Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 23-44

УДК 512.5+512.6

В. М. Бондаренко

Ин-т математики НАН Украины, Киев
E-mail: vit-bond@imath.kiev.ua

Е. Н. Тертичная

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: olena-tertychna@mail.ru

О бесконечности типа бесконечных полугрупп, порождённых идемпотентами с частичным нулевым умножением

У статті вивчається зв'язок між нескінченністю (зображувального) типу та нескінченністю порядка для одного природного класу напівгруп, породжених ідемпотентами.

В статье изучается связь между бесконечностью (представленческого) типа и бесконечностью порядка для одного естественного класса полугрупп, порождённых идемпотентами.

In this paper we study a connection between infiniteness of (representation) type and infiniteness of order for a natural class of semigroups generated by idempotents.

Введение

В теории конечномерных представлений объект исследования называют объектом конечного (представленческого) типа, если он имеет, с точностью до изоморфизма,

© **В. М. Бондаренко, Е. Н. Тертичная, 2006**

конечное число (конечномерных) неразложимых представлений; в противном случае его называют объектом бесконечного типа. Описание объектов конечного и бесконечного типов является одной из основных задач любой теории конечномерных представлений (в частности, представлений групп [1], колчанов [2], частично упорядоченных множеств [3, 4] и т.д.). Если говорить о представлениях групп, то полностью описаны лишь конечные группы конечного типа, а (конечномерные) представления бесконечных колчанов и бесконечных частично упорядоченных множеств тривиальным образом сводиться к конечному случаю.

В этой статье рассматриваются (конечномерные) представления полугрупп, порождённых идемпотентами с частичным нулевым умножением. Мы устанавливаем связь между бесконечностью типа и бесконечностью порядка для таких полугрупп.

1. Формулировка основных результатов. Мы рассматриваем полугруппы с нулем, которые порождены элементами e_i и задаются определяющими соотношениями $e_i^2 = e_i$ для всех i и некоторыми соотношениями вида $e_ie_j = 0$.

Дадим точные определения.

Пусть I — (конечное или бесконечное) множество, не содержащее элемента 0, и J — подмножество в $I \times I$ без диагональных элементов (т. е. без элементов вида (i,i)). Обозначим через $S(I,J)$ полугруппу с образующими элементами e_i, где $i \in I \cup 0$, и следующими определяющими соотношениями:

1) $e_0 = 0$;

2) $e_i^2 = e_i$ для любого $i \in I$;

3) $e_ie_j = 0$ для любой пары $(i,j) \in J$.

Множество всех таких полугрупп обозначим через $\mathcal{J}$.

В этой статье мы изучаем конечномерные представления полугрупп из $\mathcal{J}$ над произвольным полем k.

Говорят, что полугруппа имеет конечный (представленческий) тип над k, если число ее неразложимых представлений над k конечно (с точностью до эквивалентности); в противном случае говорят, что S имеет бесконечный тип над k. Далее, будем говорить, что полугруппа имеет ограниченный тип (над k), если размерности ее неразложимых представлений ограничены сверху; в противном случае будем говорить, что полугруппа имеет неограниченный тип (над k).

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Всякая бесконечная полугруппа $S(I,J)$ имеет бесконечный тип над произвольным полем k.*

Теорема 2. *Всякая бесконечная полугруппа $S(I,J)$, где I — конечное множество, имеет неограниченный тип над произвольным полем k.*

2. Критерий конечности для полугрупп $S(I,J)$. Сопоставим каждой полугруппе $S = S(I,J)$ (или, что то же самое, паре (I,J)) следующий ориентированный граф $\Lambda = (\Lambda_0, \Lambda_1)$ с множеством вершин Λ_0 и множеством стрелок Λ_1: $\Lambda_0 = \mathcal{E}(I) = \{e_i \,|\, i \in I\}$, а Λ_1 состоит из стрелок $e_i \to e_j$, где (i,j) пробегает множество J. Обозначим этот граф через $\Lambda(I,J) = \Lambda(S)$.

Однако, в дальнейшем более важную роль будет играть ориентированный граф $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}(I,J) = \overline{\Lambda}(S)$ с множеством вершин $\overline{\Lambda}_0$ и множеством стрелок $\overline{\Lambda}_1$, который определяется следующим образом: $\overline{\Lambda}_0 = \Lambda_0$, а $e_i \to e_j$ принадлежит

$\overline{\Lambda}_1$ тогда и только тогда, когда $e_i \to e_j$ не принадлежит Λ_1 и при этом $i \neq j$.

