Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 269-308

Сергій Максименко

Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601 Україна
E-mail: `maks@imath.kiev.ua`

Гамільтонові векторні поля однорідних многочленів двох змінних[1]

Нехай $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p\geq 2$, $G=(-g'_y, g'_x)$ — його гамільтонове векторне поле, і $\mathbf{G}$ — локальний потік, породжений G. Позначимо через $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$ множину ростків C^∞ дифеоморфізмів $(\mathbb{R}^2,O)\to(\mathbb{R}^2,O)$, що зберігають орбіти G. Нехай також $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ — компонента лінійної зв'язності тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$, що складається з ростків, які ізотопні $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. В роботі доведено, що якщо g не має простих кратних множників, то кожне відображення $h\in\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ представити у вигляді
$$h(z)=\mathbf{G}_{\alpha(z)}(z)$$
для деякої гладкої функції $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Let $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ be a homogeneous polynomial of degree $p\geq 2$, $G=(-g'_y, g'_x)$ be its Hamiltonian vector field, and $\mathbf{G}_t$ be the local flow generated by G. Denote by $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$ the space of germs of C^∞ diffeomorphisms $(\mathbb{R}^2,O)\to(\mathbb{R}^2,O)$, that preserve orbits of G. Let also $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ be the identity component of $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. Suppose that g has no multiple simple factors. Then we prove that for every $h\in\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ there exists a germ of a smooth function $\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ at O such that
$$h(z)=\mathbf{G}_{\alpha(z)}(z).$$

[1]Робота виконана в рамках цільової програми НАН України “Сучасні методи дослідження математичних моделей в задачах природознавства та суспільних наук” НДР № 0107U00233

© Сергій Максименко, 2006

1. Вступ

Нехай $p > 1$ і $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p+1$, тобто $\deg g \geq 2$. Розкладемо його на незвідні над $\mathbb{R}$ множники:

$$g(x,y) = \prod_{i=1}^{l} L_i(x,y) \cdot \prod_{j=1}^{p+1-l} Q_j(x,y), \tag{1.1}$$

де $L_i = a_i x + b_i y$, $(i = 1, \ldots, l)$ — лінійна функція, а Q_j, $(j = 1, \ldots, n-l)$ — визначена квадратична форма, тобто $Q_j(x,y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $(x,y) = 0$.

Лема 1.1. [5] *Наступні умови для однорідного многочлена g степеня $\deg g \geq 2$ еквівалентні:*

(1) *розклад (1.1) не має кратних множників;*
(2) *жодна з частинних похідних g'_x та g'_y не є тотожним нулем (тобто g залежить від обох змінних x та y) і ці многочлени взаємно прості в кільці $\mathbb{R}[x,y]$.*

У цьому випадку початок координат O є єдиною критичною точкою g.

Означення 1.2 (Властивість $(*)$ для многочлена)**.** *Будемо говорити, що однорідний многочлен $g \in \mathbb{R}[x,y]$ степеня $\deg g \geq 2$ має властивість $(*)$, якщо для нього виконується одна з умов леми 1.1.*

Приклад 1.3. *Для $n \geq 2$ розглянемо функцію*

$$\omega_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \omega_n(z) = z^n.$$

Тоді її дійсна та уявна частини $\mathrm{Re}(z^n)$ та $\mathrm{Im}(z^n)$ мають властивість $(*)$.

Нехай $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле для g. Тоді функція g є постійною уздовж орбіт поля H. Типові приклади шарувань площини $\mathbb{R}^2$ на лінії рівня однорідних многочленів показано на Рис. 4.1 та 4.2.

Відмітимо, що властивість $(*)$ для g можна сформулювати наступним чином: *гамільтонове векторне поле H многочлена g не можна представити у вигляді добутку $H = \omega H_1$, де ω — ненульовий однорідний многочлен степеня $\deg\omega \geq 1$, а H_1 — однорідне (можливо постійне) векторне поле.*

Означення 1.4 (Властивість $(*)$ для векторного поля)**.** *Скажемо, що векторне поле G, визначене в околі початку координат на площині $\mathbb{R}^2$, **має властивість** $(*)$ **в точці** O, якщо знайдуться гладка (C^∞) ніде не рівна нулю функція*

$$\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

локальні координати (x, y) в околі точки O і такий однорідний многочлен $g(x, y)$ з властивістю $(*)$, що

$$G = \eta H,$$

де $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле многочлена g.

З леми 1.1 випливає, що в цьому випадку початок координат $O \in \mathbb{R}^2$ є ізольованою особливою точкою G.

1.5. **Основний результат.** Нехай G — векторне поле, що визначене в деякому околі початку координат $O \in \mathbb{R}^n$. Позначимо через $\hat{\mathcal{E}}(G, O)$ множину ростків C^∞ дифеоморфізмів

$$h : (\mathbb{R}^n, O) \to (\mathbb{R}^n, O),$$

що зберігають орбіти G, тобто $h \in \hat{\mathcal{E}}(G, O)$ якщо знайдеться такий окіл V точки O, що

$$h(\omega \cap V) \subset \omega \tag{1.2}$$

для кожної орбіти ω векторного поля G.

