Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 443-473

УДК 517.938.5

В. В. Шарко

Институт математики НАН Украины, Киев,
Терещенковская, 3
E-mail: `sharko@imath.kiev.ua, sharko@ukrpack.net`

Гладкие функции на некомпактных поверхностях[1]

Введение.

Пусть N - гладкая поверхность. Обозначим через $C^{\infty}(N)$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций на N. Изучению функций на компактных поверхностях было посвящено немало работ, укажем лишь некоторые из них [2-3,6-10,13,15,18-21]. В случае, если N - некомпактная поверхность, строение функций резко отличается от компактного случая. Например, на каждой некомпактной поверхности существует функция из пространства $C^{\infty}(N)$ без критических точек [4]. В этой работе изучаются некоторые свойства функций из пространства $C^{\infty}(N)$ с изолированными критическими точками на некомпактных поверхностях. В частности, дается необходимое и достаточное условие, когда граф является графом Кронрода-Риба

[1]Работа выполнена в рамках целевой программы НАН Украины "Современные методы иследования математических моделей в задачах природоведения и общественных науках" НИР № 0107U00233

собственной гладкой функции с изолированными критическими точками на компактной или некомпактной поверхности.

1. Распределение особенностей гладких функций и векторных полей на некомпактных поверхностях.

Под гладкой поверхностью N (с краем или без) понимается двумерное сепарабельное, гладкое многообразие. Край гладкой поверхности N, если он присутствует, обозначается через ∂N. Гладкая поверхность может иметь не более чем счетное множество связных компонент края, среди которых могут быть как компактные так и некомпактные компоненты. Очевидно, что компактная компонента края гладкой поверхности диффеоморфна окружности S^1, а некомпактная компонента диффеоморфна числовой прямой R. Если у некомпактной поверхности отсутствует край, то такую поверхность будем называть **открытой**. Слово гладкий всегда будет указывать на принадлежность классу C^∞. В случае, когда минимальное число образующих фундаментальной группы поверхности N, $\pi_1(N)$ - конечно (бесконечно), то поверхность N имеет конечный (бесконечный) род.

Пусть N - некомпактная поверхность, **концом** в N называется убывающая последовательность $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ связных поверхностей с краем в N таких, что :

a) край каждой поверхности M_i является компактным;
b) для каждого ограниченного множества X в N (т.е. когда замыкание X в N является компактом) $M_i \bigcap X = \varnothing$ для достаточно большого i.

Два конца $M_1^1 \supset M_2^1 \supset ...$ и $M_1^2 \supset M_2^2 \supset ...$ называются эквивалентными, если для каждого i найдется такое j, что $M_i^1 \subset M_j^2$ и и наоборот. Через M^* будет обозначаться класс эквивалентности конца представленный последовательностью $M_1 \supset M_2 \supset ...$. По определению **идеальной границей** $i\partial N$ называется топологическое пространство, образованное классами эквивалентности концов. Это компактное подмножество канторового множества. Среди идеальной границы $i\partial N$ имеется замкнутое подмножество непланарных $i\partial N_{np}$ и замкнутое подмножество неориентированных $i\partial N_{no}$ концов. Очевидно, что имеет место включение $i\partial N \supset i\partial N_{np} \supset i\partial N_{no}$. Теорема Каракерьярто-Рихардса утверждает , что две некомпактные поверхности N_1 и N_2 одного и того же рода и класса ориентируемости гомеоморфны тогда и только тогда, когда их идеальные границы $i\partial N_1 \supset i\partial N_{1np} \supset i\partial N_{1no}$ и $i\partial N_2 \supset i\partial N_{2np} \supset i\partial N_{2no}$ - гомеоморфны (как тройки пространств) [16]. Далее, теорема Рихардса утверждает, что для произвольной тройки $(X \supset Y \supset Z)$ замкнутых подпространств канторового множества найдется проверхность N с идеальной границей $(i\partial N \supset i\partial N_{np} \supset i\partial N_{no})$, которая гомеоморфна (как тройка пространств) $(X \supset Y \supset Z)$ [16].

Пусть f - гладкая функция, заданная на поверхности N. Точка $m \in IntN$ называется критической точкой функции f, если все частные производные f в этой точке равны нулю. Предположим, что $m \in IntN$ - изолированная критическая точка функции f. Выберем в окрестности точки m локальную систему координат (x, y), так чтобы точка m имела координаты $(0, 0)$. Известно [15,17], что функцию f из класса $C^\infty(N)$ в окрестности изолированной критической точки m, которая не является локальным экстремумом, **непрерывной** заменой координат можно привести к виду $f = Rez^n + c$ $(n \geq 2)$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m изменяется $(z = x + iy)$. Будем называть ее **существенной критической точкой** или **вырожденностью порядка** n . Либо к виду $f = Rez$, если топологический тип линий уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ при переходе через m не изменяется (т.е. в этом случае от критической точки m можно вообще избавится). Будем называть ее **несущественной критической точкой**. В случае, если точка m - локальный экстремум, то функцию f в окрестности точки m **непрерывной** заменой координат можно привести к виду $f = x^2 + y^2 + c$ или к виду $f = -x^2 - y^2 + c$.

Рассмотрим в окрестности нуля U плоскости R^2 с координатами (x, y) функцию $f = Rez^n + c$ $(n \geq 2$, $z = x + iy)$. Очевидно, что линия уровня $\Gamma = f^{-1}(c)$ функции f в окрестности U содержит критическую точку o и состоит из $2n$ интервалов, пересекающихся в точке o или, как мы будем в дальнейшем говорить, $2n$ ребер, выходящих из одной вершины. Каждая соседняя пара ребер образует сектор, во внутренности которого функция f принимает значение больше c или меньше c. Будем называть в дальнейшем белый или черный сектор. Таким образом, в U будет $2n$, последовательно чередующихся, белых и черных секторов (т.е. образовывает цветной спин см. определение 2.1).

Когда $n = 2$, то такая критическая точка называется невырожденной. Гладкая функция f на поверхности N называется функцией Морса, если все ее критические точки - невырожденые, т.е. для каждой критической точки существует окрестность, в которой f имеет вид невырожденной квадратичной формы. Число минусов этой квадратичной формы называется индексом критической точки [12,17].

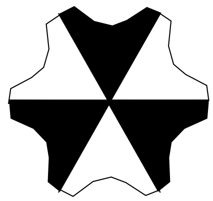

Рис. 1. Цветной спин в окрестности критической точки функции $f = Rez^n + c$ $(n = 3)$.

