \in H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$, то $[\pi_1] = [\pi_2]$.

Теперь из замечания 3.12 имеем

Следствие 3.9. *Пусть (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0}$.*

Тогда

(i) *если $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то мощность множества $H_{\overline{\mathcal{A}_0}}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ равна единице;*

(ii) *$H_{\overline{\mathcal{A}_0}}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \varnothing$, в противном случае.*

Построим по частично упорядоченному множеству Σ категорию $\mathfrak{L}(\Sigma)$, объектами которой являются элементы множества Σ, а морфизмами — всевозможные пары элементов

(M, N), в которых $M \geq N$. Для любых двух элементов M, $N \in \Sigma$ множество $H_{\mathfrak{L}(\Sigma)}(M, N)$ состоит из одного морфизма (M, N), если $M \geq N$ и является пустым — в противном случае.

Замечание 3.11 и следствие 3.9 дают нам следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Соответствие* $\Psi_0 : \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0} \to \mathrm{Ob}\,\mathfrak{L}(\Sigma)$,

$$\Psi_0 : (A, g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A, g))\,, \quad (A, g) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0}\,,$$

однозначно продолжается до функтора $\Psi : \overline{\mathcal{A}_0} \to \mathfrak{L}(\Sigma)$.

Функтор Ψ *задает изоморфизм категорий* $\overline{\mathcal{A}_0}$ *и* $\mathfrak{L}(\Sigma)$.

3.6. **Расширения одометров. Общий случай.** Пусть (X, f) — динамическая система с хаусдорфовым компактным фазовым пространством.

Напомним, что для любого одометра $(A, g) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ в категории $\mathcal{K}_0$ существует морфизм $h : (X, f) \to (A, g)$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ (см. теорему 3.1).

Рассмотрим полную подкатегорию $\mathcal{A}(X, f)$ категории $\mathcal{A}$, объектами которой являются динамические системы $(A, g) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Из замечания 3.11 следует, что категория $\mathcal{A}(X, f)$ обладает свойствами **LU** и **LD**.

Фиксируем скелет $\mathcal{A}_0(X, f)$ категории $\mathcal{A}(X, f)$ и, воспользовавшись предложением 3.11, построим категорию $\overline{\mathcal{A}_0(X, f)}$.

Точно так же, как и следствие 3.9, доказывается

Предложение 3.13. *Для* (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\overline{\mathcal{A}_0(X, f)}$ *справедливы утверждения*

(i) *если* $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, *то мощность множества* $H_{\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ *равна единице;*

(ii) $H_{\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \varnothing$, *в противном случае.*

Рассмотрим подмножество $\Sigma(X, f) = \{N \in \Sigma \mid N \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))\}$ множества $(\Sigma, \leq)$ и построим по этому частично упорядоченному множеству категорию $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Так же, как и теорема 3.4, доказывается

Теорема 3.5. *Соответствие*

$$\Psi_0(X, f) : \mathrm{Ob}\, \overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \to \mathrm{Ob}\, \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) \ ,$$

$$\Psi_0(X, f) : (A, g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A, g)) \ , \quad (A, g) \in \mathrm{Ob}\, \overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \ ,$$

однозначно продолжается до функтора

$$\Psi(X, f) : \overline{\mathcal{A}_0(X, f)} \to \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) \ .$$

Функтор $\Psi(X, f)$ *представляет собой изоморфизм категорий* $\overline{\mathcal{A}_0(X, f)}$ *и* $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Определим категорию $\mathfrak{B}(X, f)$ следующим образом:

— объектами $\mathfrak{B}(X, f)$ являются пары $(h, (A, g))$, где $(A, g) \in \mathrm{Ob}\, \mathcal{A}(X, f)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_0}((X, f), (A, g))$;

— для любых $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}(X, f)$ множество $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ состоит из всех троек $((h_1, (A_1, g_1)), \pi, (h_2, (A_2, g_2)))$, таких что $\pi \in H_{\mathcal{A}(X,f)}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ и $h_2 = \pi \circ h_1$.

Корректность этого определения проверяется непосредственно.

Лемма 3.5. *Для* $(h_1, (A_1, g_1))$, $(h_2, (A_2, g_2)) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}(X, f)$ *справедливы утверждения*

(i) *в множестве* $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ *содержится не более одного элемента;*

(ii) *если множество* $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A_1,g_1)),(h_2,(A_2,g_2)))$ *не пусто, то* $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$.

Доказательство. **(i)** Пусть $\pi_1, \pi_2 : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$ — два морфизма, такие что $h_2 = \pi_1 \circ h_1 = \pi_2 \circ h_1$.

Пусть $x \in X$. Тогда $h_2(x) = \pi_1(h_1(x)) = \pi_2(h_1(x))$. Так как динамическая система (A_1,g_1) минимальна, то из замечания 3.9 следует, что $\pi_1 = \pi_2$.

(ii) Это утверждение непосредственно следует из теоремы 3.1. □

Лемма 3.6. *Пусть* $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X,f)$, $N \in \Sigma(X,f)$ *и выполняется неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq N$.

Тогда найдется $(h_1,(A_1,g_1)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X,f)$, *такое что*

(i) $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = N$;

(ii) $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A_1,g_1)),(h,(A,g))) \neq \varnothing$.

Доказательство. По условию леммы и по определению множества $\Sigma(X,f)$ справедливы неравенства $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \leq N \leq \Phi(\mathcal{P}(X,f))$.

Из предложения 2.1 следует, что существует единственное допустимое множество $Q \in \mathbb{N}$, такое что $\Phi(Q) = N$. Так как множества $\mathcal{P}(A,g)$ и $\mathcal{P}(X,f)$ допустимы (см. замечание 2.6), то из леммы 2.1 получим цепочку включений $\mathcal{P}(A,g) \subseteq Q \subseteq \mathcal{P}(X,f)$.

Воспользуемся предложением 2.2 и найдем правильные последовательности $\{n_i \in \mathcal{P}(A,g)\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{m_j \in Q\}_{j\in\mathbb{N}}$, такие что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A,g))$ и $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(Q) = N$.

Фиксируем правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A,g). Рассмотрим прообразы $W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = h^{-1}(V^{(n_i)}_{s_i})\}_{s_i\in\mathbb{Z}_{n_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений последовательности

$\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Из предложения 3.7, определения 1.6 и следствий 1.5 и 1.6 заключаем, что $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$. Согласно предложению 3.8, набор множеств $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i},\, i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому разбиение $\mathfrak{H}$ совпадает с разбиением $\operatorname{zer} h$.

Воспользуемся предложением 1.8 и замечанием 1.6 и построим когерентную последовательность $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f), согласованную с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}$.

