Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 115-131

УДК 512.64

С. М. Дяченко

Київський нац. ун-т ім Тараса Шевченка

Ручні алгебри відносно односторонньої еквівалентності матриць

У цій роботі ми розглядаємо задачу про односторонню еквівалентність матриць над скінченновимірними алгебрами, і описуємо всі ручні випадки.

В этой работе мы рассматриваем задачу про одностороннюю эквивалентность матриц над конечномерными алгебрами и описываем все ручные случаи.

In this paper we consider the problem of one-sided equivalence of matrices over a finite dimensional algebra, and describe all tame cases.

1. Вступ. Нехай k — поле і Λ — скінченновимірна алгебра над k. Розглянемо наступну матричну задачу. На множині всіх (прямокутних) матриць з елементами із Λ введемо таке відношення еквівалентності: $A \sim A'$ тоді і лише тоді, коли існують оборотна матриця S над k та оборотна матриця T над Λ, такі що

$$A' = SAT \tag{101}$$

Потрібно описати такі матриці A з точністю до вказаної еквівалентності.

Цю задачу можна сформулювати як задачу про опис класів ізоморфних об'єктів наступної категорії $\mathcal{C}$. $Ob\,\mathcal{C} = \{f : k^m \to \Lambda^n\}$, морфізмом між двома об'єктами $(f : k^m \to \Lambda^n)$ і $(f' : k^{m'} \to \Lambda^{n'})$ є пара відображень (ϕ, Φ), що складається з k-лінійного відображення $\phi : k^m \to k^{m'}$ і Λ-лінійного відображення $\Phi : \Lambda^n \to \Lambda^{n'}$, таких що $\phi f' = f\Phi$. Оскільки ця категорія не є категорією Крулля-Шмідта, ми замість неї будемо розглядати її "замикання Крулля-Шмідта". А саме ми розглянемо задачу про опис класів ізоморфних об'єктів категорії $\mathcal{B}$, такої що $Ob\,\mathcal{B} = \{f : k^m \to P\}$, де P — проективний модуль над алгеброю Λ (морфізмом між двома об'єктами $(f : k^m \to P)$ і $(f' : k^{m'} \to P')$ є пара відображень(ϕ, Φ), що складається з k-лінійного відображення $\phi : k^m \to k^{m'}$ і Λ-лінійного відображення $\Phi : \Lambda^n \to \Lambda^{n'}$, таких що $\phi f' = f\Phi$). У цій статті описані скінченновимірні алгебри для яких вказана задача є ручною. Такі алгебри ми називаємо OSE-ручними або алгебрами OSE-ручного типу; якщо задача має скінченний (відповідно нескінченний) тип, алгебру називатимемо алгеброю OSE-скінченного (відповідно OSE-нескінченного) типу. Очевидно, що алгебра OSE-скінченного типу є OSE-ручною.

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук Бондаренку Віталію Михайловичу за постановку задачі і корисні поради.

2. Попередні пояснення та приклади. Ми розглядаємо лише базисні алгебри, тобто алгебри Λ, для яких $\Lambda/Rad\Lambda \cong k \oplus k \oplus \ldots \oplus k$; такі алгебри можна задати графом зі співвідношеннями наступним чином ([1]).

Нехай $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ — орієнтований граф. Γ_0 — множина його вершин, Γ_1 — множина його стрілок. Для кожної стрілки $e \in \Gamma_1$ позначимо через $\alpha(e) \in \Gamma_0$ її початок, і через $\beta(e) \in \Gamma_0$ її кінець.

Шляхом в орієнтованому графі будемо називати послідовність стрілок $w = e_1 e_2 \ldots e_n$, таку, що

$$\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1\,.$$

Початок та кінець шляху визначаються так: $\alpha(w) = \alpha(e_1)$, $\beta(w) = \beta(e_n)$.