Известно [12,17], что вырожденную критическую точку функции f можно путем малых возмущений функции f превращать в объединение конечного числа невырожденных критических точек (распад вырожденной особенности). В случае функции $f = Rez^n$ $(n > 2)$ малое возмущение можно выбрать так : $f_1 = Re(z - \varepsilon_1)...(z - \varepsilon_n)$, где действительные числа $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ при $i \neq j$. Вырожденная особенность порядка n распалась в объединение $n - 1$ невырожденных критических точек индекса 1.

Наоборот, пусть в окрестности нуля U плоскости R^2 с координтами (x, y) задана функция Морса $f = f(x, y)$ у которой в точности $n - 1$ критических точек $m_1, ..., m_{n-1}$ индекса 1 таких, что $f(m_i) = 0$ для $i = 1, ..., n - 1$. Тогда в окрестности U найдется путь l гомеоморфный отрезку, который содержит начало координат вместе с критическими точками $m_1, ..., m_{n-1}$ и гладкое отображение $h : U \to U$, такое что $h(l) = 0, h = Id$ вне некоторой ε-окрестности $V \subset U$ пути l, так что функция $g = f \circ h^{-1}$ топологически эквивалентна в U функции Rez^n.

Поведение гладких функций на некомпактных поверхностях существенно отличается от поведения гладких функций на компактных поверхностях. К примеру, на компактных поверхностях гладкие функции всегда имеют критические точки.

Лемма 1.1. *На открытой поверхности N существует гладкая функция с любым конечным (включая пустое) или бесконечным множеством $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных критических точек, имеющих вырожденности любых порядков.*

Доказательство. Пусть $(\omega_1, ..., \omega_n, ...)$ - последовательность неотрицательных целых чисел, являющихся порядками вырожденностей особенностей $(m_1, ..., m_n, ...)$. Представим поверхность $N = \bigcup_i N_i$ в виде объединения возрастающей последовательности связных компактных поверхностей с краем N_i так, что $... \subset N_i \subset IntN_{i+1} \subset ...$ $(i = 1, 2, ...)$. Замыкание множества $K_i = N_{i+1} \setminus N_i$ является поверхностью с краем. Зададим на N_1 функцию Морса $f_1 : N_1 \to [0, 1]$, такую что $f^{-1}(1) = \partial N_1$ и имеющую критические точки с помощью, которых можно сконструировать особенность порядка ω_1. Заменим функцию f_1 на гладкую функцию $g_1 : N_1 \to [0, 1]$ такую что $g_1^{-1}(1) = \partial N_1$ и имеющую особенность порядка ω_1 в $IntN_1$. Затем продолжим функцию g_1 с N_1 до гладкой функции на N_2 $f_2 : N_2 \to [0, 2]$ такой, что сужение f_2 на поверхность K_1 есть функция Морса со следующими свойствами:

a) $f_2^{-1}(1) = \partial N_1,\ f_2^{-1}(2) = \partial N_2$;
b) имеет критические точки тех индексов с помощью, которых можно сконструировать особенность порядка ω_2 в $IntK_1$.

Заменим функцию f_2 на гладкую функцию $g_2 : N_2 \to [0, 2]$ такую, что :

a) $g_2 = g_1$ на N_1, $g_2^{-1}(2) = \partial N_2$;

b) имеет особенность порядка ω_2 в $IntK_1$.

Повторим эту конструкцию с поверхностью N_3 и т.д.. После счетного числа шагов построим гладкую функцию g_∞ на поверхности N, у которой имеется конечное или бесконечное подмножество $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных критических точек с вырождениями порядка $(\omega_1, ..., \omega_n, ...)$.

Рассмотрим триангуляцию τ поверхности N. Пусть N^1 - ее одномерный остов и $U(N^1)$ - его регулярная окрестность. С помощью диффеоморфизма $H : N \longrightarrow N$, изотопного тождественному, добьемся, чтобы критические точки из подмножества Ω попали на N^1, а остальные критические точки лежали вне $U(N^1)$. Рассмотрим функцию $g = g_\infty \circ H^{-1}$. По теореме Уайтхеда [22] существует гладкое вложение $\varphi : N \longrightarrow U(N^1)$. Взяв ограничение функции g на $\varphi(N)$, получим искомую функцию. $\square$

Рассмотрим векторные поля на гладких поверхностях с изолированными нулями. Для компактной поверхности N теорема Пуанкаре устанавливает взаимосвязь между числом и индексами изолированных нулей векторного поля V на N и эйлеровой характеристикой поверхности N. Другими словами, множество изолированых нулей векторного поля V на поверхности N не может быть произвольным. По этому поводу см.[5]. Для некомпактных поверхностей имеет место следующая лемма.

Лемма 1.2. *На открытой поверхности N существует гладкое векторное поле с любым конечным или бесконечным множеством $\Omega = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных нулей, имеющих любые значения индексов из совокупности* $0, \pm 1, \pm 2, ...$

Доказательство. Индекс изолированного нуля градиентного векторного поля $grad(f)$ на поверхности N может принимать только значения $1, 0, -1, -2, ...$ [5]. Изолированный нуль индекса λ, где $\lambda = 2, 3, ...$ можно добавить, путем изменения вектореного поля $grad(f)$ только в окрестности U источника (т.е. особенности векторного поля с индексом равным 1) на векторное поле V, имеющее в этой окрестности U следующие особенности:

a) один нуль индекса λ;
b) $(\lambda - 1)$ нулей индекса 1;
c) $(2\lambda - 2)$ нулей индекса -1.

На рисунке 2 представлен случай, когда $\lambda = 3$.

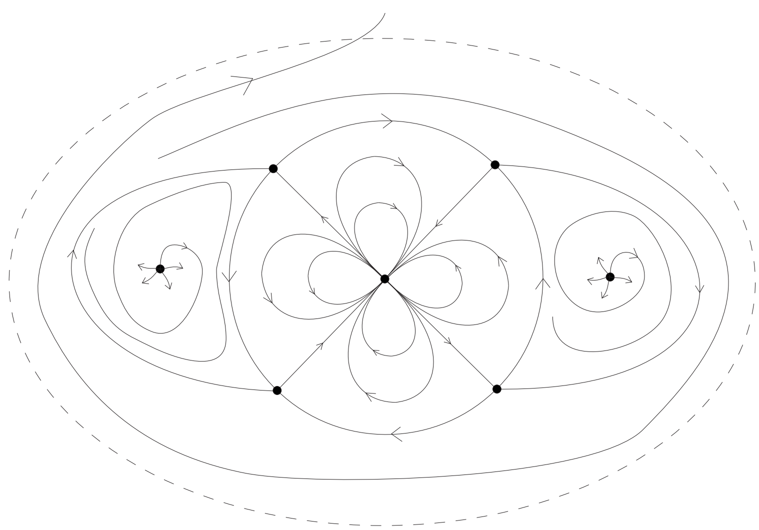

Рис. 2

Используя предыдущую конструкцию, построим гладкую функцию f на поверхности N, градиентное векторное поле которой, $grad(f)$ имеет необходимое подмножество