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$. Учитывая замечание 3.4, имеем коммутативную диаграмму (см. соотношение (3.4))

$$
\begin{array}{ccc}
(X, f) & \xrightarrow{F} & (A_1, g_1) \\
{\scriptstyle pr}\downarrow & & \| \\
(X/\widetilde{\mathfrak{H}}, \widetilde{f}) & \xrightarrow{\operatorname{fact} F} & (A_1, g_1)
\end{array}
\tag{3.8}
$$

В этой диаграмме (A_1, g_1) — одометр, F — проекция, $\operatorname{fact} F$ — гомеоморфизм и

$$\Phi(\mathcal{P}(X/\widetilde{\mathfrak{H}}, \widetilde{f})) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = N\,.$$

Из следствия 3.2 заключаем, что разбиение $\widetilde{\mathfrak{H}} = \operatorname{zer} F$ является измельчением разбиения $\mathfrak{H} = \operatorname{zer} h$ пространства X. Обозначим $h_1 = F$. Применяя теперь лемму 0.2 к проекциям $\varphi_1 = h_1$ и $\varphi_2 = h$, заключаем, что найдется $\psi \in H_{\mathcal{K}_0}((A_1, g_1), (A, g))$, для которого $h = \psi \circ h_1$. $\square$

Определим "забывающий" функтор

$$\Theta : \mathfrak{B}(X,f) \to \mathcal{A}(X,f)$$

при помощи соотношений

$$\Theta : (h,(A,g)) \mapsto (A,g)\,, \quad (h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X,f)$$
$$\Theta : ((h_1,(A_1,g_1)),\pi,(h_2,(A_2,g_2))) \mapsto \pi\,,$$
$$((h_1,(A_1,g_1)),\pi,(h_2,(A_2,g_2))) \in \operatorname{Mor}(\mathfrak{B}(X,f))\,.$$

Рассмотрим полный прообраз $\mathfrak{B}'(X,f)$ скелета $\mathcal{A}_0(X,f)$ под действием функтора Θ. Непосредственная проверка показывает, что $\mathfrak{B}'(X,f)$ является полной подкатегорией категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Замечание 3.13. *Пусть $\mathfrak{L}'$ — полная подкатегория категории $\mathfrak{L}$. Пусть A, $B \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}'$. По определению $H_{\mathfrak{L}'}(A,B) = H_{\mathfrak{L}}(A,B)$.*

Следовательно, объекты A и B изоморфны в $\mathfrak{L}'$ тогда и только тогда, когда они изоморфны в $\mathfrak{L}$.

Пусть $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ — скелет категории $\mathfrak{B}'(X,f)$. Очевидно, $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ — полная подкателогия категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Предложение 3.14. *Категория $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ является скелетом категории $\mathfrak{B}(X,f)$.*

Доказательство. Из определения категории $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ и замечания 3.13 следует, что эта подкатегория содержит не более чем по одному представителю из каждого классса изоморфных объектов категории $\mathfrak{B}(X,f)$.

Докажем, что для каждого $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X,f)$ найдется изоморфный ему объект, лежащий в $\mathfrak{B}_0'(X,f)$.

Рассмотрим $(A,g) = \Theta(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}(X,f)$. Подкатегория $\mathcal{A}_0(X,f)$ является скелетом категории $\mathcal{A}(X,f)$, поэтому существует ровно один объект $(A',g') \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}_0(X,f)$, изоморфный (A, g). Пусть $\rho : (A, g) \to (A', g')$ — изоморфизм.

Обозначим $h' = \rho \circ h : (X, f) \to (A', g')$. Рассмотрим объект $(h', (A', g'))$ категории $\mathfrak{B}(X, f)$. Очевидно, $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ и $((h, (A, g)), \rho, (h', (A', g'))) \in \operatorname{Iso} \mathfrak{B}(X, f)$. $\square$

Зададим на классе $\operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ бинарное отношение $\preceq$. Скажем, что

$$(h_1, (A_1, g_1)) \preceq (h_2, (A_2, g_2)) \ ,$$

если

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing \ .$$

Предложение 3.15. *Отношение $\preceq$ является отношением частичного порядка и справедливы следующие утверждения:*

(i) *каждый элемент $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ мажорируется некоторым $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$;*

(ii) *элемент $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ является максимальным относительно порядка $\preceq$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.*

Перед тем, как приступить к доказательству предложения 3.15, мы докажем одну лемму.

Лемма 3.7. *Пусть $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ и для некоторого $N \in \Sigma(X, f)$ справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq N$.*

Найдется такой объект $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, что

(i) *$\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = N$;*

(ii) *$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h', (A', g')), (h, (A, g))) \neq \varnothing$.*

Доказательство . Согласно лемме 3.6, найдется такой $(h_1, (A_1, g_1)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$, что $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = N$ и

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h, (A, g))) \neq \varnothing\ .$$

Из предложения 3.14 заключаем, что найдется объект $(h', (A', g'))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$, изоморфный объекту $(h_1, (A_1, g_1))$. Из леммы 3.5 следует, что

$$\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = N\ .$$

Кроме того, $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h', (A', g')), (h, (A, g))) \neq \varnothing$ по построению. $\square$

Доказательство предложения 3.15. По определению категории для каждого объекта $B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}'_0(X, f)$ существует единичный морфизм 1_B, поэтому отношение $\preceq$ рефлексивно.

Композиция любой пары морфизмов $\alpha \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B')$ и $\beta \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B'')$ является элементом множества $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B'')$, следовательно отношение $\preceq$ транзитивно.

Пусть $\alpha \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B')$, $\beta \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B)$ для некоторых B, $B' \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}'_0(X, f)$. Согласно лемме 3.5 имеем $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B, B) = \{1_B\}$, $H_{\mathfrak{B}(X,f)}(B', B') = \{1_{B'}\}$. Следовательно, $\alpha\beta = 1_B$, $\beta\alpha = 1_{B'}$ и объекты B и B' изоморфны в категории $\mathfrak{B}(X, f)$. Так как $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ — полная подкатегория в $\mathfrak{B}(X, f)$, то B и B' изоморфны в категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ (см. замечание 3.13). Из сказанного заключаем, что отношение $\preceq$ антисимметрично.

Итак, $\preceq$ является отношением частичного порядка.

Утверждение (i) предложения 3.15 следует из леммы 3.7 и теоремы 3.1.

Докажем теперь утверждение (ii).

Пусть $(h, (A, g))$, $(h', (A', g')) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}'_0(X, f)$. Пусть $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $(h, (A, g)) \preceq (h', (A', g'))$. Из леммы 3.5 и теоремы 3.1 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq$

$\Phi(\mathcal{P}(A',g')) \le \Phi(\mathcal{P}(X,f))$. Следовательно, $\Phi(\mathcal{P}(A',g')) = \Phi(\mathcal{P}(X,f)) = \Phi(\mathcal{P}(A,g))$ и любой морфизм $\rho : (A',g') \to (A,g)$ является изоморфизмом (см. теорему 3.3 и следствие 3.5).