У подальшому граф Γ вважаємо скінченним, тобто $|\Gamma_0| = s < \infty$, $|\Gamma_1| < \infty$. Із таким графом асоціюється k-алгебра шляхів (яка може бути нескінченновимірною). Її базисом є множина шляхів графа скінченної довжини (включаючи вершини як шляхи довжини нуль: $\{\varepsilon_j \mid j \in \Gamma_0\}$) $B = \{w \mid w = e_1 e_2 \dots e_n,\ n \geq 0\}$. Множення в алгебрі задається на елементах базису як приписування шляхів, якщо це можливо і нульовим чином в іншому разі, тобто, якщо $w_1 = e_1 e_2 \dots e_n$ і $w_2 = e_{n+1} e_{n+2} \dots e_{n+m}$, то

$$w_1 w_2 = \begin{cases} e_1 e_2 \dots e_n e_{n+1} e_{n+2} \dots e_{n+m}, & \text{при } \beta(w_1) = \alpha(w_2); \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases}$$

При цьому

$$\begin{aligned} \varepsilon_j w &= \begin{cases} w, & \text{якщо } \alpha(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі;} \end{cases} \\ w \varepsilon_j &= \begin{cases} w, & \text{якщо } \beta(w) = j; \\ 0, & \text{в іншому разі.} \end{cases} \end{aligned}$$

Позначимо так означену алгебру $\Lambda(\Gamma)$.

Алгебра, задана графом зі співвідношеннями, — це факторалгебра алгебри $\Lambda(\Gamma)$ за ідеалом I таким, що $I \subset J^2$, де J — ідеал, породжений всіма стрілками графа.

Переходимо до розгляду нашої задачі.

Нехай $A \in M_{m \times n}(\Lambda)$. Розпишемо її за базисом у наступному вигляді:

$$A = \sum_{j=1}^{s} A_j \varepsilon_j + \sum_{w} A_w w \tag{102}$$

Лема 1. *Квадратна матриця A, що записана у вигляді* (102), *є оборотною тоді і лише тоді, коли оборотними є всі матриці A_j.*

Доведення випливає з рівності $AX = E$, де X також записана у вигляді (102) (E — одинична матриця).

Наш перший крок до розв'язання сформульованої матричної задачі полягає в зведенні її (за допомогою розкладу матриць за базисом алгебри) до матричної задачі над полем.

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Нехай $\Lambda = \Lambda(\Gamma)$, де граф Γ має такий вигляд:

$$\underset{\varepsilon_1}{\circ} \xrightarrow{\quad a \quad} \underset{\varepsilon_2}{\circ}$$

Розглянемо рівність (101): $A' = SAT$. Нехай

$A = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba$;

$A' = A'_1\varepsilon_1 + A'_2\varepsilon_2 + B'a$;

$T = T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va$;

$A_1, A_2, B, A'_1, A'_2, B' \in M_{m\times n}(k)$,

$S \in GL_m(k)$, $T_1, T_2 \in GL_n(k)$, $V \in M_n(k)$.

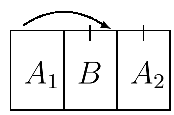
Тоді

$$A'_1\varepsilon_1 + A'_2\varepsilon_2 + B'a = S(A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + Ba)(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + Va).$$

Перемноживши елементи базису за правилами множення в алгебрі та прирівнявши коефіцієнти при елементах базису, отримаємо наступні рівності:

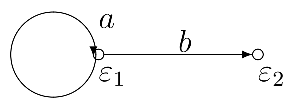
$A'_1 = SA_1T_1$, $A'_2 = SA_2T_2$, $B' = SBT_2 + SA_1V$.

Отже, ми отримали наступну матричну задачу: є три матриці A_1, A_2, B. Дозволено робити елементарні перетворення рядків одночасно в усіх матрицях (задаються множенням на матрицю S), одночасні елементарні перетворення стовпців матриць A_2 та B (задаються множенням на матрицю T_2), елементарні перетворення стовпців матриці A_1 (задаються множенням на матрицю T_1) і стовпці матриці A_1 можна додавати до стовпців матриці B (матриця V). Схематично можна наступним чином зобразити отриману задачу:



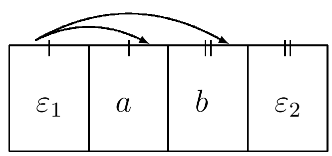
.

Приклад 2.



,

$I = \{a^2, ab\}$. Матрична задача має наступний вигляд:



.