$\Omega_1 = (m_1, ..., m_n, ...)$ изолированных нулей со значениями индексов $1, 0, -1, -2, ...$ Понятно, что локальных минимумов у функции f должно быть "больше чтобы у векторного поля $grad(f)$ хватило нулей индекса 1 для построения особенностей положительных индексов больших единицы. Заменим теперь вектореное поле $grad(f)$ в окрестностях нулей индекса 1 на вектореное поле V, имеющее в этих окрестностях изолированные нули нужных положительных индексов. Теперь будем действовать по описанной в лемме 1 схеме. Пусть N^1 - одномерный остов триангуляции τ поверхности N и $U(N^1)$ - его регулярная окрестность. С помощью диффеоморфизма $H : N \longrightarrow N$, изотопного тождественному, добьемся, чтобы изолированные нули нужных индексов вектореного поля V попали на N^1, а остальные нули лежали вне $U(N^1)$. Рассмотрим вектореное поле $W = H(V)$. По теореме Уайтхеда [22] найдем гладкое вложение $\varphi : N \longrightarrow U(N^1)$. Взяв ограничение вектореного поля W на $\varphi(N)$, получим искомое вектореное поле.

$\square$

Гладкая функция на поверхности называется собственной, если каждая ее линия уровня - компактное множество. Очевидно, что на открытой поверхности N отличной от $S^1 x R^1$ у собственной гладкой функции, заданной на N всегда имеются критические точки.

Лемма 1.3. *На открытой поверхности N существует гладкая собственная функция $f : N \to R$ с изолированными критическими точками не являющимися локальными экстремумами.*

Доказательство. Известно, что открытая поверхность N имеет каноническое представление в смысле Рихардса [16]. А имеенно: поверхность N диффеоморфна сфере S^2

с выброшенным замкнутым, вполне разрывным, сепарабельным множеством X и вклеенным конечным или счетным числом ручек (листов Мебиуса) в ориентированном (неориентированном) случае, которые сходятся к X. Выберем на сфере S^2 (т.е. на поверхности N) окружность S^1 и рассмотрим $N \setminus S^1$. Понятно, что окружность S^1 разбивает поверхности N на две несвязные части, замыкание которых обозначим через N_1 и N_2. Окружность можно выбрать так, чтобы в некоторой ее окрестности не содержались концы поверхности N а обе части N_1 и N_2 содержали и ручки (листы Мебиуса) и концы. Очевидно что краем у N_1 (N_2) будет окружность. Пусть Y_i (Y_j) - исчерпание N_1 (N_2), компактными поверхностями, начиная с воротника края. Легко построить, исходя из Y_i (Y_j) на N_1 (N_2), собственные гладкие функции $f_1 : N_1 \longrightarrow [0, \infty)$ ($f_2 : N_2 \longrightarrow [0, -\infty)$) с изолированными критическими точками не являющимися локальными экстремумами (функции Морса например). Положив $f = -f_2 \bigcup f_1$, получим искомую гладкую собственную функцию с изолированными критическими точками, которые не являются локальными экстремумами. $\square$

2. Цветные спин-графы и атомы гладких функций на поверхностях.

Под графом (V, E) будем понимать клеточный одномерный комплекс, где (V) - нульмерные клетки (вершины), (E) - одномерные клетки (ребра) [11,14]. В дальнейшем мы будем рассматривать и графы со счетным множеством вершин и ребер и с петлями, т.е. когда начало и конец одного и того же ребра принадлежат одной и той же вершине.

Определение 2.1. *Пусть граф Δ, состоит из $2n$ ребер a_i, которые соединяют вершину x с $2n$ вершинами y_i. Цветным спином в вершине x (обозначается $\lessdot x$) называется циклический порядок $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{2n}}, a_{i_1})$ на ребрах a_i с указанием черного или белого цвета $\mathrm{col}(a_{i_k}, a_{i_{k+1}})$ на соседних ребрах, удовлетворяющий следующим условиям:*

a) *каждое ребро a_i, образовывает только одну белую и только одну черную пару в точности с двумя разными соседними ребрами a_{i-1} и a_{i+1} ;*
b) *последовательность пар $\mathrm{col}(a_{i_1}, a_{i_2}), \mathrm{col}(a_{i_2}, a_{i_3}), \ldots,$ $col(a_{i_{2n}}, a_{i_1})$ является цветочередующайся [20].*

Пусть Δ_1 и Δ_2 - графы у которых по $2n$ ребер a_i^1 и a_i^2 соответственно. Ребра a_i^1 (a_i^2) соединяют вершину x^1 (x^2) с $2n$ вершинами y_i^1 (y_i^2). Предположим, что в вершинах x^1 и x^2 заданы цветные спины $\lessdot x^1$ и $\lessdot x^2$. Изоморфизм между графами $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_1$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер графа Δ_1 с белым (черным) цветом переходит в пару ребер графа Δ_2 с белым (черным) цветом.

Замечание 2.1. *Очевидно, что граф Δ с $2n$ ребрами и цветным спином в вершине $\lessdot x$ можно вложить в окрестность U критической точки о, функции Rez^n, так чтобы его образ лежал на $\Gamma = f^{-1}(0) \cap U$ и это вложение сохраняло цветные спины в вершины в точке о. Другими словами, граф Δ можно не только расширить до диска, но и задать на расширении функцию Rez^n.*

Определение 2.2. *Пусть у графа Δ порядок каждой вершины четный и больше двух. Цветным спином графа Δ называется задание цветного спина в каждой его вершине. Граф Δ с заданным на нем цветным спином называется цветным спин-графом и обозначать $\lessdot\Delta$.*

В дальнейшем, если задан цветной спин-граф $\lessdot\Delta$, то цветной спин, который есть в вершине x, будем обозначать через $\lessdot\Delta(x)$. Ясно, что на одном и том же графе можно различными способами задать цветной спин.