Так как множество $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h',(A',g')),(h,(A,g)))$ не пусто по нашему предположению, то объекты $(h',(A',g'))$ и $(h,(A,g))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ изоморфны. Следовательно, $(h',(A',g')) = (h,(A,g))$ (см. предложение 3.14) и $(h,(A,g))$ — максимальный элемент относительно порядка $\preceq$.

Пусть теперь $(h,(A,g))$ — максимальный элемент относительно порядка $\preceq$. Из утверждения (i) предложения 3.15 и теоремы 3.1 получим равенство $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) = \Phi(\mathcal{P}(X,f))$. □

По определению

$$\Theta(\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)) = \operatorname{Ob}\mathcal{A}_0(X,f) = \operatorname{Ob}\overline{\mathcal{A}_0(X,f)}\,,$$

следовательно корректно определено отображение

$$\Lambda_0 = \Psi_0 \circ \Theta : \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f) \to \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f)) = (\Sigma(X,f), \le)\ .$$

Из леммы 3.5 и предложения 3.15 получаем

Следствие 3.10. *Отображение Λ_0 сохраняет отношение порядка.*

Полный прообраз $\Lambda_0^{-1}(\Phi(\mathcal{P}(X,f)))$ наибольшего элемента множества $(\Sigma(X,f),\le)$ совпадает с классом всех максимальных элементов из $(\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f),\preceq)$.

Из определения категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$, леммы 3.5 и следствия 3.10 получим

Следствие 3.11. *Отображение*

$$\Lambda_0 : \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f) \to \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$$

однозначно продолжается до функтора

$$\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X,f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X,f)) \ .$$

Для любых двух объектов B, $B' \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}'_0(X,f)$ отображение

$$\Lambda_{B,\,B'} : H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(B,B') \to H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(\Lambda(B),\Lambda(B'))$$

инъективно.

Замечание 3.14. *1). Из леммы 3.5 следует, что необходимым условием изоморфности двух объектов $(h_1,(A_1,g_1))$, $(h_2,(A_2,g_2)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$ является равенство $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$.*

2). Из следствия 3.5 получаем такое утверждение: если выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$, то объекты $(h_1,(A_1,g_1))$, $(h_2,(A_2,g_2)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X,f)$ изоморфны тогда и только тогда, когда хотя бы одно из множеств

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1,(A_1,g_1)),(h_2,(A_2,g_2))) \ ,$$
$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2,(A_2,g_2)),(h_1,(A_1,g_1)))$$

не пусто.

3.7. **Расширения одометров. Неразложимые динамические системы.** У нас возникает естественное желание как-то “сравнить” категории $\mathfrak{B}(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Ниже мы увидим, что в том случае, когда динамическая система (X,f) неразложима, категория $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ изоморфна скелету категории $\mathfrak{B}(X,f)$ (и изоморфизм задается функтором Λ).

Если же динамическая система (X,f) не является неразложимой, вообще говоря непонятно, как “сравнивать” категории $\mathfrak{B}(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$, как показывает следующая

Лемма 3.8. *Пусть* $(h,(A,g)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, $N \in \Sigma(X,f)$ *и справедливо строгое неравенство* $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) \lneqq N$.

Объект $(h',(A',g')) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, *удовлетворяющий лемме 3.7, определен однозначно тогда и только тогда, когда динамическая система* (X,f) *неразложима.*

Доказательство. 1). Предположим, что динамическая система (X,f) неразложима.

Пусть $(h_1,(A_1,g_1))$, $(h_2,(A_2,g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2)) = N$ и $(h,(A,g)) \preceq (h_i,(A_i,g_i))$, $i=1,2$.

Так как $\Phi(\mathcal{P}(A_1,g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2,g_2))$, то динамические системы (A_1,g_1) и (A_2,g_2) топологически сопряжены. Мы фиксируем изоморфизм $\rho : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$.

Из замечания 3.8 и леммы 3.4 заключаем, что имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
(X,f) \arrow[r, equal] \arrow[d, "h_1"'] & (X,f) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho^{-1}\circ h_2"'] & (X,f) \arrow[d, "h_2"] \\
(A_1,g_1) \arrow[r, "\operatorname{fact}(\rho^{-1}\circ h_2)"'] & (A_1,g_1) \arrow[r, "\rho"'] & (A_2,g_2)
\end{tikzcd}$$

Согласно следствию 3.5, отображение $\rho \circ \operatorname{fact}(\rho^{-1}\circ h_2) : (A_1,g_1) \to (A_2,g_2)$ является изоморфизмом.

Так как $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ скелет категории $\mathfrak{B}(X,f)$, то справедливо равенство $(h_1,(A_1,g_1)) = (h_2,(A_2,g_2))$.

2). Пусть теперь динамическая система (X,f) не является неразложимой.

Обозначим $\Phi(\mathcal{P}(A,g)) = M \in \Sigma(X,f)$. Так как $M \lneqq N$ по условию леммы, то найдется простое $p \in \mathcal{S}$, такое что $M_p \lneqq N_p$. Из этого следует, что $M_p \neq \infty$. Пусть $M_p = k$. Тогда $N_p \geq k+1$.

Фиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = M$ (см. предложение 2.2). Из определения функции Φ следует, что

— $n_i = p^{k_i} a_i$, $k_i \le k$, НОД$(a_i, p) = 1$, $i \in \mathbb{N}$;
— существует такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что $k_{i_0} = k$.

Так как последвательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ правильная, то $k_i = k$ для всех $i \ge i_0$. Не ограничивая общности рассуждений (см. следствие 2.1), можно считать что

$$n_i = p^k a_i\,, \quad \text{НОД}(a_i, p) = 1\,, \quad i \in \mathbb{N}\,.$$

Еще раз воспользуемся следствием 2.1 и будем считать, что $n_1 = p^k$.

Фиксируем правильную последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, для которой $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = N$ (см. начало доказательства леммы 3.6). Последовательность $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ правильная и $N_p \ge k+1$, поэтому найдется $j_0 \in \mathbb{N}$, такое что m_j делится на p^{k+1} для каждого $j \ge j_0$.

Вновь пользуясь следствием 2.1, можно считать, что m_j делится на p^{k+1} для всех $j \in \mathbb{N}$ и $m_1 = p^{k+1}$.

Фиксируем правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A, g). Рассмотрим прообразы $W^{(n_i)} = \{W^{(n_i)}_{s_i} = h^{-1}(V^{(n_i)}_{s_i})\}_{s_i\in\mathbb{Z}_{n_i}}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений последовательности $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.6, заключаем, что $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f) и разбиение $\mathfrak{H}$ пространства X, индуцированое этой последовательностью, совпадает с разбиением $\operatorname{zer} h$.

