

Д. П. Лычак

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: amidl@ukr.net

А. О. Пришляк

Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченка, Киев
E-mail: prishlyak@yahoo.com

Геометрия функций Морса на ориентируемых поверхностях

В даній роботі розглядається відповідність між функціями Морса та градієнтними потоками на орієнтовних поверхнях. Доводиться, що кожному потоку Морса з нумерацією сідлових особливих точок відповідає рівно одна функція Морса. Обчислюється кількість функцій Морса з невеликим числом сідлових точок.

В данной работе рассматривается соответствие между функциями Морса и градиентными потоками на ориентируемых поверхностях. Доказывается, что каждому потоку Морса с нумерацией седловых особых точек соответствует ровно одна функция Морса. Вычисляется количество функций Морса с небольшим числом седловых точек.

The present paper studies the correspondence between Morse functions and gradient flows on the orientable surfaces. We prove that for every Morse flow with numeration of saddle singular points there is a certain Morse function. The number of Morse functions with several saddles is computed.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются гладкие замкнутые связные ориентируемые двумерные многообразия, гладкие функции и гладкие векторные поля на них.

Топологическая классификация функций Морса на поверхностях была получена в 1996 году В. В. Шарко ([1], также см. [2]) и Е. В. Кулиничем в 1998 году в [3]. В обеих работах использовались графы Рибба. А. Т. Фоменко ввёл понятие атома и молекулы и использовал их для классификации как динамических систем (потоков Морса-Смейла) так и функций Морса на поверхностях (см. [4]).

М. М. Пейксото в 1973 году в работе [5] ввёл понятие различающего графа, который является полным топологическим инвариантом, классифицирующим потоки Морса-Смейла без предельных циклов (потоки Морса) с точностью до траекторной эквивалентности. Однако этот инвариант имеет сложное описание. В. В. Шарко и А. А. Ошемковым в 1998 году в работе [6] был предложен трёхцветный граф, который является инвариантом для потоков Морса на поверхностях и с которым гораздо легче проводить подсчёты. В данной работе он используется для задания потоков Морса.

С. Смейл в работе [7] доказал, что потоки Морса — это в точности градиентно-подобные потоки (то есть потоки траекторно эквивалентные потоку градиента некоторой функции Морса в некоторой римановой метрике) без сепаратрис, идущих из седла в седло. Поскольку для любой функции Морса можно так подобрать риманову метрику на многообразии, чтобы поток градиента не имел сепаратрис из седла в седло (был потоком Морса), то классу функций Морса соответствует класс потоков Морса.

Однако послойно эквивалентным функциям Морса в разных метриках могут соответствовать траекторно неэквивалентные потоки Морса, и наоборот, поток Морса с точностью до траекторной эквивалентности можно различными способами представить в виде потока градиента некоторой функции Морса (с точностью до послойной эквивалентности). Таким образом, соответствие между функциями и потоками зависит от метрики. В настоящей работе показано, что эту зависимость можно устранить, если рассматривать потоки Морса с дополнительной информацией.

Основная цель данной статьи — доказать, что потоку Морса с нумерацией седловых точек на ориентируемой поверхности соответствует ровно одна (с точностью до послойной эквивалентности) функция Морса. Вторая цель — используя сформулированное выше соответствие, а также конструкцию трёхцветных графов и графов Роба, найти все неэквивалентные потоки Морса с нумерацией при количестве седловых точек не больше 5, найти функцию Морса, соответствующую каждому из них и посчитать количество неэквивалентных функций Морса.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Замечание 1. *Гладкое векторное поле на многообразии порождает гладкий поток (гладкую динамическую систему с непрерывным временем) и наоборот. Далее оба термина используются как синонимы.*

Пусть далее M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ — гладкая функция, $v : M \rightarrow TM$ — гладкое векторное поле.

Определение 1. Точка $x \in M$ называется *критической точкой* функции $f : M \rightarrow \mathbf{R}$, если дифференциал функции f в этой точке равен нулю $df(x) = 0$ или, что то же самое $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0$. Критическая точка $x \in M$ называется *невырожденной*, если матрица $H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i, j=1, 2}$ в некоторых локальных координатах x_1, x_2 невырожденная.