У загальному випадку маємо наступну матричну задачу, яку будемо позначати $M(\Lambda)$. Нехай базис алгебри Λ складається із шляхів $\{w_i \mid i = 1 \dots l\}$, тоді ми маємо набір матриць $\{A_i,\ i = 1 \dots l\}$. Допустимими перетвореннями є наступні перетворення:

1) можна робити будь-яке елементарне перетворення рядків одночасно у всіх матрицях;

2) можна робити будь-яке елементарне перетворення із стовпцями матриці A_i, причому, якщо $\beta(w_j) = \beta(w_i)$ то

таке ж саме елементарне перетворення треба зробити із стовпцями матриці A_j;

3) можна додавати стовпець матриці A_i, помножений на елемент поля, до стовпця матриці A_j, якщо $w_i w_m = w_j$ — добуток елементів базису, причому у випадку $w_{i'} w_m = w_{j'}$ таке ж саме додавання треба зробити для відповідних стовпців матриць $A_{i'}$ та $A_{j'}$.

3. Формулювання основного результату. В подальшому $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ позначає орієнтований граф, $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$ — алгебра побудована за графом зі співвідношеннями I.

Основним результатом цієї статті є наступна теорема.

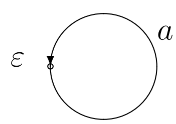
Теорема 1. *OSE-ручними алгебрами є (з точністю до ізоморфізму) такі і лише такі алгебри $\Lambda = \Lambda(\Gamma)/I$.*

1. $\overset{\varepsilon}{\circ}$, $I = \{0\}$.

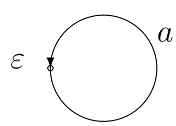
2. $\overset{\varepsilon_1}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_2}{\circ}$, $I = \{0\}$.

3. $\overset{\varepsilon_1}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_2}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_3}{\circ}$, $I = \{0\}$.

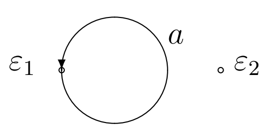
4. $\overset{\varepsilon_1}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_2}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_3}{\circ} \quad \overset{\varepsilon_4}{\circ}$, $I = \{0\}$.

5. 

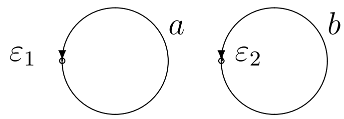
, $I =< a^2 >$.

6. 

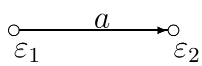
, $I =< a^3 >$.

7. 

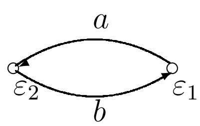
, $I =< a^2 >$.

8. 

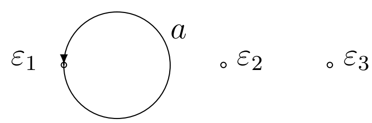
, $I =< a^2, b^2 >$.

9. 

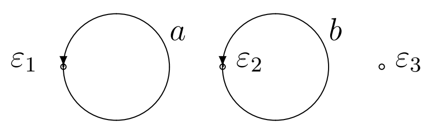
, $I = \{0\}$.

10. 

, $I =< ab, ba >$.

11. 

, $I =< a^2 >$.

12. 

, $I =< a^2, b^2 >$.

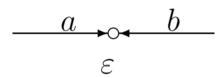
Серед них алгебрами OSE-скінченного типу є алгебри 1), 2), 3), 5),6), 7).

4. Допоміжні леми. Розглянемо дві леми, які ми будемо використовувати нижче.

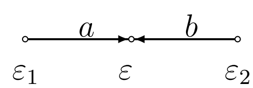
Лема 2. *Якщо Λ — алгебра OSE-ручного типу, то* $|\Gamma_0| < 5$.

Доведення. Якщо граф Γ має принаймні 5 вершини, то матриці, які відповідають вершинам графа, утворюють зображення частково впорядкованої множини, яка складається з п'яти непорівняльних точок. Добре відомо, що така задача є дикою (див [3]). □

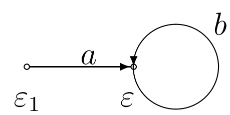
Лема 3. *Якщо Λ — алгебра OSE-ручного типу, то Γ не містить підграф вигляду*



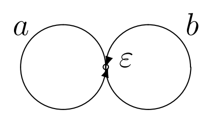
Доведення. Можливі такі випадки:

a) 

;

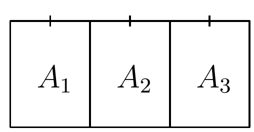
b) 

;

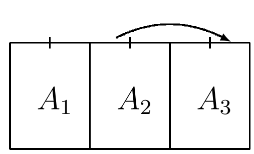
c) 

.