Так как $N \le \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ по условию леммы, то существует когерентная правильная последовательность

$\{U^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X,f), согласованая с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ (см. предложение 1.8).

Мы предположили, что динамическая система (X,f) не является неразложимой. Поэтому, найдется разбиение $X = X_1 \coprod X_2$ пространства X на два инвариантных замкнутых подмножества X_1 и X_2.

Наборы множеств $\{P_{s_1}^{(m_1)} = U_{s_1}^{(m_1)} \cap X_1\}_{s_1\in\mathbb{Z}_{m_1}}$ и $\{Q_{s_1}^{(m_1)} = U_{s_1}^{(m_1)} \cap X_2\}_{s_1\in\mathbb{Z}_{m_1}}$ являются периодическими разбиениями динамических систем $(X_1, f|_{X_1})$ и $(X_2, f|_{X_2})$, соответственно (см. замечание 1.3 и доказательство предложения 1.3). Поэтому набор множеств

$$\widetilde{U}_{s_1}^{(m_1)} = P_{s_1}^{(m_1)} \cup f^{n_1}(Q_{s_1}^{(m_1)}) = P_{s_1}^{(m_1)} \cup f^{p^k}(Q_{s_1}^{(m_1)})\,, \quad s_1 \in \mathbb{Z}_{m_1}\,,$$

является периодическим разбиением динамической системы (X,f) длины $m_1 = p^{k+1}$ (см. доказательство предложения 1.3).

Периодические разбиения $U^{(m_1)}$ и $W^{(n_1)}$ согласованы и n_1 делит m_1, следовательно, найдется $\tau \in \mathbb{Z}_{n_1}$, такое что $U_0^{(m_1)} = P_0^{(m_1)} \cup Q_0^{(m_1)} \subseteq W_\tau^{(n_1)}$ (см. следствие 1.6).

Заметим, что так как $f : X \to X$ — гомеоморфизм, то

$$\begin{aligned} f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)} \cap W_\tau^{(n_1)}) &= \\ = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) \cap f^{n_1}(W_\tau^{(n_1)}) &= \\ = f^{n_1}(Q_0^{(m_1)}) \cap W_\tau^{(n_1)} &\subseteq W_\tau^{(n_1)}\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $\widetilde{U}_0^{(m_1)} \subseteq W_\tau^{(n_1)}$. Из следствия 1.5 делаем вывод, что периодические разбиения $\widetilde{U}^{(m_1)}$ и $W^{(n_1)}$ согласованы.

Применяя индуктивно предложение 1.7 и замечание 1.6, получим когерентную последовательность $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f), согласованную с последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Пусть $\mathfrak{T}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$ — разбиения пространства X, индуцированные последовательностями $\{U^{(m_j)}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{m_j\in\mathbb{N}}$, соответственно.

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.6, найдем $(h_1, (A'_1, g'_1))$, $(h_2, (A'_2, g'_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}(X, f)$, для которых $\mathfrak{T} = \operatorname{zer} h_1$, $\widetilde{\mathfrak{T}} = \operatorname{zer} h_2$ и

$$h_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_i, (A'_i, g'_i)), (h, (A, g))) \neq \varnothing\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Найдем $(\pi_1, (A_1, g_1))$, $(\pi_2, (A_2, g_2)) \in \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X, f)$, которые изоморфны объектам $(h_1, (A'_1, g'_1))$ и $(h_2, (A'_2, g'_2))$ соответственно. Очевидно,

$$h_{\mathfrak{B}(X,f)}((\pi_i, (A_i, g_i)), (h, (A, g))) \neq \varnothing\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости неравенства $(\pi_1, (A_1, g_1)) \neq (\pi_2, (A_2, g_2))$, нам достаточно показать, что объекты $(h_1, (A'_1, g'_1))$ и $(h_2, (A'_2, g'_2))$ не изоморфны. Воспользуемся для этого замечанием 3.14 (напомним, что $\Phi(\mathcal{P}(A'_1, g'_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A'_2, g'_2)) = N$ по построению, следовательно, динамические системы (A'_1, g'_1) и (A'_2, g'_2) топологически сопряжены).

Проверим равенство

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_1, (A'_1, g'_1)), (h_2, (A'_2, g'_2))) = \varnothing\,. \tag{3.9}$$

Предположим, что это равенство не верно и существует морфизм $\alpha : (h_1, (A'_1, g'_1)) \to (h_2, (A'_2, g'_2))$. Тогда морфизм $\widetilde{\alpha} = \Theta(\alpha) : (A'_1, g'_1) \to (A'_2, g'_2)$ является изоморфизмом (см. следствие 3.5). Следовательно, $\operatorname{zer}(\widetilde{\alpha}\circ h_1) = \operatorname{zer} h_1$. Так как $h_2 = \widetilde{\alpha}\circ h_1$ по определению, то $\widetilde{\mathfrak{T}} = \operatorname{zer} h_2 = \operatorname{zer}(\widetilde{\alpha}\circ h_1) = \operatorname{zer} h_1 = \mathfrak{T}$.

С другой стороны, последовательности $\{U^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{U}^{(m_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ не являются согласованными. Действительно, по построению $\varnothing \neq U_0^{(m_1)} \cap \widetilde{U}_0^{(m_1)} = P_0^{(m_1)} \subseteq X_1$, следовательно

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U_0^{(m_1)} \cap \widetilde{U}_0^{(m_1)}) \subseteq X_1$$

и периодические разбиения $U^{(m_1)}$ и $\widetilde{U}^{(m_1)}$ не согласованы. Поэтому из следствия 3.2 заключаем, что $\mathfrak{T} \neq \widetilde{\mathfrak{T}}$.

Полученное противоречие доказывает равенство (3.9).

Равенство

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2,(A_2',g_2')),(h_1,(A_1',g_1'))) = \varnothing$$

доказывается аналогично. $\square$

Замечание 3.15. *Очевидно, множество* $(\Sigma, \leq)$ *обладает наименьшим элементом* $E = (E_p = 0)_{p\in\mathcal{S}} = \Phi_0(1)$.

Следовательно, объект E *является правым нулем категории* $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ *для любой динамической системы* (X,f).

В категории $\mathcal{A}_0(X,f)$ *элементу* E *соответствует динамическая система* $(\{pt\}, Id)$ *с фазовым пространством, состоящим из одной точки (соответствует в том смысле, что* $\Phi(\mathcal{P}(\{pt\}, Id)) = E$*).*

Предложение 3.16. *Категория* $\mathfrak{B}_0'(X,f)$ *обладает правым нулем* $0_R \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}_0'(X,f)$.

Доказательство. Очевидно, существует ровно одна проекция $\pi_0 : X \to \{pt\}$ и она удовлетворяет соотношению $\pi_0 \circ f = Id \circ \pi_0$. Обозначим $0_R = (\pi_0, (\{pt\}, Id))$.