Функция на двумерном многообразии может иметь невырожденные критические точки трёх типов: минимум (локальный), седло, максимум (локальный).

Определение 2. Гладкая функция $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ называется *функцией Морса*, если все её критические точки невырожденные. Функция Морса называется *простой*, если все её критические точки лежат на разных линиях уровня.

Определение 3. Слоями функции Морса будем называть компоненты связности её линий уровня. Две функции Морса будем называть *послойно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит слои одной функции в слои другой, а локальные минимумы в локальные минимумы.

Далее рассматриваются только простые функции Морса.

Определение 4. *Графом Роба (Кронрода-Роба)* функции Морса $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ называется факторпространство M/\sim с ориентациями рёбер в соответствии с направлением возрастания функции, где $x_1 \sim x_2$, если x_1 и x_2 принадлежат одному слою. Графы Роба рассматриваются с точностью до изоморфизма ориентированных графов.

Утверждение 1. *Две функции Морса на ориентируемой поверхности послойно эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы Роба изоморфны.*

Доказательство. Необходимость следует из определения графа Роба, поскольку гомеоморфизм поверхностей порождает изоморфизм графов. Доказательство достаточности см., например, в [4] (теорема 2.4, с. 76, том 1). \square

Определение 5. Особая точка векторного поля

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

называется *невыврожденной*, если матрица $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,2}$ не имеет собственных чисел, действительная часть которых равна 0.

Векторное поле на двумерном многообразии может иметь три типа невырожденных особых точек: источник, седло и сток.

Определение 6. Векторное поле v на двумерном многообразии M будем называть *полем Морса*, если

- (1) v имеет конечное число особых точек и все они невырожденные;
- (2) каждая траектория начинается и заканчивается в особой точке;
- (3) не существует траекторий, идущих из седла в седло.

Два поля Морса будем называть *траекторно эквивалентными*, если существует гомеоморфизм поверхности на себя, который переводит траектории одного поля в траектории другого с сохранением направления движения по ним.

Будем называть *полем Морса с нумерацией* поле Морса, у которого занумерованы седла. Такие поля мы будем рассматривать с точностью до траекторной эквивалентности, при условии, что гомеоморфизм поверхности будет сохранять нумерацию седел.

Замечание 2. Существует ровно одно векторное поле Морса без седловых точек на связном замкнутом двумерном многообразии. Это поле градиента функции высоты на стандартно вложенной в \mathbf{R}^3 сфере S^2 с метрикой, индуцированной из \mathbf{R}^3 . Далее будем считать, что поля Морса имеют хотя бы одно седло.

Приведём конструкцию трёхцветных графов (подробности см. в [6]).

Определение 7. Граф T назовём *трёхцветным графом*, если все его вершины имеют степень три, а рёбра раскрашены в три цвета (s, u, t) таким образом, что в каждой вершине сходятся рёбра трёх разных цветов. Два трёхцветных графа назовём *изоморфными*, если они изоморфны без учёта раскраски, и этот изоморфизм сохраняет раскраску.

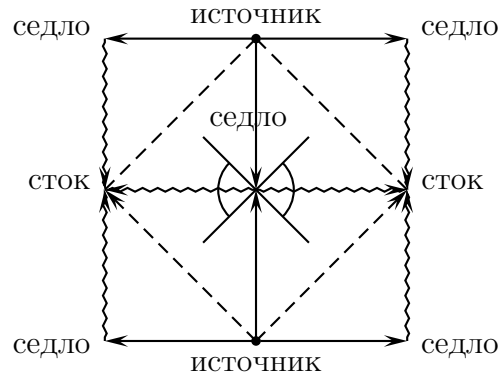


Рис. 19. Триангуляция поверхности

Сопоставим векторному полю Морса трёхцветный граф. Для этого проведём сепаратрисы. Они разобьют поверхность на *канонические четырёхугольники* (см. рис. 19).