Поскольку оба графа не содержат кратных стрелок, то стрелку $i \to j$ будем также обозначать через (i, j); заметим еще, что эти графы не содержат петель.

Очевидно, что полугруппа S однозначно восстанавливается по каждому из введенных ориентированных графов.

Теорема 3. *Полугруппа $S = S(I, J)$ является конечной тогда и только тогда, когда I — конечное множество и граф $\overline{\Lambda}(S)$ не содержит ориентированных циклов.*

Очевидно, что полугруппа $S(I, J)$ является бесконечной, если бесконечным является множество I. Строгое доказательство следует из того, что ее гомоморфным образом является бесконечная полугруппа, состоящая из всех (бесконечных) диагональных $I \times I$-матриц ранга 1, ненулевые элементы которых являются единичными.

Пусть I конечно и граф $\overline{\Lambda}(S)$ не имеет ориентированных циклов. Покажем, что в этом случае полугруппа S конечна.

Напомним, что через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(I)$ мы обозначаем множество $\{e_i \mid i \in I\}$.

Рассмотрим в S некоторый элемент $x = x_1 x_2 \ldots x_m$, где $x_i \in \mathcal{E}$. Очевидно, что $x = 0$, если (x_i, x_{i+1}) не является стрелкой в графе $\overline{\Lambda}(S)$ (для некоторого $1 \leq i < m$). Значит, чтобы элемент x не было нулевым, необходимо, чтобы в графе $\overline{\Lambda}(S)$ существовал ориентированный путь из вершины x_1 в вершину x_m, проходящий через вершины $x_2, \ldots, x_{m-1}$; при этом элементы $x = x_1 x_2 \ldots x_m$ попарно различны (поскольку граф $\overline{\Lambda}(S)$ не имеет ориентированных циклов). Отсюда следует, что число ненулевых слов конечно, причем $|S| \leq 1 + |\overline{\Lambda}_0| + |\overline{\Lambda}_1| + |P|$, где P обозначает (конечное) множество всех ориентированных путей в $\overline{\Lambda}(S)$

длины $r \geq 2$ (слагаемому 1 соответстует нулевой элемент полугруппы).

Итак, доказано, что полугруппа S конечна.

Заметим, что на самом деле в последней формуле имеет место равенство.

Чтобы доказать указанный факт, нужно показать, что элемент $x = x_1 x_2 \dots x_m$ является ненулевым всякий раз, когда в графе $\overline{\Lambda}$ существует ориентированный путь из вершины x_1 в вершину x_m, проходящий через вершины

$$x_2, \dots, x_{m-1}.$$

Мы докажем это с помощью рассмотрения матричных представлений. Матрицу размера $m \times m$, в которой на месте (i, j) стоит единичный элемент, а на остальных местах — нулевые элементы, будем обозначать через $E_{ij}(m)$.

Рассмотрим следующее матричное $M = (M(x) \,|\, x \in S)$ представление полугруппы S над произвольным фиксированным полем k:

$$M(x_1) = E_{11}(m) + E_{12}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(x_2) = E_{22}(m) + E_{23}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

. . . .

$$M(x_{m-1}) \;=\; E_{m-1,m-1}(m) + \\ +\; E_{m-1,m}(m) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M(x_m) = E_{mm}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и $M(e_i) = 0$ для любого $e_i \neq x_1, x_2, \dots, x_m$ (в том числе $M(e_0) = 0$).

Заметим, что поскольку граф $\overline{\Lambda}(S)$ не содержит ориентированных циклов, то $x_i x_j = 0$ всякий раз, когда $i > j$. Кроме того, могут выполняться равенства $x_i x_j = 0$ для некоторых (и даже всех) i и j, таких, что $j > i + 1$. Но поскольку, как легко видеть, $[M(x_i)]^2 = M(x_i)$ для любого i и $M(x_i)M(x_j) = 0$ для любых i и j, таких, что либо $j > i + 1$, либо $i > j$, то указанное отображение $\{e_i \,|\, i \in I \cup 0\} \to M_m(k)$ действительно задает представление полугруппы S.