Пусть $(h,(A,g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}_0'(X,f)$. Очевидно, однозначно определена проекция $\pi : A \to \{pt\}$ и для нее выполняются соотношения $\pi\circ g = Id\circ\pi$ и $\pi\circ h = \pi_0 : (X,f)\to(\{pt\},Id)$. $\square$

Замечание 3.16. *Так как любые два различных объекта категории $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ не изоморфны (по определению скелета категории), то правый ноль определен однозначно.*

Теперь из леммы 3.8 мы можем извлечь следующие утверждения.

Следствие 3.12. *Пусть $\Phi(\mathcal{P}(X,f))\neq E$, $N\in\Sigma(X,f)$ и $N\neq E$.*

Найдется $(h,(A,g))\in\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A,g))=N$, и эквивалентны следующие утверждения:

(i) *объект $(h,(A,g))\in\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$, такой что $\Phi(\mathcal{P}(A,g))=N$, определен однозначно;*

(ii) *динамическая система (X,f) неразложима.*

Доказательство. Применим леммы 3.7 и 3.8 к объекту $0_R\in\operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и числу $N\in\Sigma(X,f)$. $\square$

Замечание 3.17. *Следствие 3.12 допускает другую формулировку:*

— *отображение $\Lambda_0 : \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f)\to\operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ сюръективно;*

— *если $\Phi(\mathcal{P}(X,f))\neq E$, то инъективность отображения Λ_0 эквивалентна тому, что динамическая система (X,f) неразложима.*

Следствие 3.13. *Если динамическая система (X,f) неразложима, то для любых двух объектов $(h_1,(A_1,g_1))$ и $(h_2,(A_2,g_2))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ неравенство*

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2,(A_2,g_2)),(h_1,(A_1,g_1)))\neq\varnothing$$

выполняется тогда и только тогда, когда справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \leq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Доказательство. Пусть

$$(h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}_0'(X, f)\,.$$

Если $H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing$, то из леммы 3.5 следует, что $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \leq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Пусть теперь $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \leq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$. Воспользуемся леммой 3.7 и найдем $(h_2', (A_2', g_2')) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}_0'(X, f)$, для которого $\Phi(\mathcal{P}(A_2', g_2')) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$ и

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h_2', (A_2', g_2')), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \varnothing\,.$$

Равенство $(h_2', (A_2', g_2')) = (h_2, (A_2, g_2))$ получается из следствия 3.12. □

Лемма 3.9. *Пусть* $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *категория* $\mathfrak{B}_0'(X, f)$ *обладает левым нулем* $0_L \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}_0'(X, f)$*;*

(ii) *динамическая система* (X, f) *неразложима.*

Доказательство. 1). Предположим, что динамическая система (X, f) неразложима.

Из следствия 3.12 вытекает, что существует единственный объект $(h, (A, g)) \in \mathrm{Ob}\, \mathfrak{B}_0'(X, f)$, для которого выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Теорема 3.1 гарантирует нам, что для любого объекта $(h', (A', g'))$ категории $\mathfrak{B}_0'(X, f)$ справедливо неравенство $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) \leq \Phi(\mathcal{P}(A, g))$. Теперь следствие 3.13 и лемма 3.5 показывают, что множество

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h, (A, g)), (h', (A', g')))$$

содержит ровно один элемент для каждого $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, следовательно $(h, (A, g))$ левый нуль категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$.

2). Пусть динамическая система (X, f) не является неразложимой.

Предположим, что существует левый ноль $(h, (A, g))$ категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$. Из теоремы 3.1 и леммы 3.5 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Из следствия 3.12 вытекает, что в категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ существует другой объект $(h', (A', g'))$, для которого выполняется равенство $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

$\mathfrak{B}'_0(X, f)$ — скелет категории $\mathfrak{B}(X, f)$ (см. предложение 3.14), поэтому объекты $(h', (A', g'))$ и $(h, (A, g))$ не изоморфны в категории $\mathfrak{B}(X, f)$. Из замечания 3.14 следует, что

$$H_{\mathfrak{B}(X,f)}((h, (A, g)), (h', (A', g'))) = \varnothing$$

и объект $(h, (A, g))$ не может быть левым нулем категории $\mathfrak{B}'_0(X, f)$.

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 3.6. *Пусть* $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $\mathfrak{B}_0(X, f)$ *— скелет категории* $\mathfrak{B}(X, f)$.

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *динамическая система* (X, f) *неразложима;*
(ii) *категории* $\mathfrak{B}_0(X, f)$ *и* $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ *изоморфны.*

Доказательство. По определению, категория $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ обладает левым нулем $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$. Следовательно, необходимым условием изоморфности категорий $\mathfrak{B}_0(X, f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ является существование левого нуля в категории $\mathfrak{B}_0(X, f)$.

Подкатегория $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ является скелетом категории $\mathfrak{B}(X,f)$ (см предложение 3.14), следовательно, она изоморфна скелету $\mathfrak{B}_0(X,f)$. Если динамическая система (X,f) не является неразложимой, то из леммы 3.9 заключаем, что в категории $\mathfrak{B}_0(X,f)$ нет левого нуля и она не изоморфна категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Пусть теперь (X,f) — неразложимая динамическая система. Докажем, что функтор $\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X,f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ (см. следствие 3.11) задает изоморфизм между категориями $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Из замечания 3.17 следует биективность отображения $\Lambda_0 : \operatorname{Ob}\mathfrak{B}'_0(X,f) \to \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Пусть M, $N \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$. Из следствия 3.13 заключаем, что неравенства

$$H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N)) \neq \varnothing$$

эквивалентны. Так как множества морфизмов $H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N)$ и $H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N))$ содержат не более чем по одному элементу (см. определение категории $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ и лемму 3.5), то отображение

$$\Lambda_{\Lambda_0^{-1}(M),\,\Lambda_0^{-1}(N)} : \\ : H_{\mathfrak{B}'_0(X,f)}(\Lambda_0^{-1}(M),\Lambda_0^{-1}(N)) \to H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))}(M,N)$$

биективно для любой пары M, $N \in \operatorname{Ob}\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$.

Итак, $\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X,f) \to \mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ задает изоморфизм категорий $\mathfrak{B}'_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$. Следовательно, категории $\mathfrak{B}_0(X,f)$ и $\mathfrak{L}(\Sigma(X,f))$ также изоморфны. $\square$

3.8. **Расширения одометров и почти периодические точки.**

Предложение 3.17. *Пусть* $(A,g) \in \operatorname{Ob}\mathcal{A}(X,f)$.