Проведём по одной траектории из источника в сток для каждого канонического четырёхугольника. Таким образом, мы получили триангуляцию поверхности. Каждому треугольнику сопоставим вершину трёхцветного графа, две вершины соединяются s -ребром (u -ребром, t -ребром), если соответствующие им треугольники имеют общую сторону-сепаратрису из источника в седло (сепаратрису из седла в сток, траекторию из источника в сток). Будем называть такие сепаратрисы s -сепаратрисами (u -сепаратрисами, t -траекториями). su -циклом называется цикл на графе, в котором s - и u -рёбра встречаются по очереди.

Утверждение 2. *Два поля Морса траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им трёхцветные графы изоморфны.*

Утверждение 3. *Трёхцветный граф соответствует некоторому полю Морса тогда и только тогда, когда все его su -циклы имеют длину 4. Это поле Морса задано на ориентируемой поверхности тогда и только тогда, когда граф без учёта раскраски не имеет циклов нечётной длины.*

Доказательства этих утверждений см. в [6].

Для краткости мы будем называть такие графы 3 -графами. То есть 3 -графы — это несколько su -квадратов (столько, сколько седел у поля), вершины которых произвольным образом соединены t -рёбрами. 3 -графом с нумерацией будем называть 3 -граф с занумерованными su -квадратами.

Функции Морса будем рассматривать с точностью до послышной, а поля Морса — с точностью до траекторной эквивалентности.

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ МОРСА ПО ПОТОКУ МОРСА С НУМЕРАЦИЕЙ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК

Теорема 1. Пусть M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, Φ — поток Морса с занумерованными седловыми точками на M . Тогда существует функция Морса $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что ее градиентный поток $\text{grad } f$ в некоторой римановой метрике траекторно эквивалентный потоку Φ и значения функции f в седловых точках упорядочены согласно нумерации седловых точек потока.

Доказательство. Сначала подправим поток Φ в окрестностях особых точек. Возьмём окрестность N источника (для определённости), так чтобы ∂N была трансверсальна к траекториям потока. Существует диффеоморфизм $h : N \rightarrow D^2$. В круге возьмём стандартную функцию Морса $f(x, y) = x^2 + y^2$, стандартную метрику из \mathbf{R}^2 и стандартный поток Морса (поток градиента функции в этой метрике). С помощью обратного диффеоморфизма h^{-1} мы получим функцию Морса, метрику и стандартный поток Морса в окрестности особой точки. Заменяем исходный поток в окрестности полученным стандартным потоком и сгладим его на границе N . Для стока всё происходит аналогично, а для седловой точки сглаживание потока производим так, чтобы на ∂N не было разрывов сепаратрис. Таким образом, мы получили немного изменённый, но траекторно эквивалентный исходному, поток. Далее мы будем работать с ним.

Для построения функции используем метод разложения многообразия на ручки с воротниками (см., например, [8]). Возьмём окрестности источников и расположим их в \mathbf{R}^4

так, чтобы заданная в них функция была функцией высоты. Далее к границе каждой окрестности приклеим воротник (трубку). Потом приклеим в нужном месте окрестность устойчивого многообразия (s -сепаратрис) седла под номером 1 (то есть ручку) так, чтобы функция высоты на ней совпадала в окрестности седла с уже заданной. Снова подклеим воротники. И так далее. В конце мы подклеим окрестности стоков. Если на границах приклеиваемых воротников и ручек нарушается гладкость функции, то она сглаживается стандартными методами (см. замечание 3). Этот процесс можно представить себе как вычёрчивание на многообразии линий уровня функции. По построению, мы получили функцию Морса на многообразии гомеоморфном M . Также из построения следует, что вне окрестностей критических точек, линии уровня функции трансверсальны траекториям потока. В окрестностях особых точек потока риманова метрика уже задана, вне этих окрестностей она задаётся так, чтобы скалярное произведение направляющих векторов траектории потока и линии уровня функции было всегда равно нулю. \square

Замечание 3. *В доказательстве теоремы 1 могут возникнуть ситуации, когда нарушается гладкость многообразия, потока или функции при приклеиваниях и замене потока в окрестностях особых точек. Во всех этих случаях сглаживания производятся стандартными методами, описанными, например, в [9] (с. 21–23).*

В доказательстве теоремы, мы построили функцию. Теперь выясним, однозначно ли такое построение.