Определение 2.3. *Пусть $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$ - два цветных спин-графа. Изоморфизм графов φ: $\lessdot\Delta_1 \to \lessdot\Delta_2$ сохраняет цветные спины, если каждая пара ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot\Delta_1(x_i)$ в вершине x_i, переходит в пару ребер с белым (черным) цветом цветного спина $\lessdot \Delta_2\ \varphi\ (x_i)$ в вершине $\varphi(x_i)$.*

Рассмотрим функцию $f \in C^\infty(N)$ на поверхности N и пусть c - ее критическое значение. Предположим, что компонента связности Γ из линии уровня $f^{-1}(c)$ содержит только изолированные критические точки не являющимися экстремумами. Компонента Γ является образом вложенного в поверхность N графа, у которого порядок каждой вершины четный. Вершинами вложенного графа являются критические точки функции f. Если рассмотреть непересекающиеся окрестности существенных критических точек, лежащих на Γ, то в каждой из них, исходя из функции f, возникает цветной спин. Следовательно Γ получает структуру цветного спин-графа.

Определение 2.4. *Компонента связности Γ линии уровня $f^{-1}(c)$ функции f из пространства $f \in C^\infty(N)$, содержащей только изолированные критические точки не являющимися экстремумами, с заданной на ней цветным спином в каждой существенной критической точке, исходя из функции f, называется атомом критического значения c функции f. В дальнейшем атом обозначается через $A(f, c)$.*

Замечание 2.2. *Если прообраз критического значения функции f состоит из k связных компонент, на которых находятся только изолированные критические точки, то имеется k атомов этого критического значения.*

В дальнейшем, если говорится об **изоморфизме** атомов критических значений, то понимается изоморфизм, который сохраняет цветные спины, заданные на них.

Циклом (ориентированным) на ориентированном графе Δ называется совокупность ребер (ориентированных) из Δ, которые образуют гомеоморфный образ окружности (ориентированной). Некомпакатным циклом (ориентированным)на ориентированном графе Δ называется бесконечная совокупность ребер (ориентированных) из Δ, которые образуют гомеоморфный образ прямой (ориентированной). Пусть $\lessdot\Delta$ - цветной спин-граф. Определим на нем два типа циклов (некомпакатных циклов): b-циклы (b-некомпакатные циклы) и w-циклы (w-некомпакатные циклы).

Определение 2.5. *b-циклом (w - циклом) на цветном спин-графе $\lessdot\Delta$ называется цикл, состоящий из ребер $(a_1, a_2, ..., a_n)$, таких что $a_i \cap a_{i+1} = x_i$ – есть вершина и пара ребер (a_i, a_{i+1}) являются черного (белого) цвета цветного спина $\lessdot\Delta(x_i)$ в вершине x_i. b-некомпакатные циклы (w-некомпакатные циклы)определяются аналогично, за исключением того, что проследовательность вершин $(a_1, a_2, ...$ является бесконечной.*

Очевидно, что изоморфизм между цветными спин- графами $\lessdot\Delta_1$ и $\lessdot\Delta_2$, сохраняющий цветные спины, переводит b-циклы (w-циклы) из $\lessdot\Delta_1$ в b-циклы (w-циклы) $\lessdot\Delta_2$. Это имеет место и для
b-некомпакатных (w-некомпакатных) циклов.

Лемма 2.1. *Пусть задан цветной спин-граф* $\lessdot\Delta$ *(конечный или бесконечный), у которого вершины* $a_1, a_2, ...$ *имеют порядок* $2d_1, 2d_2, ...,$ *больший двух. Предположим, что у него* s *(*s *может равнятся* ∞*)* b*-циклов,* t *(*t *может равнятся* ∞*)* w*-циклов,* u *(*u *может равнятся* ∞*)* b*-некомпактных циклов и* v *(*v *может равнятся* ∞*)* w*-некомпактных циклов. Существует поверхность* N *с краем* $\partial N = \partial_- N \bigcup \partial_+ N$ *и гладкая функция* $f : N \to R^1$*, имеющая изолированные критические точки, находящиеся в биекции с вершинами* $a_1, a_2, ...,$ *в окрестностях, которых она имеет вид* Rez^{d_i}*. Число компактных компонент связности края* ∂N*, входящих в* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *равно* s (t)*. Число некомпактных компонент связности края* ∂N*, входящих в* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *равно* u (v)*. На компонентах* $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ *функция* f *принимает значение* -1 (1) *и все ее критические точки лежат на линии уровня* $\Gamma = f^{-1}(0)$*. Граф* $\Gamma = f^{-1}(0)$ *снабженный цветным спином, исходя из функции* f *и цветной спин-граф* $\lessdot\Delta$ *изоморфны с сохранением цветных спинов. В дальнейшем поверхность* N *называется* ***расширением*** *цветного спин-графа* $\lessdot\Delta$*.*

Доказательство. В начале построим поверхность N с краем ∂N. Пусть $D(\varepsilon) = (x, y)$: $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2 - \varepsilon$-окрестность нуля на плоскости R^2, в которой заданы функции $g_i = Re(x + iy)^{d_i}$ $(i = 1, 2, ...)$. Рассмотрим пересечение множеств $D(\varepsilon)$ и $\Phi = (x, y) : -\delta \leq Re(x + iy)^{d_i} \leq \delta$, которые обозначим через Cr_i. Граница множества Cr_i состоит из 2 d_i дуг окружности $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ и 2 d_i кусков линий уровня функции $Re(x + iy)^{d_i} = \pm\delta$. В силу замечания 2.1 существует вложение φ окрестности каждой вершины графа Δ в линию уровня функции g_i, содержащую критическую точку, которое сохраняет цветные спины. Возьмем несвязное объединение счетного числа экземпляров множества

Cr_i и вложим в них окрестности вершин графа Δ, используя вложение φ. Выберем счетное множество полосок Υ_i, которые будем подклеивать к множествам Cr_i. На каждом экземпляре множества Cr_i задана функция g_i, которую мы используем для подклейки нужным образом к ним полосок Υ_i. А именно: вдоль каждого ребра графа Δ склеим меньшие стороны полоски Υ_{i_0} с соответствующими дугами a^i двух (или одного) экземпляров множеств Cr_i. Подклейку полосок надо производить таким образом, чтобы функции g_i с каждого экземпляра множества Cr_i продолжались во внутрь полосок Υ_i без критических точек. В результате мы получили поверхность N_1 с заданной на ней функцией f_1. По построению, множество компонент края $\partial_- N$ $(\partial_+ N)$ поверхности N_1, которые состоят из длинных сторон полосок и кусков линий уровня $Re(x+iy)^{d_i} = \pm\delta$ соответствуют b-циклам (w-циклам), на которых функция f_1 принимает отрицательные (положительные) значения находится в биекции с множеством b-циклов (w-циклов) компактных и некомпактных графа Δ. Подклеив к каждой компоненте края поверхности N_1 воротники и продолжив на них функцию f_1, мы получим искомые поверхность N и функцию f на ней. Тот факт, что граф $\Gamma = f^{-1}(0)$ снабженный цветным спином, исходя из функции f, и цветной спин-граф $\lessdot\Delta$ изоморфны с сохранением цветных спинов следует способа построения поверхности N и функцию f. $\square$

Поверхность N_1, построенная при доказательстве леммы 2.1 называется **замкнутой** ε-окрестностью атома функции f. Ясно, что выбор цветного спина на графе может менять топологический тип его расширения. Очевидно, что на конечном графе можно задать только **конечное число** различных (не изоморфных) цветных спинов. Следующая лемма имеется в [20].