Пусть существует проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такая что для некоторого $x \in X$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *точка $x \in X$ почти периодическая точка динамической системы (X, f);*

(ii) *для любой точки $y \in X$ выполняется включение $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y) \cap \omega(y)$ (следовательно, $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ — единственное минимальное множество динамической системы (X, f), в частности динамическая система (X, f) неразложима;*

(iii) $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$*;*

(iv) *для любой проекции $\pi' : (X, f) \to (A', g')$, $(A', g') \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, следующие условия эквивалентны:*

  a) $(\pi')^{-1}(\pi'(x)) = \{x\}$,

  b) $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$*;*

(v) *если динамическая система (X, f) минимальна, то для каждой почти периодической точки $y \in X$ динамической системы (X, f) выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.*

Прежде, чем доказывать предложение 3.17 и извлекать из него следствия, докажем три леммы.

Лемма 3.10. *Рассмотрим два объекта (A_1, g_1), $(A_2, g_2) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, и морфизм $h : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$.*

Если найдется $x \in A_1$, для которого $h^{-1}(h(x)) = \{x\}$, то $h \in \mathrm{Iso}\,A$.

Доказательство. Так как (A_2, g_2) — минимальная динамическая система (см. замечание 3.2), то h — проекция (см. замечание 3.8).

Пусть $y \in A_1$. Обозначим через $H(y)$ элемент разбиения $\mathrm{zer}\,h$ пространства A_1, содержащий y.

Из следствия 3.6 нам известно, что существует единственный изоморфизм $h_{y,x} : (A_1, g_1) \to (A_1, g_1)$, такой что $h_{y,x}(y) = x$. Рассмотрим проекцию $\widetilde{h} = h \circ h_{y,x} : (A_1, g_1) \to (A_2, g_2)$. Обозначим через $\widetilde{H}(y)$ элемент разбиения $\operatorname{zer} \widetilde{h}$ пространства A_1, содержащий y.

Пусть $z = h(x) \in A_2$. Ясно, что

$$\widetilde{h}^{-1}(z) = h_{y,x}^{-1}(h^{-1}(z)) = h_{y,x}^{-1}(x) = \{y\} = \widetilde{H}(y) .$$

Динамическая система (A_2, g_2) минимальна, поэтому она неразложима. Из леммы 3.3 заключаем, что $\operatorname{zer} h = \operatorname{zer} \widetilde{h}$. Следовательно, $h^{-1}(h(y)) = H(y) = \widetilde{H}(y) = \{y\}$. □

Лемма 3.11. *Пусть динамическая система (X, f) минимальна и $x \in X$ — почти периодическая точка этой динамической системы.*

Тогда существуют одометр $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ и проекция $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Доказательство. Зафиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, и правильную последовательность $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (X, f). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x \in W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. замечание 1.6).

Пусть $\mathfrak{H}$ — разбиение пространства X, индуцированное последовательностью $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ и пусть

$$F : (X, f) \to (X/\mathfrak{H}, \overline{f}) = (A, g)$$

— проекция на динамическую систему $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ (см. соотношение (3.4), замечание 3.4 и предложение 3.3). Тогда $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Так как $\operatorname{zer} F = \mathfrak{H}$, то для завершения доказательства нам достаточно проверить равенство

$$\{x\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Предположим, что это равенство не выполняется и найдется $y \neq x$, такое что

$$y \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Пространство X хаусдорфово, поэтому найдется замкнутая окрестность $U \subseteq X \setminus \{y\}$ точки x. Так как точка x почти периодическая, то из леммы 1.5 заключаем, что найдется $m \in \mathcal{P}(X, f)$ и периодическое разбиение $\widetilde{W}^{(m)}$ динамической системы (X, f), такое что $x \in \widetilde{W}_0^{(m)} \subseteq U$.

Очевидно, постоянная последовательность $\{m_j = m\}_{j \in \mathbb{N}}$ является правильной. Из леммы 2.1 заключаем, что

$$\Phi_0(m) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f)) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}).$$

Поэтому из предложения 2.3 следует, что существует $k \in \mathbb{N}$, такое что $m_1 = m$ делит n_k.

Динамическая система (X, f) минимальна, поэтому она неразложима. Из следствия 1.1 вытекает, что периодические разбиения $\widetilde{W}^{(m)}$ и $W^{(n_k)}$ согласованы, поэтому (см. следствие 1.6) имеет место включение

$$x \in W_0^{(n_k)} \subseteq \widetilde{W}_0^{(m)} \subseteq U \subseteq X \setminus \{y\}$$

и

$$y \notin \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_0^{(n_i)} .$$

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 3.12. *Пусть* $x \in Y_1$ *— почти периодическая точка динамической системы* (Y_1, h_1). *Пусть* $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *— проекция.*

Тогда $y = \pi(x) \in Y_2$ *— почти периодическая точка динамической системы* (Y_2, h_2).

Доказательство. Пусть $U \subseteq Y_2$ — открытая окрестность точки y. Так как отображение $\pi : Y_1 \to Y_2$ непрерывно, то $V = \pi^{-1}(U)$ — открытая окрестность почти периодической точки x. Следовательно, существует $n(V) \in \mathbb{N}$, такое что

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_1^{kn(V)}(x) \subseteq V \ .$$

Тогда

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_2^{kn(V)}(y) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} h_2^{kn(V)} \circ \pi(x) = \\ = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \pi \circ h_1^{kn(V)}(x) \subseteq \pi(V) = U \ .$$

Из произвола в выборе окрестности U следует, что $y = \pi(x)$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_2, h_2). $\square$

Доказательство предложения 3.17. **(i)** Фиксируем правильную последовательность $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, такую что $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\mathcal{P}(A, g))$. Построим правильную последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ периодических разбиений динамической системы (A, g). Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $z = \pi(x) \in V_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. замечание 1.6).

Согласно предложению 3.8 набор множеств $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\ i \in \mathbb{N}\}$ является базой топологии пространства A. Поэтому

$$\{z\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} V_0^{(n_i)} \ .$$

Кроме того, так как последовательность $\{V^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ правильная, то $V_0^{(n_{i+1})} \subseteq V_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. следствие 1.6).

Рассмотрим прообразы $\{W_{s_i}^{(n_i)} = \pi^{-1}(V_{s_i}^{(n_i)}) \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$, периодических разбиений $\{V_{s_i}^{(n_i)} \mid s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}\}$, $i \in \mathbb{N}$.

Ясно, что $W_0^{(n_{i+1})} \subseteq W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, и

$$\{x\} = \pi^{-1}(z) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} W_0^{(n_i)} \ .$$

Из предложения 3.7 и следствия 1.5 делаем вывод, что $\{W^{(n_i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ — правильная последовательность периодических разбиений динамической системы (X, f).

Пусть $U \subseteq X$ — открытая окрестность точки x. Так как пространство X компактно, то все множества $W_0^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, компактны. Применяя лемму 3.2, найдем $k \in \mathbb{N}$, такое что $x \in W_0^{(n_k)} \subseteq U$.