Лемма 1. *Пусть на многообразии задана функция Морса. Две критические точки соединяются ребром на графе*

Риба тогда и только тогда, когда существует монотонный гладкий путь на многообразии, который соединяет эти точки и не пересекает критических слоёв (кроме своих концов). Под монотонным путём мы понимаем путь, вдоль которого данная функция возрастает. Два седла соединяются двумя рёбрами на графе Риба тогда и только тогда, когда существуют два монотонных гладких пути на многообразии, которые соединяют эти седла и не пересекают критических слоёв (кроме своих концов), причём, эти пути невозможно соединить постоянным путём на многообразии (то есть внутренние точки путей принадлежат разным слоям).

Доказательство. Необходимость следует из определения графа Риба. Достаточность следует из определения графа Риба и того факта, что все регулярные слои функции Морса являются окружностями. \square

Из определения потока градиента следует, что функция должна возрастать вдоль его траекторий. Поэтому, функция Морса из теоремы 1 должна возрастать вдоль сепаратрис изначально заданного потока. Это свойство позволяет, зная поток и нумерацию его сёдел, найти пути из леммы 1, а значит однозначно (с точностью до послышной эквивалентности) найти функцию.

Монотонными путями из леммы 1 для локальных экстремумов будут сепаратрисы. Следовательно, точка минимума соединяется на графе Риба с седлом, которое имеет наименьший номер среди тех сёдел, которые соединены сепаратрисами с источником, который соответствует точке минимума. Аналогично для максимумов.

Возрастающий (для определённости) путь (или пути) из леммы 1 для седловых точек проходит по каноническим

четырёхугольникам, пересекая s - и u -сепаратрисы. Он будет возрастать тогда и только тогда, когда он возрастает на каждом пройденном четырёхугольнике. А этого можно достигнуть, если точка входа в четырёхугольник меньше точки выхода. Последнее определяется лишь номерами седёл-вершин пройденных четырёхугольников, поскольку вариантов входа и выхода — два (через s - или u -сепаратрису), а пройденных четырёхугольников — конечное число. Чтобы проверить, пересекает ли путь критические слои, достаточно проверить существование постоянного пути от каждого из седёл, с номером между номерами концов монотонного пути. Это проверяется аналогично проверке возрастания пути. Кратность рёбер на графе тоже сводится к поиску постоянного пути. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Пусть M — гладкое замкнутое ориентируемое двумерное многообразие, Φ — поток Морса с занумерованными седловыми точками на M . Пусть $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ и $g : M \rightarrow \mathbf{R}$ — такие функции Морса, что их градиентные потоки в некоторых римановых метриках траекторно эквивалентны потоку Φ и значения функций в седловых точках упорядочены согласно нумерации седловых точек потока. Тогда функции f и g послойно эквивалентны.

Замечание 4. Хотя потоку с нумерацией соответствует ровно одна функция, но разным нумерациям седловых точек потока могут соответствовать послойно эквивалентные функции Морса. Более того, разным потокам может соответствовать одна функция.

3. АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЛА НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ МОРСА С НУМЕРАЦИЕЙ И ФУНКЦИЙ МОРСА

В этом разделе будем использовать 3-графы и графы Рибо для построения функции по потоку с нумерацией. Опишем основные идеи следующих алгоритмов: перебора (нахождения всех неэквивалентных) 3-графов с нумерацией без циклов нечётной длины (а значит потоков Морса с нумерацией седел на ориентируемых поверхностях), сравнения двух графов Рибо, построения по 3-графу с нумерацией графа Рибо функции Морса.

3-граф с нумерацией мы будем задавать обычным четырёхвалентным графом с нумерацией вершин, который получается стягиванием su -квадратов в точку, и метками (цифра от 1 до 6) в каждой вершине этого графа, которые позволяют восстановить 3-граф. Эти метки задаются неоднозначно (из-за петель и кратных рёбер в четырёхвалентном графе), но простым перебором всех возможных случаев неоднозначности можно произвести проверку на эквивалентность двух 3-графов с нумерацией. Четырёхвалентный граф будем кодировать списком четырёхэлементных списков, в которых записаны номера инцидентных вершин. Таким образом, нахождение всех потоков Морса с нумерацией сводится к нахождению всех неизоморфных четырёхвалентных графов с нумерацией вершин, приписыванию вершинам каждого из них всевозможных меток и проверкой (для каждого четырёхвалентного графа отдельно) какие наборы меток задают эквивалентные 3-графы с нумерацией. Потом нужно выбрать только графы без нечётных циклов.