Лемма 2.2. *Существует конечное число попарно не изоморфных (как графов) конечных графов Δ_i с заданными на них цветными спинами, расширения которых - гомеоморфные поверхности.*

Для бесконечных графов ситуация более сложная. Так например, утолщение любого бесконечного дерева с четным порядком вершин является некомпактной поверхностью с краем, которая гомеоморфна единичному кругу D^2 с удаленным канторовым множеством с граничной окружности ∂D^2. Ситуацию, связанную с утолщением бесконечных графов с четным порядком вершин больщих двух, мы проанализируем в другой работе.

3. Графы Кронрода-Риба собственных гладких функций на некомпактных поверхностях.

Пусть f - собственная гладкая функция с изолированными критическими на поверхности N. Мы предполагаем, что все критические точки f лежат во внутренности поверхности N и на связных компоентах края N функция f принимает постоянные значения. Рассмотрим произвольную компоненту связности линии уровня $f^{-1}(a)$, функции f, которую часто называют слоем. Если a - регулярное значение функции f, то слоем будет гладко вложенная в поверхность N окружность. В случае, когда a - критическое значение, то слоем будет замкнутое множество гомеоморфное либо окружности, либо конечному графу, у которого четный порядок вершин больший двух [2]. Если рассмотреть все слои функции f, то получим разбиения поверхности N в объединение слоев т.е. на N возникает слоение с особенностями. Принадлежность точки поверхности слою является отношением эквивалентности и вводя естественную фактор-топологию в множество слоев получаем фактор-множество. Это фактор-множество будет конечным или бесконечным графом, которое будет обозначаться через $\Gamma_{K-R}(f)$.

Определение 3.1. *Граф* $\Gamma_{K-R}(f)$ *называется графом Кронрода-Риба для функции* f*.*

По поводу этого определения см.[2,6,19]. Вершинам графа $\Gamma_{K-R}(f)$ соответствуют связные компоненты линий уровня, на которых находятся критические точки функции. Вершины порядка 1 соответствуют локальным экстремумам функции f. Если присутствуют вершины порядка два, то поверхность N - неориентируема. Очевидно, что функции f каноническим образом задает функцию f_{K-R} на ее графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$. Значение f_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(f)$ равно значению f на соответствующей x компоненте связности линии уровня.

Определение 3.2. *Функция* f_{K-R}*, заданная на графе Кронрода-Риба* $\Gamma_{K-R}(f)$*, называется* $K-R$ *образом функции* f*, заданной на поверхности* N*.*

Замечание 3.1. *Часто достаточно знать значение функции* f_{K-R} *только в вершинах графа Кронрода-Риба* $\Gamma_{K-R}(f)$ *функции* f*. И поэтому, именно это иногда понимают под* ***K-R образом функции*** f *[20]. В некоторых вопросах необходимо вводить структуру метрического пространства на графе Кронрода-Риба* $\Gamma_{K-R}(f)$ *функции* f *и рассматривать функцию* f_{K-R} *на всем* $\Gamma_{K-R}(f)$*.*

Граф Кронрода-Риба допускает **ориентацию**, т.е. расстановку стрелок на ребрах, которые указывают направление в котором функция f_{K-R} возрастает.

Заметим, что не всякий конечный (или бесконечный) граф, будет графом Кронрода-Риба для некоторой собственной гладкой функции с изолированными критическими точками на поверхности. Ориентированный граф $\Gamma(N)$, для которого существует поверхность N и гладкая собственная функция с изолированными критическими точками f на ней, такая что ее граф Кронрода-Риба f_{K-R} изоморфен с сохранением ориентации графу Γ называется **K-R графом.** Ниже мы обсудим более подробно этот вопрос.

Определение 3.3. *Пусть на гладкой поверхности N заданы две собственные гладкие функции с изолированными критическими точками f и g, а f_{K-R} и g_{K-R} на графах $\Gamma_{K-R}(f)$ и $\Gamma_{K-R}(g)$. Скажем, что f и g K-R эквивалентны, если их K-R образы f_{K-R} и g_{K-R} эквивалентны, т.е. существует изоморфизм $s : \Gamma_{K-R}(f) \to \Gamma_{K-R}(g)$ и гомеоморфизм $t : R^1 \to R^1$ такие, что $t \cdot f_{K-R} \cdot s^{-1} = g_{K-R}$.*

Несложно доказать, что если две собственные гладкие функции с изолированными критическими точками f и g, которые заданы на поверхности N являются топологически эквивалентными, то f и g будут K-R эквивалентны. Однако обратное утверждение неверно.

С каждым атомом $A(f,c)$ критического c значения гладкой функции f можно связать его граф Кронрода-Риба $K - R(A(f,c)$. А именно, надо рассмотреть сужение $f|_U$ функции f на замкнутую ε-окрестность U атома $A(f,c)$ и построить граф Кронрода-Риба для $f|_U$. Он представляет собой два набора a_i и b_j ребер, выходящих из вершины. Набор ребер a_i (b_j) соответствует b-циклам (w-циклам) атома $A(f,c)$. Имеется **каноническое вложение** открытого графа (вершины порядка один удалены) Кронрода-Риба

$K-R(A(f,c))$ каждого атома $A(f,c)$ в граф Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ функции f. Существуют простейшие атомы для графа Кронрода-Риба с данным набором ребер a_i и b_j $(i=1,2,...k, j=1,2...,l)$. В ориентированнм случае это будет цветной спин-граф $O(k,l$, утолщение, которого сфера с выброшенными $k+l$ открытыми дисками. В неориентированном случае это цветной спин-граф $NO(k,l$ утолщение, которого склейка листа Мебиуса с выброшенным открытым диском и $O(k-1,l-1)$ [19]. Эти атомы мы используем для построения поверхностей и гладких функций с изолированными особенностями на них с данным графом Кронрода-Риба. Если некоторые атомы функции f таковы, что их утолщения - неориентированные поверхности, то на ее графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$, соответствующую вершину будем обозначать звездочкой $*$.

Заметим, что для графов имеются аналоги понятия конца и пространства концов.