По определению периодического разбиения имеем

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{mn_k}(x) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} f^{mn_k}(W_0^{(n_k)}) = W_0^{(n_k)} \subseteq U \ .$$

Из-за произвола в выборе окрестности U точка x является почти периодической.

(ii) Пусть $y \in X$, $t = \pi(y) \in A$. Так как динамическая система (A, g) минимальна (см. замечание 3.2), то $\alpha(t) = \omega(t) = \overline{\mathrm{Orb}_g(t)} = A$. Следовательно, найдется монотонная неограниченно возрастающая последовательность чисел $\{n_i \in \mathbb{Z}\}_{i\in\mathbb{N}}$, такая что $z = \pi(x) = \lim_{i\to\infty} g^{n_i}(t)$.

Рассмотрим последовательность $\{f^{n_i}(y) \in X\}_{i\in\mathbb{N}}$. Пространство X компактно, поэтому эта последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку $x' \in X$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $x' = \lim_{i\to\infty} f^{n_i}(y)$. Следовательно, $x' \in \omega(y)$.

С другой стороны, $\pi \circ f^{n_i}(y) = g^{n_i} \circ \pi(y) = g^{n_i}(t)$, следовательно

$$\pi(x') = \lim_{i\to\infty} \pi \circ f^{n_i}(x) = \lim_{i\to\infty} g^{n_i}(t) = \pi(x)$$

и $x = x' \in \omega(y)$. Так как $\omega(y)$ — замкнутое инвариантное множество динамической системы (X, f), то $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \omega(y)$.

Соотношение $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y)$ доказывается аналогично.

(iii) Рассмотрим $(\pi, (A, g)) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$. Из теоремы 3.1 заключаем, что $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \le \Phi(\mathcal{P}(X, f))$. Применим лемму 3.6 и найдем $(\pi', (A', g')) \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{B}(X, f)$, такой что $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и существует

$$h \in H_{\mathfrak{B}(X,f)}((\pi', (A', g')), (\pi, (A, g)))\ .$$

Иными словами, существуют $(A', g') \in \mathcal{A}(X, f)$ и морфизм $h : (A', g') \to (A, g)$, такие что $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi = h \circ \pi'$.

Из замечания 3.8 заключаем, что отображение $\pi' : X \to A'$ сюръективно. Следовательно для любого подмножества $B \subseteq A'$ выполняется равенство $\pi'((\pi')^{-1}(B)) = B$.

Пусть $z' = \pi'(x) \in A'$. Тогда $h(z') = h \circ \pi'(x) = z$. Имеет место цепочка равенств $(\pi')^{-1}(h^{-1}(z)) = \pi^{-1}(z) = \{x\}$, следовательно

$$h^{-1}(h(z')) = h^{-1}(z) = \pi'((\pi')^{-1}(h^{-1}(z))) = \{\pi'(x)\} = \{z'\}\ .$$

Применяя лемму 3.10, заключаем, что $h : (A', g') \to (A, g)$ — изоморфизм. Следовательно,

$$\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))\,.$$

(iv) То, что из условия **a)** следует условие **b)**, мы уже проверили в пункте (iii).

Пусть $(A'g') \in \mathcal{A}(X, f)$, $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ и $\pi' : (X, f) \to (A', g')$ — проекция.

Динамическая система (X, f) неразложима (см. пункт (ii)), поэтому из леммы 3.8 следует, что объекты $(\pi', (A', g'))$ и $(\pi, (A, g))$ категории $\mathfrak{B}(X, f)$ изоморфны (напомним, что $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ скелет категории $\mathfrak{B}(X, f)$). Найдем изоморфизм $\rho : (A, g) \to (A', g')$, такой что $\pi' = \rho \circ \pi$. Кроме того, очевидно $\pi = \rho^{-1} \circ \pi'$. Применяя лемму 0.2, заключаем, что разбиения $\operatorname{zer} \pi$ и $\operatorname{zer} \pi'$ совпадают.

Множества $\pi^{-1}(\pi(x))$ и $(\pi')^{-1}(\pi'(x))$ являются элементами разбиений $\operatorname{zer} \pi$ и $\operatorname{zer} \pi'$ соответственно, и содержат точку x. Следовательно, $(\pi')^{-1}(\pi'(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

(v) Пусть динамическая система (X, f) минимальна и $y \in X$ — почти периодическая точка этой динамической системы.

Применяя лемму 3.11, найдем проекцию $\pi' : (X, f) \to (A', g')$, $(A', g') \in \mathcal{A}(X, f)$, такую что $(\pi')^{-1}(\pi')(y) = \{y\}$. Тогда меняя ролями проекции π и π', из пункта (iv) получим $(\pi)^{-1}(\pi)(y) = \{y\}$. $\square$

Определение 3.7. *Динамическая система* (Y_1, h_1) *называется* почти взаимно-однозначным расширением *динамической системы* (Y_2, h_2)*, если для некоторой проекции* $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *существует всюду плотное подмножество* $Q \subseteq Y_1$*, такое что для любого* $y \in Q$ *выполняется условие* $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Следствие 3.14 (см. [13])**.** *Динамическая система* (X, f) *является почти взаимно-однозначным расширением одометра тогда и только тогда, когда* $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ *для почти периодической точки* $x \in X$.

Доказательство . Пусть $\pi : (X, f) \to (Y, h)$ — проекция и для некоторой точки $x \in X$ справедливо равенство $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Заметим, что так как $f : X \to X$ и $h : Y \to Y$ — гомеоморфизмы, то для каждого $n \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\{x\} = \pi^{-1}(\pi(x)) = \pi^{-1}(h^{-n} \circ \pi \circ f^n(x)) = \\ = (h^n \circ \pi)^{-1}(\pi \circ f^n(x)) = \\ = (\pi \circ f^n)^{-1}(\pi \circ f^n(x)) = f^{-n}(\pi^{-1}(\pi(f^n(x)))) \ ,\end{aligned}$$

следовательно

$$\{f^n(x)\} = f^n \circ f^{-n}(\pi^{-1}(\pi(f^n(x)))) = \pi^{-1}(\pi(f^n(x))) \ .$$

Иными словами, для каждого $y \in \mathrm{Orb}_f(x)$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Если динамическая система (X, f) минимальна, то $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ и динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением динамической системы (Y, h).

1. Пусть $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$ для некоторой почти периодической точки $x \in X$. Тогда динамическая система (X, f) минимальна по теореме Биркгофа и, применяя лемму 3.11 и рассуждения, приведенные выше, заключаем, что динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением одометра.

2. Пусть динамическая система (X, f) является почти взаимно-однозначным расширением одометра (A, g).

Фиксируем проекцию $\pi : (X, f) \to (A, g)$, такую что для каждой точки y из некоторого всюду плотного множества $Q \subseteq X$ выполняется равенство $\pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}$.