Так как

$$M(x) = M(x_1 x_2 \dots x_m) = M(x_1)M(x_2)\dots M(x_m) =$$

$$= E_{1m}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то $x_1 x_2 \dots x_m \neq 0$ (иначе $M(e_0) = M(0) \neq 0$, что противоречит определению представления M).

Продолжаем доказательство теоремы 3.

Нам осталось доказать, что в случае, когда I конечно и граф $\overline{\Lambda}(S)$ содержит ориентированных цикл, полугруппа S является бесконечной.

Зафиксируем в графе $\overline{\Lambda}(S)$ ориентированный цикл:

$$(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{m-1}, x_m), (x_m, x_1),$$

где $m \geq 2$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Доказательство будем проводить тем же методом, что и доказательство равенства

$$|S| = 1 + |\overline{\Lambda}_0| + |\overline{\Lambda}_1| + |P|,$$

(см. выше).

Рассмотрим следующее $T = (T(x) \,|\, x \in S)$ представление полугруппы S над произвольным фиксированным полем k (используя введенные выше обозначения для матриц): $T(e_i) = 0$ для любого $e_i \neq x_1, x_2, \dots, x_m$ (в том числе $T(e_0) = 0$),

$$T(x_1) = M(x_1),$$

$$T(x_2) = M(x_2), \dots, T(x_{m-1}) = M(x_{m-1})$$

и

$$T(x_m) = E_{mm}(m) + cE_{m1}(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $c \neq 0$ — фиксированный элемент поля k, не являющийся корнем из единицы (тогда степени $c, c^2, c^3, \dots$ элемента c попарно различны). Поскольку, как легко видеть, $[T(x_i)]^2 = T(x_i)$ для любого i и $T(x_i)T(x_j) = 0$ для любых i и j, кроме $j = i$ и $j = i{+}1$ (при этом $m{+}1$ отождествляется с 1), то указанное отображение

$$\{e_i \mid i \in I \cup 0\} \longrightarrow M_m(k)$$

действительно задает представление полугруппы S.

Положим $x = x_1 x_2 \dots x_m$. Поскольку

$$T(x) = T(x_1 \dots x_m) = T(x_1) \dots T(x_m) = cE_{11}(m) + E_{1m}(m),$$

то

$$[T(x)]^s = c^s E_{11}(m) + c^{s-1} E_{1m}(m)$$

для любого натурального s, то в силу выбора элемента $c \in k$ матрицы $T(x), [T(x)]^2, [T(x)]^3, \dots,$ попарно различны. Следовательно элементы $x, x^2, x^3, \dots,$ полугруппы S попарно различны и значит S — бесконечная полугруппа.

Теорема 3 доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Предположим, что полугруппа $S = S(I, J)$ является бесконечной.

Если множество I бесконечное, то (бесконечная) полугруппа $S(I, J)$ имеет следующее бесконечное семейство

$$\{T_j \mid j \in I\}$$

неразложимых попарно неэквивалентных представлений: $T_j(e_i) = 0$ для $i \neq j$ и $T_j(e_j) = 1$ $(i \in I \cup 0)$.

Будем теперь предполагать, что множество I конечное.

В силу теоремы 3 граф $\overline{\Lambda}(S)$ содержит ориентированный цикл. Зафиксируем среди таких циклов некоторый цикл Γ наименьшей длины, состоящий из стрелок

$$(p_1, p_2),\ (p_2, p_3),\ \ldots,\ (p_{m-1}, p_m),\ (p_m, p_1),$$

где $m \geq 2$. В силу выбора цикла Γ все его вершины и стрелки попарно различны и между вершинами $p_1, p_2, \ldots, p_m$ нет иных стрелок, кроме тех, что принадлежат циклу Γ. Это означает, что $e_{p_i} e_{p_j} = 0$, если $i \neq j$ и

$$(i, j) \neq (p_1, p_2), (p_2, p_3), \ldots, (p_{m-1}, p_m), (p_m, p_1).$$

Заметим, что для подполугруппы S' полугруппы

$$S = S(I, J),$$

порождённой образующими $e_0, p_1, \ldots, p_m$, граф $\overline{\Lambda}(S')$ совпадает с Γ.