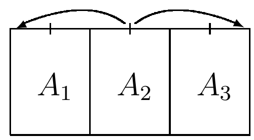
Якщо ми розглянемо підзадачі, що відповідає матрицям a, ε, b, то ми отримаємо відповідно наступні матричні задачі :

a) 

,

b) 

,

c) 

.

Всі ці задачі є дикими згідно [4, 5].

□

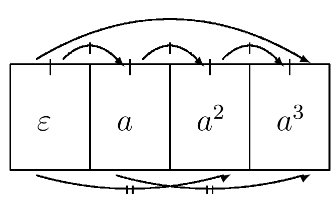
5. Доведення теореми 1. Нагадаємо, що петлею називається стрілка початкова і кінцева вершини якої збігаються. З формальних причин надалі під стрілкою ми розуміємо будь яку стрілку, що не є петлею.

Розглянемо спочатку графи, які складаються лише з точок і не мають петель або стрілок. Згідно леми 2 кількість точок менша, або рівна чотирьом. Це відповідає першим чотирьом пунктам в теоремі. Перші три задачі будуть скінченного типу [2], а остання ручного [3] (вони співпадають з матричними задачами, які пов'язані з зображенням частково-впорядкованих множин, які складаються відповідно з однієї, двох, трьох та чотирьох непорівняльних точок).

Розглянемо графи, які мають хоча б одну петлю або стрілку.

1) *Випадок однієї вершини.*

В силу леми 3 нам потрібно розглядати лише графи з однією петлею (граф пункту 5 з умови теореми). Доведемо, що задача буде дикою, якщо $I =< a^4 >$. Дійсно, в цьому випадку задача отримає наступний вигляд:



.

Розглянемо четвірки матриць такого вигляду:

$$T(B,C,D) = \begin{array}{|c|c|c|c||c|c|c|c||c|c|c|c||c|c|c|c|}
\hline
 & E & & & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & E & & & E & & & & & & & \\ \hline
 & & & E & & & & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & E & & & & & & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & E & E & & & & \\ \hline
 & & & & & & & & & & & & 0 & B & C & D \\ \hline
\end{array},$$

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці. Легко бачити, що $T(B,C,D)$ і $T(B',C',D')$ переводяться одне в одне за допомогою допустимих перетворень тоді і лише тоді, коли трійки матриць B,C,D і B',C',D' є подібними в наступній матричній задачі:

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
B & C & D \\ \hline
\end{array},$$

а це дика задача (див. [4, 5]).

Задача буде дикою і у випадку $I =< a^l >$, $l > 4$.

Якщо граф має одну вершину, нам залишилося розглянути випадки, коли $l = 2$ і $l = 3$.

У першому випадку маємо задачу про зображення лінійно впорядкованої множини з двох елементів, яка має скінченний тип [2]. У другому випадку маємо три матриці A_1, A_2, A_3, для яких одночасними є елементарні перетворення як рядків так і стовпчиків та одночасні зовнішні додавання стовпчиків $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, а також допустимі додавання стовпчиків $A_1 \to A_3$. Відомо, що це задача скінченного типу [3] (у цьому легко переконатися за допомогою методу послідовного зведення матриць).

2) *Випадок двох вершин.*

2.1) Граф має одну петлю (пункт 7 з формулювання теореми).

Якщо $I =< a^3 >$, ми отримаємо задачу $M(\Lambda)$ з чотирма матрицями:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \varepsilon_1 & a & a^2 & \varepsilon_2 \\ \hline \end{array}\ .$$

Приведемо спочатку матрицю ε_2:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \quad & \quad & \quad & 0 & E \\ \hline \quad & \quad & \quad & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ .$$

Тоді для перших трьох матриць отримаємо задачу:

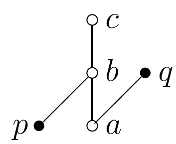
$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A' & B' & C' \\ \hline A & B & C \\ \hline \end{array}\ .$$

Розглянемо наступне часткове зображення:

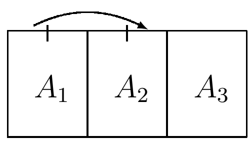
$$T(A,B,C,P,Q) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & A & 0 & P & 0 & B & Q & C & 0 \\ \hline E & & & & & & & & \\ \hline & & E & & & & & & \\ \hline & & & & E & & & & \\ \hline & & & & & & & E & E \\ \hline \end{array}\ .$$

в матрицях на порожніх місцях стоять нульові матриці.