Граф Роба будем задавать вспомогательным графом с нумерацией вершин, который получается из него отбрасыванием всех одновалентных вершин (которые соответствуют локальным экстремумам) и рёбер, инцидентных им, а также метками в каждой оставшейся вершине (числа $-1, 1$), которые определяют тип окрестности критического слоя (штаны или перевёрнутые штаны). Неоднозначность тут может возникнуть только из-за нумерации вершин. Следовательно, сравнить два графа Роба можно, перебрав все подстановки на n элементах (где n — количество седёл), и проверив, не совпадают ли их вспомогательные графы с метками после перетасовки вершин одного из них посредством подстановки. Кодировать графы Роба будем n -элементным списком двухэлементных списков, которые содержат номера инцидентных седёл с большим номером и тип окрестности критического слоя.

Назовём путь из леммы 1 допустимым. Будем начинать с меньших по номеру седёл и строить возрастающие пути. Таким образом, не пропустим ни одного пути. Алгоритм построения всех допустимых возрастающих путей из седла a такой. Мы имеем интервал (a, b) , где вначале $b = n + 1$, а n — количество седёл. Начинаем идти от седла a по одному из канонических четырёхугольников (всего их четыре, надо перебрать все). Проверяем противоположное седло с номером i . Если $i < a$, то мы можем выйти через u -сепаратрису. Если $i > b$, то мы можем выйти через s -сепаратрису. Если $i \in (a, b)$, то мы присваиваем $b := i$, отмечаем i как кандидата на конец пути (предыдущего кандидата отбрасываем), и проходим через s -сепаратрису. Эта процедура заканчивается когда мы встретим седло с номером a или b . Тогда, если мы так и не нашли кандидата

на конец пути, делаем вывод, что через этот четырёхугольник невозможно провести возрастающий допустимый путь в седло. Если же кандидат i был найден, то найденный путь от a к i — подозрительный на то, чтобы быть допустимым. Остаётся разобраться какие из найденных путей (мы могли найти максимум 4 пути) действительно не пересекают критических слоёв и соответствуют разным рёбрам на графе Роба.

Поскольку для задания графа Роба нужно найти тип каждого седлового *атома* (то есть окрестности критического слоя седловой точки), то выясним, какие пути являются допустимыми с его помощью. Выпускаем из седла a по одному из канонических четырёхугольников постоянный путь. Проверяем противоположное седло с номером i . Если $i < a$, то можно выйти через u -сепаратрису. Если $i > a$, то можно выйти через s -сепаратрису. Процедура заканчивается, когда мы снова вернёмся в седло a . Проверяем через какой четырёхугольник мы пришли. Если он имеет с начальным четырёхугольником общую s -сепаратрису седла a , то тип атома — штаны (значение -1), если есть общая u -сепаратрису седла a , то тип атома — перевёрнутые штаны (1). Это утверждение следует из леммы 1 и того, что возрастающие пути, которые вышли по четырёхугольникам, имеющим общую s -сепаратрису седла a , всегда можно соединить постоянным путём (он пересечёт эту сепаратрису) (см. рис. 19). Аналогично, пути, которые вышли по четырёхугольникам, которые соединяются постоянным путём, можно соединить постоянным путём, немного приподняв первоначальный постоянный путь (тут рассматриваются только простые функции Морса, и никакое седло не сможет помешать).