Поскольку любое представление подполугруппы S' продолжается естественным образом до представления полугруппы $S = S(I, J)$ (образующему элементу $x \notin S'$ сопоставляется нулевая матрица), то достаточно показать, что бесконечный тип имеет полугруппа S'.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что бесконечный тип имеет полугруппа S_m $(m > 1)$, состоящая из образующих элементов $e_0, e_1, \ldots, e_m$ и соотношений $e_0 = 0$, $e_i e_j = 0$, если $i \neq j$ и

$$(i, j) \neq (1, 2), (2, 3), \ldots, (m-1, m), (m, 1).$$

Пусть сначала $m = 2$.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_2:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c} a & 1 \\ \hline a-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2$, такая, что выполняются матричные равенства $M_a(e_1)T = TM_b(e_1)$, $M_a(e_2)T = TM_b(e_2)$ или

$$(66) \quad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(67) \quad \left(\begin{array}{c|c} a & 1 \\ \hline a-a^2 & 1-a \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right) = \\ = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & t_{12} \\ \hline t_{21} & t_{22} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b & 1 \\ \hline b-b^2 & 1-b \end{array}\right).$$

Из равенства (66) следует, что $t_{12} = t_{21} = 0$. Тогда равенство (67) эквивалентно следующей системе (скалярных) равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{11} = t_{22}; \\ (a-a^2)t_{11} = t_{22}(b-b^2); \\ (1-a)t_{22} = t_{22}(1-b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{11} = t_{22}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c} t_{11} & 0 \\ \hline 0 & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Из приведенного доказательства следует, что матрица T является скалярной даже в том случае, когда $a = b$, причем без требования невырожденности. Отсюда следует, что алгебра эндоморфизмов представления M_a является локальной и значит это представление неразложимо.

Таким образом, полугруппа S_2 имеет бесконечный тип.

Пусть теперь $m = 3$.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_3:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a + a^2 & a - a^2 & 1 - a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2, 3$, такая, что выполняются матричные равенства

$$M_a(e_1)T = TM_b(e_1),$$

$$M_a(e_2)T = TM_b(e_2),$$

$$M_a(e_3)T = TM_b(e_3),$$

то есть

$$(68)\quad \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(69)\quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(70)\quad \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a+a^2 & a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -b & b & 1 \\ \hline -b+b^2 & b-b^2 & 1-b \end{array}\right).$$

Перемножая матрицы в равенстве (68), получаем равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline t_{21} & 0 & 0 \\ \hline t_{31} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

из которого имеем, что $t_{12} = t_{13} = t_{21} = t_{31} = 0$. Подставляя это в равенство (69), получим равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

которое после умножения матриц имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & 0 \\ \hline 0 & t_{32} & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего равенства следует, что

$$t_{11} = t_{22} \qquad \text{и} \qquad t_{23} = t_{32} = 0.$$

Таким образом, матричное равенство (70) имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -a & a & 1 \\ \hline -a + a^2 & a - a^2 & 1 - a \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -b & b & 1 \\ \hline -b + b^2 & b - b^2 & 1 - b \end{array}\right),$$

или (после перемножения матриц)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -at_{11} & at_{11} & t_{33} \\ \hline (-a + a^2)t_{11} & (a - a^2)t_{11} & (1 - a)t_{33} \end{array}\right) =$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline -t_{11}b & t_{11}b & t_{11} \\ \hline t_{33}(-b + b^2) & t_{33}(b - b^2) & t_{33}(1 - b) \end{array}\right).$$

Последнее равенство эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{11} = t_{33}; \\ (a-a^2)t_{11} = t_{33}(b-b^2); \\ (1-a)t_{33} = t_{33}(1-b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{11} = t_{33}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Далее доказательство аналогично случаю $m = 2$.

Рассмотрим, наконец, общий случай.

Рассмотрим следующее представление M_a $(a \in k)$ полугруппы S_m:

$$M_a(e_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_3) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$M_a(e_{m-1}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$M_a(e_m) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m (a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Покажем, что представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Предположим противное. Тогда существует обратимая матрица $T = (t_{ij}), ij = 1, 2, \dots, m$, такая, что выполняются матричные равенства

$$M_a(e_1)T = TM_b(e_1),$$

$$M_a(e_2)T = TM_b(e_2),$$

$$M_a(e_3)T = TM_b(e_3), \dots, M_a(e_m)T = TM_b(e_m)$$

или следующие матричные равенства:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

. . . .