Тоді для матриць (A, B, C, P, Q) буде задача про зображення наступної частково впорядкованої множини з відношенням еквівалентності:



$a \sim b \sim c$, $p \sim q$ відомо, що це дика задача [4,5]. Отже, для графа вигляду 7 єдиним можливим варіантом залишається $I =< a^2 >= J^2$. У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

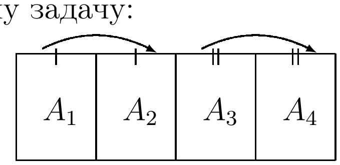


.

Відомо, що це задача скінченного типу [3].

2.2) Граф має дві петлі (пункт 8 з формулювання теореми).

Враховуючи розглянуте вище для того, щоб задача мала ручний тип необхідно, щоб $a^2 \in I$, $b^2 \in I$. Розглянемо випадок $I =< a^2, b^2 >$, помітимо, що при цьому $I = J^2$. Отримуємо наступну задачу:

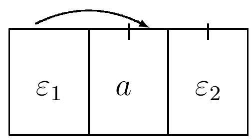


.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

За лемою 3 у випадку трьох петель задача буде дикою, бо дві з них мають спільну вершину.

2.3) Граф має одну стрілку (пункт 9 з формулювання теореми). У цьому випадку отримаємо наступну задачу:

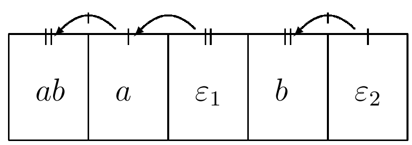


.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

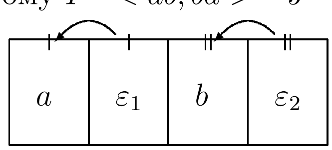
2.4) Граф має дві стрілки. За лемою 3 граф з пункту 9 — єдиний можливий.

Припустимо, що $ab \notin I$, тоді ми отримаємо наступну задачу:



.

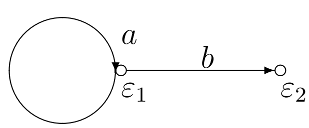
Матриці ab, b, ε_1 утворюють дику підзадачу (лема 3а). Тому необхідно, щоб $ab \in I$. Аналогічно $ba \in I$. Отже, $I \supset < ab, ba >= J^2$, тому $I =< ab, ba >= J^2$



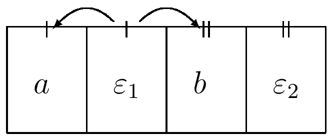
.

Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

2.5) Граф має одну стрілку і одну петлю. В силу леми 3 граф може мати лише наступний вигляд

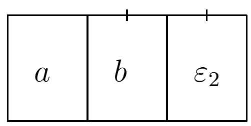


розглянемо випадок $I =< a^2, ab >= J^2$:



.

Ця задача із класу містить підзадачу



,

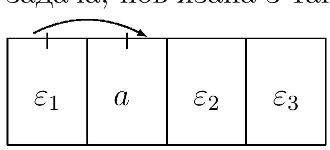
а це дика задача (див. [4, 5]).

Згідно з лемою 3 випадок, коли сума стрілок і петель більша двох розглядати не потрібно, отже випадок графа з двома вершинами повністю розглянуто.

3) *Випадок трьох вершин.*

3.1) Граф має одну петлю (пункт 11 з формулювання теореми). За доведеним для графа вигляду 7 випливає, що $a^2 \in I$, тому $I \supset < a^2 >= J^2$ тому $I =< a^2 >= J^2$.