Лемма 3.1. *Каждое замкнутое подмножество X канторового множества является множеством концов некоторого $K-R$ графа.*

Доказательство. По теореме Рихардса существует открытая поверхность N, у которой множество концов гомеоморфно X. Построим на N собственную функцию с изолированными особенностями (например функцию Морса) f, тогда ее граф Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(f)$ будет удовлетворять условию леммы. Действительно, существует вложение $i:\Gamma_{K-R}(f)\longrightarrow N$, такое что $f\cdot i=Id$. Если убывающая последовательность $M_1\supset M_2\supset ...$ связных поверхностей с краем в N задает конец в N, то $M_1\bigcap i(\Gamma_{K-R}(f))\supset M_2\bigcap i(\Gamma_{K-R}(f))\supset ...$ задает конец в $i(\Gamma_{K-R}(f))$ и следовательно в $\Gamma_{K-R}(f)$. □

4. Функции на графах.

В этом разделе, как правило, возникающие графы связаны с функциями на поверхностях, поэтому наложим на них некоторые ограничения, которые естественно возникают. Пусть v - вершина графа Γ. Граф $\Gamma_v = \Gamma - v$ получается из графа Γ в результате удаления вершины v и всех инцедентных ей ребер. Вершина v называется разбивающей, если граф Γ_v - несвязное множество. Обозначим через Ω - множество вершин порядка 1 в графе Γ.

Определение 4.1. *Граф* Γ *удовлетворяет условию* (f), *если:*

a) Γ- *связное множество;*
b) *Для каждой разбивающей вершины* v *из* Γ, *такой что, если среди компонент связности графа* Γ_v *присутствуют конечные графы* Γ_v^i *,то* $\Gamma_v^i \bigcap \Omega \neq \varnothing$*;*
c) *Если граф* Γ *- конечен, то* Ω *состоит не менее из двух вершин.*

На рисунке 3 представлен граф, который не удовлетворяет условию (f)

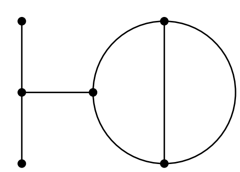

Рис. 1. Граф, который не является K-R графом

Для бесконечных графов выполнение последнего условия не обязательно. Обычно мы будем рассматривать ориентированные графы, т.е. графы с указанием направлений на ребрах (в дальнейшем орграфы).

Определение 4.2. *Орграф* Γ *с условием* (f)*- это задание направлений на ребрах орграфа* Γ *так,чтобы имели место следующие свойства :*

а) *Если орграф* Γ *конечен, то на ребрах инцидентных вершинам порядка 1 имелись направления, входящие в вершину порядка 1, и направления, выходящие из вершины порядка 1;*

в) *На ребрах инцидентных произвольной вершине* (a) *порядка* n $(n \geq 2)$*, имелись оба типа направлений, входящих и выходящих из* (a)*;*

с) *В* Γ *отсутствуют ориентированные замкнутые циклы.*

Под ориентированным циклом на орграфе Γ понимается совокупность ориентированных ребер из Γ, которые образуют гомеоморфный образ ориентированной окружности. Будем говорить, что два орграфа изоморфны, если существует изоморфизм между ними, сохраняющий ориентацию ребер. Очевидно, что на одном и том же орграфе можно указать такие ориентации, что полученные орграфы будут не изоморфными. Возникает естественный вопрос: *на каждом ли графе с условием* (f) *можно задать ориентацию, так, чтобы он стал орграфом с условием* (f)? Оказывается, что в этом круге вопросов полезно рассматривать монотонные функции на графах.

Определение 4.3. *Пусть* $g : \Gamma \to R$ *- непрерывная функция на графе* Γ*. Скажем, что* g *- монототонная на* Γ*, если:*

а) *сужение g на ребрах - строго монотонная функция;*
в) *локальные экстремумы g находятся на вершинах порядка 1.*

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть $g : \Gamma \to R$ - монотонная функция на связном графе Γ. Тогда Γ имеет структуру оргафа с условием (f).*

Доказательство. Для определенности предположим, что g - монотонно возрастающая функция. Если граф конечен, то он имеет по крайней мере один максимум и один минимум в вершинах порядка один. Условие на разбивающие вершины также выполняется. Ориентация на ребрах задается указанием направления роста функции. Ясно, что так введенная ориентация превращает граф Γ в оргаф с условием (f). $\square$

В дальнейшем нам понадобится специальный класс монотонных функций на графах,так называемых, функций высоты. Предположим, что в R^3 задана декартова система координат (x, y, z).

Определение 4.4. *Пусть граф Γ вложен в R^3 так, что его проекция π на ось (o, z) является монотонной функцией на Γ. Тогда функция π называется функцией высоты.*

Лемма 4.2. *Предположим, что $g : \Gamma \to R$ - монотонная функция на графе Γ. Тогда существует вложение $\phi : \Gamma \to R^3$ такое, что $\pi \circ \phi = g$.*

Доказательство. Занумеруем произвольным образом вершины v_i графа Γ. Зададим отображение ϕ на вершинах графа Γ положив $\phi(v_i) = (i, i+1, g(v_i))$. Соединим соответствующие пары вершин $\phi(v_i)$, гладко вложенными, непересекающимися по внутренним точкам, отрезками, которые диффомеоморфно отображаются на ось (o, z) посредством проекции π. Продолжим очевидным образом вложение ϕ с вершин графа Γ на его ребра так, чтобы выполнялось равенство $\pi \circ \phi = g$. $\square$

Таким образом, произвольную монотонную функцию заданную на графе, можно представлять, как функцию высоты для графа расположенного в R^3. Оказывается,что на произвольном орграфе, удовлетворяющим условию (f) всегда существует монотонная функция.

Напомним, что под ориентированным путем на орграфе Γ понимается совокупность ориентированных ребер из Γ, которые образуют гомеоморфный образ ориентированного отрезка. Длинной ориентированного пути на орграфе Γ называется число ребер из которых он состоит.

Для полноты изложения, приведем доказательство следующей теоремы, которая имеется в [19].

Теорема 4.1. *Пусть* Γ *- орграф с условием* (f). *Тогда на* Γ *существует возрастающая (убывающая) функция* $g : \Gamma \to R$.