Если не нашлось ни одного кандидата на возрастающий путь, то возрастающих рёбер из этого седла в другое седло нет (а есть в максимум(ы)). Далее, если седло соединяется на графе Роба с максимумом, то мы не могли найти возрастающих путей по четырёхугольникам, инцидентным соответствующему стоку. Действительно, это означало бы, что существует седло, соединённое сепаратрисой с этим стоком, и, которое имеет больший за a номер. А это противоречит правилу соединения стоков на графе. К тому же эти монотонные пути существуют парами. Следовательно, если тип атома равен 1 и мы нашли 4 пути, то проводим рёбра к минимальному и к максимальному из их концов. Иначе (при условии что пути есть) мы проводим одно ребро к минимальному концу.

Все вышеназванные пути можно считать путями на 3-графе. Пересекая s -сепаратрису, мы проходим по s -ребру, проходя по каноническому четырёхугольнику от седла к седлу, мы проходим по t -ребру и тому подобное. Канонические четырёхугольники инцидентные седлу соответствуют вершинам su -квадратика. Словом, 3-графы оказываются очень удобными для таких подсчётов.

4. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Рассмотрим поток Морса на сфере S^2 с двумя источниками, двумя седлами и двумя стоками. Источники обозначены буквой A , седла — B , стоки — C . Один сток расположенный на тыльной стороне сферы. Сепаратрисы потока изображены на рисунке 20(a). Построим для этого потока трёхцветный граф. Сфера разбивается на восемь треугольников, следовательно, наш граф будет иметь восемь вершин. Соединяем эти вершины согласно правилу задания трёхцветного графа и получаем граф,

изображённый на рисунке 20(b). При этом s-рёбра изображены сплошной линией, u-рёбра — зигзагом, а t-рёбра — пунктиром. 3-граф (когда седла B_1 и B_2 имеют номера

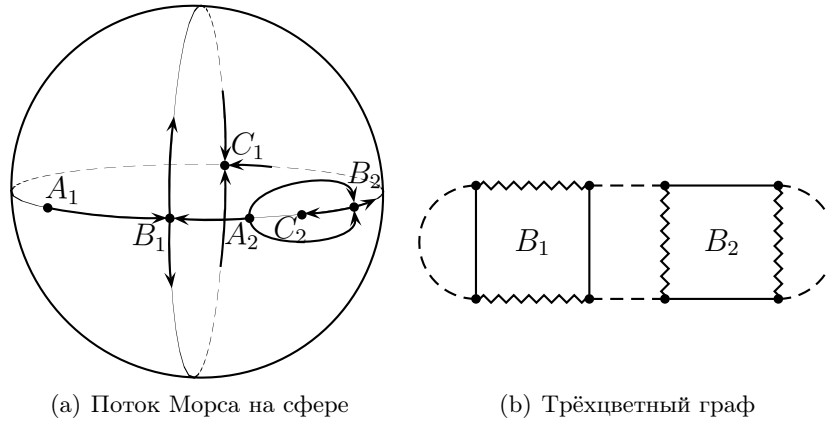


Рис. 20. Поток Морса и его трёхцветный граф

1 и 2, соответственно) кодируется двумя списками: $g = [[1, 1, 2, 2], [1, 1, 2, 2]]$; $u = [4, 1]$, или $u = [4, 2]$, или $u = [6, 1]$, или $u = [6, 2]$ где g задаёт четырёхвалентный граф, а u (возможны четыре варианта) — метки в его вершинах.

Найдём функции Морса на сфере (точнее их графы Рибба), поток градиента каждой из которых в некоторой метрике, будет эквивалентный данному потоку. Рассмотрим два случая:

- (1) $B_1 < B_2$, то есть B_1 имеет номер 1, B_2 — номер 2. Тогда, согласно правилу соединения точек экстремума на графе Рибба (см. доказательство теоремы 2), оба источника соединяются рёбрами с B_1 , а оба стока — с B_2 . Остаётся соединить одним ребром B_1 с B_2 .

- (2) $B_1 > B_2$, то есть B_1 имеет номер 2, B_2 — номер 1. Тогда, согласно правилу соединения точек экстремума на графе Рибо, A_1 соединяется с B_1 , A_2 — с B_2 , C_1 — с B_1 , C_2 — с B_2 . Остаётся соединить одним ребром B_1 с B_2 .

Графы Рибо изображены на рисунке 21.