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m(a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1m} \\ \hline t_{21} & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2m} \\ \hline t_{31} & t_{32} & t_{33} & \dots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & t_{m2} & t_{m3} & \dots & t_{mm} \end{array}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a & \dots & a & -a & a & 1 \\ \hline (-1)^m(a-a^2) & \dots & a-a^2 & -(a-a^2) & a-a^2 & 1-a \end{array}\right).$$

Занумеруем эти равенства соответственно

$$(6),\ (7),\ (8), \dots,\ (m+5).$$

Перемножая матрицы в равенстве (6), получаем равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1m} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline t_{21} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline t_{m1} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

из которого имеем, что

$$\begin{cases} t_{12} = 0, \ldots, t_{1m} = 0; \\ t_{21} = 0, \ldots, t_{m1} = 0. \end{cases}$$

Подставляя это в равенство (7), получим равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{32} & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

которое, после умножения матриц, имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2m} \\ \hline 0 & t_{22} & t_{23} & \ldots & t_{2m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{32} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & t_{m2} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего равенства вытекают следующие равенства:

$$\begin{cases} t_{22} = t_{11}; \\ t_{23} = 0, \ldots, t_{2m} = 0; \\ t_{32} = 0, \ldots, t_{m2} = 0. \end{cases}$$

Подставляя эти скалярные равенства в матричное равенство (8), получаем равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & \ldots & t_{3m} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & \ldots & t_{mm} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right)$$

или (после перемножения матриц) равенство

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & \ldots & t_{3m} \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & t_{34} & \ldots & t_{3m} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{43} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & t_{m3} & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

которое эквивалентно следующей системе равенств:

$$\begin{cases} t_{33} = t_{11}; \\ t_{34} = 0, \dots, t_{3m} = 0; \\ t_{43} = 0, \dots, t_{m3} = 0. \end{cases}$$

Продолжая этот процесс (рассматривая матричные равенства (9), …, $(m+4)$), получим в результате, что матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & t_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t_{mm} \end{array}\right).$$

Тогда уравнение $(m+5)$ будет иметь следующий вид:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m a t_{11} & \dots & -a t_{11} & a t_{11} & t_{mm} \\ \hline (-1)^m (a-a^2) t_{11} & \dots & -(a-a^2) t_{11} & (a-a^2) t_{11} & (1-a) t_{mm} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1)^m t_{11} b & \dots & -t_{11} b & t_{11} b & t_{11} \\ \hline (-1)^m t_{mm} (b-b^2) & \dots & -t_{mm} (b-b^2) & t_{mm} (b-b^2) & t_{mm} (1-b) \end{array}\right).$$

Последнее матричное равенство эквивалентно следующей системе скалярных равенств:

$$\begin{cases} at_{11} = t_{11}b; \\ t_{mm} = t_{11}; \\ (a - a^2)t_{11} = t_{mm}(b - b^2); \\ (1 - a)t_{mm} = t_{mm}(1 - b). \end{cases}$$

В силу равенства $t_{mm} = t_{11}$ матрица T имеет вид

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & t_{11} & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \dots & t_{11} \end{array}\right)$$

и поскольку она невырождена, то $t_{11} \neq 0$. Тогда из равенства $at_{11} = t_{11}b$ имеем $a = b$, и мы приходим к противоречию.

Итак, представления M_a и M_b не эквивалентны, если $a \neq b$.

Дальше доказательство проводится так же, как и для $m = 2$.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Теорема 2 доказывается по той же схеме, что и теорема 1. Различие состоит лишь и том, что в определении представлений M_a в матрице $M_a(e_m)$ вместо элемента a следует взять клетку Жордана $J_s(a)$ размера $s \times s$ с собственным числом a, где s — любое (фиксированное) натуральное число. При этом, естественно, нулевые и единичные элементы матриц $M_a(e_1), M_a(e_2), \dots, M_a(e_m)$ нужно заменить соответственно на нулевые и единичные матрицы размера $s \times s$. Отметим еще, что в конце доказательств (при $m = 2, 3$ и в общем случае) вместо равенства $at_{11} = t_{11}b$ будем иметь матричное равенство $J_s(a)T_{11} = T_{11}J_s(b)$, из которого следует (в силу $a \neq b$), что $T_{11} = 0$.

Список литературы

[1] *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — 1977. — **71**. — С. 24 – 41.

[2] *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen // Manuscripts Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103,309.

[3] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа// Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.

[4] *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.