Доказательство. Для определенности построим на орграфе Γ возрастающую функцию g. Рассуждения будут носить индуктивный характер. Занумеруем произвольным образом вершины (v_i) в орграфе Γ. Выберем первую вершину v_1 из Γ и положим $g(v_1) = 1$. Рассмотрим вторую вершину v_2. Если в Γ не существует ориентированного пути s, соединяющего вершины v_1 и v_2, тогда положим $g(v_2) = 1$. Если же в Γ имеется ориентированный путь s, соединяющий эти вершины, в этом случае положим $g(v_2) = 2$,

$(g(v_2) = 0)$, если вершина v_2 - конец (начало) пути s. Предположим , что мы задали значение функции g на вершинах v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Выберем вершину v_k в орграфе Г. Имеется четыре возможности для соединения вершины v_k с вершинами v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$ в орграфе Г.

a) вершина v_k не соеденена в Γ с вершинами v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$ ориентированным путем;
в) в Γ существует ориентированный путь s, с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1$, с концом в вершине $v_{i_1}(1 \leq i_1 \leq k-1$ и содержащий вершину v_k;
c) в Γ существует только ориентированный путь s с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$ и концом в вершине v_k (нет в Γ ориентированного пути с началом в вершине v_k и концом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1))$;
d) в Γ существует только ориентированный путь s с началом в вершине v_k и концом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1)$ (нет в Γ ориентированного пути с началом в вершине $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1))$ и концом в вершине v_k.

В случае а) положим $g(v_k) = 1$. Рассмотрим случай в). Выберем в Γ ориентированный путь s, который удовлетворяет условиям :

a) началом пути s служит вершина $v_{i_0}(1 \leq i_0 \leq k-1$, на которой функция g принимает максимальное значение $g(v_{i_0}) = a_{i_0}$, по отношению к остальным вершинам из v_i
$(i = 1, 2, ..., k-1)$, являющимися началами ориентированных путей в Γ, идущих в вершину v_k;

b) концом пути s служит вершина $v_{i_1}(1 \leq i_1 \leq k-1$, на которой функция g принимает минимальное значение $g(v_{i_0}) = b_{i_0}$, по отношению к остальным вершинам из v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$, которые являются концами ориентированных путей в Γ, идущих из вершины v_k.

В этом случае положим $g(v_k) = a_{i_0} + 1/2(b_{i_0} - a_{i_0})$. Рассмотрим случай с). Пусть c_k - максимальное значение, которое принимает функция g на множестве вершин v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Положим $g(v_k) = c_k + 1$. В последнем случае поступим аналогично. Пусть d_k - минимальное значение, которое принимает функция g на множестве вершин v_i $(i = 1, 2, ..., k-1)$. Положим $g(v_k) = d_k - 1$. Индуктивный шаг сделан. Покажем, что так построенная на вершинах орграфа Γ функция g, может быть продолжена на ребра до строго возрастающей функции на орграфе Γ. Выберем произвольное ориентированное ребро e с началом в вершине v_i и концом в вершине v_j. Предположим, что $i < j$ $(i > j)$. Тогда при построении функции g первой встретится вершина v_i (v_j) на которой будет задано значение g. В силу способа построения функции g, значение g на вершине v_j (v_i) будет большим(меьшим) чем значение g на вершине v_i (v_j). Следовательно, функцию g можно корректно продолжить с вершин орграфа Γ на его ребра. Тот факт, что у функции g не будет локальных экстремумов на вершинах порядка больших чем 1 вытекает из того, что этим вершинам инцидентны входящие и выходящие ребра. Таким образом в итоге мы имеем возрастающую функцию. $\square$

Замечание 4.1. *Заметим, что так построенная функция g, может принимать одно и тоже значение на бесконечном множестве вершин. Несложно подправить способ построения функции g, так чтобы она принимала на вершинах разные значения. А именно: в случае a) надо положить $g(v_k) = 1 + 1/p_k$, где p_k - возрастающая последовательность простых чисел. В случае b) надо положить*

$$g(v_k) = a_{i_0} + 1/2(b_{i_0} - a_{i_0}) + \varepsilon_k,$$

где число ε_k подобрано таким образом, чтобы значение функции g на вершине v_k отличалось от значения g на предыдущих вершинах. Аналогичным образом надо поступать в оставшихся случаях.

Таким образом имеет место утверждение.

Обобщение 4.1. *Пусть Γ - орграф с условием (f). Тогда на Γ существует возрастающая (убывающей) функция, принимающая на вершинах различные значения.*

Лемма 4.3. *Каждый бесконечный граф без разбивающих вершин содержит путь гомеоморфный R^1.*

Доказательство. Напомним, что звездой вершины называется все ребра ей инцедентные. Выберем произвольную вершину v графа и рассмотрим ее звезду без кратных ребер. Полученная совокупность ребер A_1 соединяет набор вершин $v_1, v^2, ..., v_k$ с вершиной v. Выберем вершину v_1 и рассмотрим только те ребра из ее звезды, которые соединяют в графе вершины отличные от $v, v^2, ..., v_k$. Заметим, что может случится, что таких ребер нет. Добавим это множество ребер к множеству A_1 и обозначим полученное множество через A_2. Это множество ребер соединяет новые вершины $w_1, w_2, ..., w_l$. с вершинами $v, v_1, v^2, ..., v_k$. Опять выберем вершину v_2, рассмотрим только те ребра из ее звезды, которые соединяют в графе вершины отличные от $v, v_1, v^3, ..., v_k, w_1, w_2, ..., w_l$. Может случится снова, что таких ребер нет. Добавим это новое множество ребер к множеству A_2 и обозначим полученное множество ребер через A_3. Эту процедуру проделаенм с оставшимися вершинами v_i. Заметим, что в силу бесконечности графа на каком то шагу добавление новых ребер к множеству ребер A_1 произойдет. В итоге, после того как будут переберараны все вершины v_i, мы получим дерево B_1. Обозначим вершины порядка 1 дерева B_1 через $b_1, ..., b_s$. Последовательно рассматривая звезды вершин b_i,, аналогичным способом будем добавлять новые ребра к дереву B_1. В силу бесконечности графа, после перебора всех вершин b_i, мы получим новое дерево B_2, которое строго содержит дерево B_1. Опять таки, в силу бесконечности графа, этот поцесс можно продолжить счетное число раз, получив в итоге бесконечное дерево. Заметим, что на каком то шаге может случится следующая ситуация : у дерева B_j возможно соединение некоторых вершин порядка 1 с одной и той же новой вершиной x, а остальные вершины порядка 1, вообще не допускают новых соединений. В этом случае, легко видеть, что вершина x будет разбивающей вершиной графа, чего в силу наложенного условия быть не может. Следовательно, по крайней мере два непересекающиеся пути, выходящие из вершины v, будут уходить в бесконечность. Их объединение и дает искомый путь, гомеоморфный R^1. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть* Γ - *граф с условием* (f). *Тогда на* Γ *существует возрастающая (убывающей) функция.*

Доказательство. Если граф Γ является бесконечным и не содержит разбивающих вершин, то по предыдущей лемме он имеет путь s гомеоморфный R^1. Если мультиграф

Г является бесконечным, но содержит разбивающие вершины, то в результате удаления одной из них возникнет две возможности : либо найдется по крайней мере две бесконечные компоненты, либо будет одна бесконечная компонента, а все остальные компоненты будут конечными и следовательно, они будут иметь вершины порядка 1. В первом случае по теореме Кенига в каждой из бесконечной компоненте найдется по бесконечному лучу, выходящему из разбивающей вершины и их объединение даст путь s в Г гомеоморфный R^1. Во втором случае выберем произвольный бесконечный луч s, выходящий из вершины порядка 1.