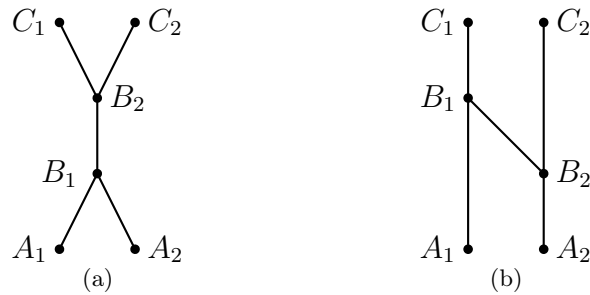


Рис. 21. Графы Рибо, соответствующие потоку

В этом примере не было необходимости анализировать, как соединять между собой седловые точки, они соединились из тех соображений, что граф Рибо — связный (для функции на связной поверхности) и имеет вершины степени не большей за три. В общем случае это нужно делать.

Для графов Рибо, которые приведены на рисунках 21(a) и 21(b), кодирующие списки имеют вид $[[[2], -1], [], 1]$ и $[[[2], 1], [], -1]$, соответственно. Тут коды задаются однозначно, но вообще номера седел, которые не соединены ориентированным путём на графе Рибо, можно упорядочить произвольным образом.

Пример 2. Проиллюстрируем замечание 4 на примере. Рассмотрим поток Морса на сфере с двумя источниками, седлами и стоками, который траекторно неэквивалентный потоку из примера 1. Его траектории и трёхцветный

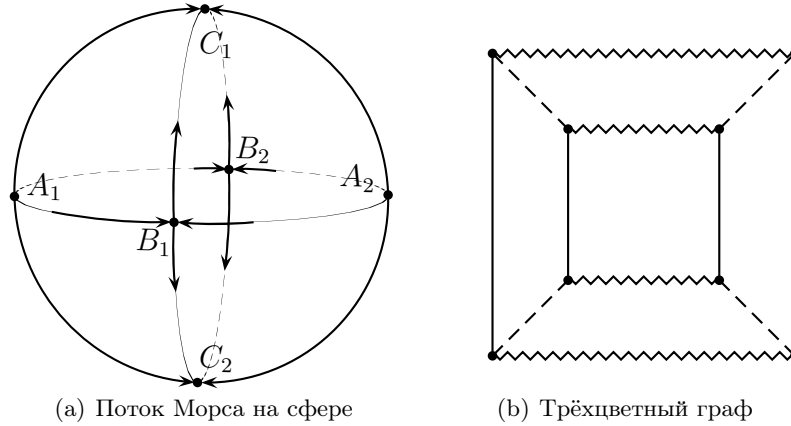


Рис. 22. Симметричный поток Морса и его трёхцветный граф

граф изображены на рис. 22. Поскольку поток симметричен, обе нумерации седел соответствуют одной функции Морса. Так как каждый источник и сток соединяется сепаратрисой с обеими седлами, то получается граф Рыба изображённый на рис. 21(a). Функция Морса, которую он задаёт, соответствует сразу трём потокам Морса с нумерацией седел. Одной нумерации потока из примера 1 и двум нумерациям из настоящего примера.

Пример 3. Найдём вручную все 3-графы, соответствующие потокам Морса с одним седлом. Имеем один квадратик и три способа как провести t -рёбра. 3-графы изображены на рисунке 23. Поскольку тут только одно седло, то нумерации не нужны. Третий поток (рис. 23(c))