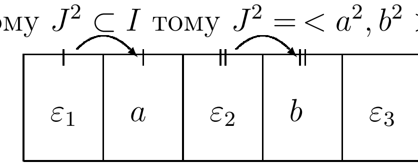
Ось матрична задача, пов'язана з такою алгеброю:



.

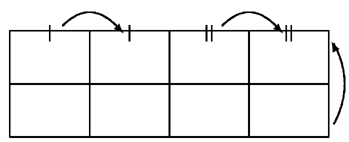
Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

3.2) Граф має дві петлі (пункт 12 з формулювання теореми). За розглянутим для випадку 7, необхідно, щоб $\{a^2, b^2\} \subset I$, тому $J^2 \subset I$ тому $J^2 =< a^2, b^2 >= I$:



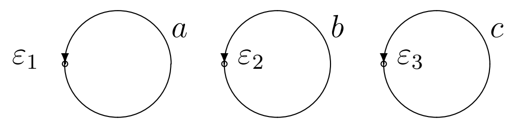
.

Приведемо матрицю ε_3 і отримаємо наступну матричну задачу:



Ця задача із класу задач про зображення в'язки напівланцюгів і тому вона є ручною [6].

3.3) Граф має три петлі , тому (за лемою 3) має вигляд:



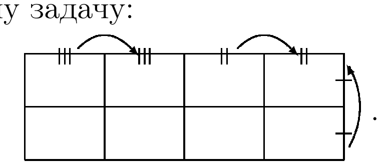
За розглянутим для випадку 7: $I =< a^2, b^2, c^2 >$:

ε_1	a	ε_2	b	ε_3	c

.

Якщо розглянути частинний випадок, коли матриці ε_1 та a мають наступний вигляд:

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$, то для матриць ε_2, b, ε_3, c отримаємо наступну задачу:

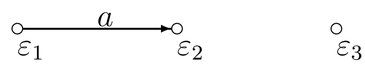


Розглянемо часткове зображення:

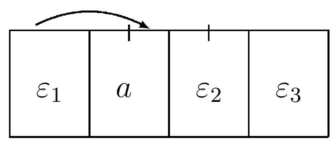
$$H(A,B,C) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & A & B & C \\ \hline E & 0 & E & 0 \\ \hline \end{array} \; .$$

Для матриць (A, B, C) буде задача з леми 3 пункт а), яка є дикою.

3.4) Випадок однієї стрілки. Граф має вигляд



Задача має наступний вигляд:



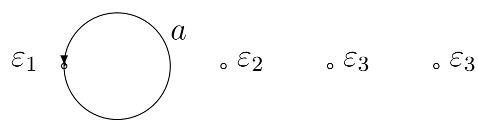
.

Матриці a, ε_2, ε_3 утворюють дику задачу (див. [4, 5]).

Отже, у випадку трьох точок граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох.

4) *Випадок чотирьох точок.* Граф не може мати стрілок, а петель може бути не більше двох, згідно з розглянутим вище.

У випадку, коли немає петель, задача буде ручною (це вже розглядалося). Розглянемо випадок однієї петлі. Граф має вигляд:



Задача буде задачею про зображення частково-впорядкованої множини з інволюцією:

Це дика задача (див. [4, 5]).

Отже, у випадку чотирьох точок єдиним можливим графом є граф, у якого немає ні петель ні стрілок.

Твердження стосовно ручних випадків доведено в [7]
Теорема 1 доведена.

Література

[1] *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры // "Вища школа".- 1980, 200 с.

[2] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записи научных семинаров ЛОМИ. т. 28. - С. 32-41.

[3] *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра-Трелла // препринт 73.9. Киев: Наукова думка - 1973. 100 с.

[4] *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Posets with an equivalence relation of tame type and of finite growth// Canad. Math. Soc. Conf. Proc. — 1991. — **11**. — P. 67 – 88.

[5] *Bondarenko V. M., Zavadskij A. G.* Tame posets with equivalence relation// Contem. Math. — 1992. — **131** (part 2). — P. 237 – 251.

[6] *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения// Алгебра и анализ — 1991. — Том**3** (вып. 5). — С. 38 – 67.

[7] *Дяченко С. М.* Алгебри скінченного типу відносно односторонньої еквівалентності матриць // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. – 2006. – вип. 12-13. – С. 65–70.