Если граф Г является конечным, то выберем произвольный путь s, соединяющий любые две вершины порядка 1. В каждом из рассмотренных случаях зададим на s монотонно возрастающую функцию g. Пустьv_1 - произвольная вершина из s, которую можно соеденить путем v_{s_1} вершиной w_1 так, чтобы пути $v_{s_1} \bigcap s = V_1 \bigcup w_1$. Поскольку на вершина v_1 и w_1 значение функции g имеется продолжим g до монотонно возрастающей функции на пути v_{s_1}. Аналогичным образом будем продолжать функцию g на другие пути v_{s_i}, соединяющие пары вершин $v_i w_i$ на которых уже g задана, дополнительно требуя, чтобы новые пути v_{s_i} пересекались с уже построенными путями разве, что по вершинам $v_i w_i$. Кроме того, в процессе продолжения функции g будем задавать ее значение на вершинах таким образом, чтобы не существовало пары вершин с одинаковым значением g. Может случится, что мы наткнемся на разбивающую вершину из которой выходит луч (путь) t уходящий в бесконечность (в вершину порядка 1) и не пересекающий уже построенные пути. Подолжим функцию

g с этой разбивающей вершины до монотонно возрастающей функции на t. Затем повторим предыдущую процедуру построения функции. В итоге мы получим монотонно возрастающую функцию на графе Γ. $\square$

Следствие 4.1. *Каждый граф с условием* (f) *можно превратить в орграф с условием* (f).

5. Когда граф Γ есть граф Кронрода-Риба гладкой функции с изолирванными особенностями.

Теорема 5.1. *Каждый граф с условием* (f) *есть граф Кронрода-Риба гладкой функции с изолирванными особенностями, заданной на поверхности.*

Доказательство. Пусть граф Γ удовлетворяет условием (f). Тогда на нем существует монотонная функция g. Используя атомы $O(k, l)$ и $NO(k, l)$ и граф Γ склеим из них поверхность N. Функцию Морса F на поверхности N зададим, используя функцию g. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть граф* Γ *удовлетворяет условию* (f) *и на нем задана функция высоты* g, *тогда существует ориентированная поверхность* N *и гладкая функция* G *с изолирванными особенностями на ней , являющейся функцией высоты, у которой граф Кронрода-Риба изоморфен* Γ.

Доказательство. Вложим граф Γ в R^3 таким образом, чтобы проекция на ось OX задавала функцию высоты g. Пусть U - трубчатая окрестность графа Γ в R^3, ∂U - ее граница. Положим $N = \partial U$. Используя функцию g, легко построить гладкую функцию G с изолирванными особенностями (воспользовавшись например функцией Морса) на N, которая есть функция высоты. $\square$

Замечание 5.1. *Очевидно, что граф Кронрода-Риба любой собственной гладкой функции с изолирванными особенностями, заданной на поверхности (компактной или некомпактной), удовлетворяет условию* (f).

Следовательно имеет место следующая теорема.

Теорема 5.3. *Для того, чтобы граф был графом Кронрода-Риба гладкой функцию* G *с изолирванными особенностями на некоторой поверхности необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условию* (f) .

Доказательство. Следствие теоремы 5.1 и замечания 5.1.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И., Варченко А.Н.,С.М. Гусейн-Заде* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982 - Т.1 - 302 с.

[2] *Болсинов А.В., Фоменко Ф.Т.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука 1997-352 с.

[3] *Васильев В.А.* Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС,1997 - 538 с.

[4] *Hirsh M.* On imbeding differentiable manifolds in Euclidean space.// Annals of Math.-1961.-73.-N3-p.566-571.

[5] *Гирик Е.А.* О существовании векторных полей с заданным набором особенностей на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии. // Укр.мат.журн.-1993. - 46, N 12- С.1706-1709.

[6] *Кронрод А.С.* О функциях двух переменных. //Успехи мат. наук - 1950. - 5, N1-С. 24-134.

[7] *Кудрявцева Е.А.* О реализации гладких функций на поверхностях в виде функций высоты // Мат. сборник - 1999.- 190, N1 - С.29-88.

[8] *Kulinich E.V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces.//Methods of Functional Analysis and Topology.- 1998.-4.-N1-p.59-64.

[9] *Максименко С.И.* Классификация m-функций на поверхностях // Укр.мат.журн.-1999. - 51, N 8 - С.1129-1135.

[10] *Мантуров В.О.* Атомы, высотные атомы, хордовые диаграммы и узлы. Перечисление атомов малой сложности с использованием языка Mathematica 3.0 // Топологические методы в теории гамильтоновых

систем (сборник статей) под редакцией А.В.Болсинова, А.Т.Фоменко, А.И.Шафаревича. М. Изд-во Факториал - 1998, С. 203-212.

[11] *Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та - 1991 - 301 с.

[12] *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965- 184 с.

[13] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей//ТР. МИРАН.- 1994- 205.С.131-140.

[14] *Оре О.* Теория графов. М.: Мир, 1965- 293 с.

[15] *Prishlyak A.O.* Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. // Topology and its Applications.- 2002.-119.- p.257-267.

[16] *Richards I.* On classifications of noncompact surfaces. // Trans.Amer.Math. Sos.(N.S.) -1963 - 106. - p. 259-269.

[17] *Рохлин В.А., Фукс Д.Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы.М.: Наука.- 1977-487с.

[18] *Sharko V.V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces. // International Conference at Chelyabinsk State Univ.,Low-Dimensional Group Theory.-1996.-p.19-23.

[19] *Sharko V.V.* About Kronrod-Reeb graph of fuction on a manifold. //Methods of Functional Analysis and Topology.- 2006.-12.-N4-p.389-396.

[20] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях.// Укр.мат. журн.-2003-55.№ 5-с.687-700.

[21] *Шарко В.В.* Функции на поверхностях. I // Некоторые вопросы современной математики. Праці Інституту математики НАН України. Т.25. отв.ред. В.В.Шарко.- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998.- с.408-434.

[22] *Whitehead J.H.C.* The immersion of open 3-manifold in Euclidean 3-space.// Proc. London Math. Sos. - 1961.-11.-N.3-p. 81-90.