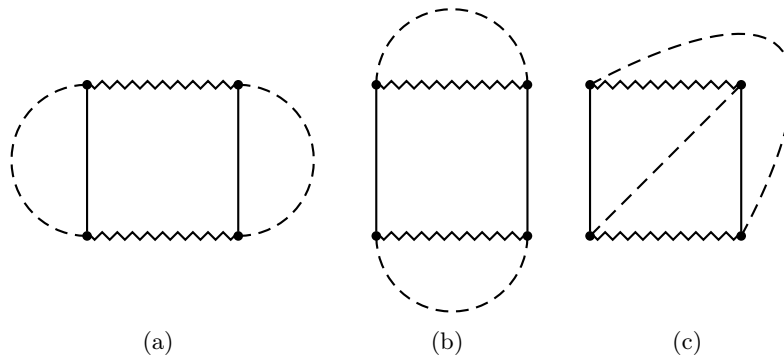


Рис. 23. 3-графы потоков Морса с одним седлом

имеет цикл длины три, следовательно, задан на неориентированной поверхности ($\mathbf{R}P^2$) и нас не интересует. Первый и второй потоки заданы на сфере и имеют два источника и один сток и один источник и два стока, соответственно. Критические точки на графах Рибба соединяются автоматически, поскольку тут только одно седло. Графы Рибба изображены на рисунке 24.

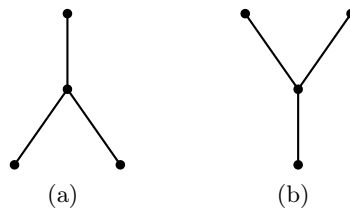


Рис. 24. Графы Рибба функций Морса с одним седлом

5. ВЫВОДЫ

В работе получены следующие результаты.

Доказано, что потоку Морса на ориентированной поверхности с нумерацией седловых точек соответствует ровно одна функция Морса, поток градиента которой в некоторой метрике траекторно эквивалентный начальному, а значения в седловых точках упорядочены согласно нумерации.

Сформулированы алгоритмы построения такой функции как с использованием разложения многообразия на ручки с воротниками, так и с использованием трёхцветных графов. В последнем случае также написана программа.

Сформулирован алгоритм и написана программа перебора 3-графов с нумерацией.

Сформулирован алгоритм и написана программа сравнения двух графов Рибо.

Используя вышеперечисленные алгоритмы и программы, были найдены (на ЭВМ) все неэквивалентные 3-графы с нумерацией без нечётных циклов (а значит потоки Морса с нумерацией на ориентируемых поверхностях) для небольшого количества седловых точек (от 1 до 5). По каждому из них был построен граф Рибо (а значит функция Морса). Из найденных графов Рибо были выбраны неизоморфные (то есть послойно неэквивалентные функции Морса) для каждого значения числа седловых точек. В таблицах 1 и 2 приведено количество потоков и функций в зависимости от рода поверхности, на которой они заданы (сфера, тор и крендель) при фиксированном количестве седловых точек.

Из таблиц видно, что количество потоков Морса с нумерацией, вообще говоря, больше за количество функций Морса. То есть, некоторым потокам Морса с нумерацией соответствуют эквивалентные функции Морса.

$g \backslash n$	1	2	3	4	5
0	2	5	40	976	36256
1	0	1	14	781	47108
2	0	0	0	41	8692
Всего	2	6	54	1798	92056

ТАБЛИЦА 1. Количество потоков Морса с n занумерованными седлами на поверхностях рода g

$g \backslash n$	1	2	3	4	5
0	2	4	14	69	415
1	0	1	7	49	420
2	0	0	0	4	75
Всего	2	5	21	122	910

ТАБЛИЦА 2. Количество функций Морса с n седлами на поверхностях рода g

Результаты подсчётов согласуются с известным количеством неэквивалентных потоков и функций Морса с одним и двумя седлами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Sharko V. V.* On topological equivalence Morse functions on surfaces. // International Conference at Chelyabinsk State Univ. 1996. P. 19–23.
- [2] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях. // Украинський математичний журнал. 2003. Т. 55. № 5. С. 687–700.
- [3] *Kulinich E. V.* On topologically equivalent Morse functions on surfaces. // Methods of Functional Analysis and Topology. 1998. V. 4. № 1. P. 59–64.
- [4] *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 1, 2. Ижевск, Издательский дом „Удмуртский университет“, 1999.

- [5] *Peixoto M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds. // Dynamical systems. New York, Academic Press. 1973. P. 389–419.
- [6] *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях. // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 8. С. 93–140.
- [7] *Smale S.* On gradient dynamical systems. // Annals of Mathematics. 1961. V. 74. P. 199–206.
- [8] *Пришляк О. О.* Теорія Морса. Київ, 2002.
- [9] *Коннер П., Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. Москва, Мир, 1969.