Из предложения 3.17, пункт (i), заключаем, что любая точка $y \in Q$ является почти периодической точкой динамической системы (X, f). Следовательно, для каждого $y \in Q$ множество $\overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$ является минимальным множеством динамической системы (X, f).

Отсюда заключаем, что для любых двух точек $y_1, y_2 \in Q$ либо $\overline{\mathrm{Orb}_f(y_1)} \cap \overline{\mathrm{Orb}_f(y_2)} = \varnothing$, либо $\overline{\mathrm{Orb}_f(y_1)} = \overline{\mathrm{Orb}_f(y_2)}$.

Фиксируем $x \in Q$. Для любого $y \in Q$ имеем включения (см. предложение 3.17, пункт (ii)) $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} \subseteq \alpha(y) \cap \omega(y) \subseteq \overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$. Следовательно, $\overline{\mathrm{Orb}_f(x)} = \overline{\mathrm{Orb}_f(y)}$, в частности, $y \in \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Так как Q плотно в X, то $X = \overline{Q} = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$.
$\square$

Следствие 3.15. *Пусть* (Y_1, h_1) *— почти взаимно-однозначное расширение одометра,* $\pi : (Y_1, h_1) \to (Y_2, h_2)$ *— проекция.*

Тогда динамическая система (Y_2, h_2) *является почти взаимно-однозначным расширением одометра.*

Доказательство . Так как отображение $\pi : Y_1 \to Y_2$ сюръективное и непрерывное, то для любого всюду плотного подмножества Q пространства Y_1 его образ $\pi(Q)$ всюду плотен в пространстве Y_2.

Из следствия 3.14 заключаем, что найдется почти периодическая точка $x \in Y_1$, такая что $Y_1 = \overline{\mathrm{Orb}_{h_1}(x)}$. Из леммы 3.12 заключаем, что $\pi(x)$ — почти периодическая точка динамической системы (Y_2, h_2), причем $\overline{\mathrm{Orb}_{h_2}(\pi(x))} = Y_2$ (см. выше).

Снова применяя следствие 3.14, приходим к выводу, что (Y_2, h_2) — почти взаимно-однозначное расширение одометра. $\square$

Следствие 3.16. *Пусть (X, f) — почти взаимно-однозначное расширение одометра, $(A, g) \in \mathcal{A}(X, f)$ и $\pi : (X, f) \to (A, g)$ — проекция.*

Пусть $Q = \{y \in X \mid \pi^{-1}(\pi(y)) = \{y\}\}$.

Если $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, то множество Q совпадает с множеством всех почти периодических точек динамической системы (X, f).

Если $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \neq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$, то $Q = \varnothing$.

Доказательство. Из следствия 3.14 и теоремы Биркгофа заключаем, что динамическая система (X, f) минимальна.

Первая часть нашего утверждения получается из леммы 3.11 и предложения 3.17, пункты (i), (iv) и (v).

Вторая часть следует из предложения 3.17, пункт (iii). $\square$

Следствие 3.17 (см. [13])**.** *Пусть (X, f) — транзитивная динамическая система.*

Динамическая система (X, f) топологически сопряжена с одометром тогда и только тогда, когда каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X, f).

Доказательство. 1. Пусть каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X, f). Так как динамическая система (X, f) транзитивна, то по определению найдется $x \in X$, для которого $X = \overline{\mathrm{Orb}_f(x)}$. Применяя следствие 3.14, заключаем, что (X, f) — почти взаимно-однозначное расширение одометра (в частности, динамическая система (X, f) минимальна по теореме Биркгофа). Воспользуемся леммой 3.11 и найдем $(A,g) \in \mathcal{A}(X,f)$ и проекцию $\pi : (X,f) \to (A,g)$, такую что $\pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$.

Из следствия 3.16 заключаем, что отображение $\pi : X \to A$ взаимно-однозначно. Пространство X компактно, следовательно π — гомеоморфизм и $\pi : (X,f) \to (A,g)$ — изоморфизм в категории $\mathcal{K}_0$.

2. Пусть $(X,f) \in \mathcal{A}$. Пусть $Id : (X,f) \to (X,f)$ — единичный морфизм. Так как отображение $Id : X \to X$ взаимно-однозначно, то из предложения 3.17, пункт (i), заключаем, что каждая точка пространства X является почти периодической точкой динамической системы (X,f). $\square$

Следствие 3.18 (см. [13]). *Пусть динамическая система (A,g) топологически сопряжена с одометром, $\pi : (A,g) \to (X,f)$ — проекция.*

Тогда динамическая система (X,f) топологически сопряжена с одометром.

Доказательство . Динамическая система (A,g) минимальна (см. замечание 3.2), поэтому она транзитивна. Тогда и динамическая система (X,f) транзитивна (см. доказательство следствия 3.15).

Из следствия 3.17 и леммы 3.12 заключаем, что каждая точка пространства X почти периодическая точка динамической системы (X,f).

Для завершения доказательства нам остается еще раз применить следствие 3.17. $\square$

Список литературы

[1] *R. Engelking* General topology — Sigma Series in Pure Math., 6. — Heldermann Verlag, Berlin, 1989. — 529 p.

[2] *Gottshalk W., Hedlund G.* Topological dynamics — AMS Colloq. Publ., — Vol. 36, — AMS, Providence, R. I. — 1955. — 151 p.

[3] *Alekseev, V. M.* Symbolic dynamics. (Russian) — Eleventh Mathematical School (Summer School, Kolomyya, 1973) (Russian). — Kiev: Izdanie Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, 1976. — P. 5–210

[4] *Birkgoff* Dynamical systems — AMS Colloq. Publ. — V. 9, — AMS, Providence, R. I., — 1927

[5] *Виноградов И. М.* Основы теории чисел — М: Наука, 1965. — 172 с.

[6] *Kelley John L.* General topology — D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 1955. — 298 p.

[7] *Christian Skau* Minimal dynamical systems, ordered Bratteli diagrams and associated $\mathbb{C}^*$ – crossed products // Current topics in operator algebras (Nara, 1990). — World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991. — P. 264–280

[8] *Robert Ellis* Distal transformation groups // Pasific Journ. of Math. — 1958 — 8, N 3. — P. 401 – 405

[9] *James G. Glimm* On a certain class of operator algebras // Trans. of AMS — 1960 — 95, N 2. — P. 318 – 340

[10] *G. Barat, T. Downarowicz, A. Iwanik & P. Liardet* Propriétes topologiques et combinatoires des échelles de numération // Colloq. Math. — 2000 — 84/85, part 2. — P. 285-306;

[11] *S. MacLane* Categories for the working mathematician. — Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5., — Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. — 262 p.

[12] *H. Furstenberg* Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory — M. B. Porter Lectures. — Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1981. — 203 p.

[13] *Louis Block, James Keesling* A characterization of adding machine maps (to appear)