Нехай $\hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ — компонента лінійної зв'язності тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$, що складається з відображень, ізотопних $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ в $\hat{\mathcal{E}}(G,O)$. Позначимо через

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U}_{\mathbf{G}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

локальний потік, породжений полем G. Він визначений на відкритому околі $\mathcal{U}_{\mathbf{G}}$ множини $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Тоді для кожного ростка $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ гладкої функції в точці O можна визначити росток відображення

$$h : (\mathbb{R}^n, O) \to (\mathbb{R}^n, O),$$

заданого наступною формулою:

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \alpha(z)). \tag{1.3}$$

Будемо називати *гладким зсувом* уздовж орбіт G за допомогою функції α. Позначимо через $Sh(G,O)$ множину ростків гладких відображень виду (1.3), де α пробігає множину ростків гладких функцій в точці O. Тоді, [4],

$$Sh(G,O) \subset \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O).$$

В даній роботі доведено наступну теорему, див. §3:

Теорема 1.6. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O. Тоді $Sh(G,O) = \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$. Таким чином, кожне відображення $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G,O)$ можна представити у вигляді* (1.3) *для ростка деякої гладкої функції $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*

Зауваження 1.7. Припустимо, що O є регулярною точкою для G, тобто $G(O) \neq 0$. Тоді кожне відображення, що зберігає орбіти G в околі O є зсувом уздовж орбіт G за допомогою деякої *гладкої* функції α. Для зручності читача, нагадаємо доведення. Дійсно, в околі O можна вибрати координати $(x_1, \dots, x_n)$, в яких $G(x) = (1, 0, \dots, 0)$, а тому

$$\mathbf{G}(x_1, \dots, x_n, t) = (x_1 + t, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо тепер $h = (h_1, \dots, h_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — відображення, що зберігає орбіти G, то $h_i = x_i$ для $2 \leq i \leq n$. Покладемо,

$$\alpha(x) = h_1(x) - x_1. \tag{1.4}$$

Тоді $h(x) = \mathbf{G}(x, \alpha(x))$.

1.8. **Застосування.** В роботі [4] тотожність

$$Sh(G, O) = \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G, O)$$

встановлена для всіх лінійних векторних полів на $\mathbb{R}^n$. Тобто, якщо $G(x) = A \cdot x$ — лінійне векторне поле на $\mathbb{R}^n$, де A — ненульова $(n \times n)$-матриця, то кожне відображення $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G, O)$ можна представити у вигляді

$$h(x) = e^{\alpha(x)A} \cdot x$$

для деякої гладкої функції $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Це дозволило для векторного поля G на многовиді M, яке задовольняє досить слабким умовам, описати гомотопічний тип компонент зв'язності групи $\mathcal{D}(G)$ дифеоморфізмів M, що зберігають орбіти G. Останній результат був суттєво використаний в [3] для опису гомотопічних типів орбіт та стабілізаторів функцій Морса на компактних поверхнях відносно правої дії груп дифеоморфізмів цих поверхонь.

Теорема 1.6 дозволяє провести аналогічний опис гомотопічних типів стабілізаторів та орбіт для більш загального класу функцій на поверхнях. Це буде пророблено в іншій статті.

1.9. **Структура статті.** В §2 наведено означення слабких топологій Уітні. §3 містить план доведення теореми 1.6. За допомогою результатів роботи [5] воно зводиться до розгляду відображень $h \in \hat{\mathcal{E}}_{\mathrm{id}}(G, O)$, які є ∞-близькими до тотожного в точці O, див. твердження 3.4. Для роботи з такими відображеннями виявляється зручним перейти до полярних координат (ϕ, ρ), див. §4. При цьому замість однієї особливої точки $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ми отримаємо цілу пряму особливих точок $\rho = 0$, але вигляд векторного поля G в нових координатах суттєво спрощується.

В §5 показано, що замість гладких функцій на $\mathbb{R}^2$, які є плоскими в точці O, можна розглядати гладкі функції від полярних координат (ϕ, ρ) які є плоскими при $\rho = 0$. Аналогічно в §6 доведено можливість переходу від дифеоморфізмів $\mathbb{R}^2$, які є ∞-близькими до тотожного відображення в точці O, до дифеоморфізмів півплощини полярних координат $\mathbb{H}$, які є ∞-близькими до тотожного в точках $\rho = 0$.

В §7 доводиться твердження 3.4, що завершує теорему 1.6.

2. Неперервні відображення між функціональними просторами

Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина і

$$f = (f_1, \dots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$$

— гладке відображення. Для кожної компактної підмножини $K \subset V$ і цілого невід'ємного числа $r \geq 0$ визначимо *r-норму* f на K за допомогою наступної формули

$$\|f\|_K^r \ = \ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|i| \leq r} \sup_{x \in K} |D^i f_j(x)|,$$

де $i = (i_1, \dots, i_n)$, $|i| = i_1 + \cdots + i_n$, а $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}}$. Для фіксованого r норми $\|f\|_K^r$ визначають *слабку* C_W^r-топологію на $C^\infty(V, \mathbb{R}^m)$, див. [1, 2].

Означення 2.1. *Нехай A, B, C, D — гладкі многовиди,*

$$\mathcal{X} \subset C^\infty(A, B), \qquad \mathcal{Y} \subset C^\infty(C, D)$$

*— дві підмножини, і $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ — відображення. Будемо говорити, що F є $C_{W,W}^{s,r}$**-неперервним**, якщо воно є неперервним з C_W^s-топології на $\mathcal{X}$ в C_W^r-топологію на $\mathcal{Y}$.*

*Назвемо F **ручно-неперервним**, якщо для кожного $r \geq 0$ знайдеться таке ціле число $s = s(r) \geq 0$, що F є $C_{W,W}^{s(r),r}$-неперервним. Очевидно, що кожне ручно-неперервне відображення є $C_{W,W}^{\infty,\infty}$-неперервним.*

Нехай $V \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита підмножина. Тоді мають місце наступні леми, див. [5].

Лема 2.2. *Нехай*

$$D : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

— відображення, визначене за формулою $D(\alpha) = \frac{\partial^{|k|}\alpha}{\partial x^k}$, де

$$k = (k_1, \dots, k_n), \qquad |k| = \sum_{i=1}^n k_i, \qquad \partial x^k = \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}.$$

Тоді D є $C_{W,W}^{r+|k|,r}$-неперервним для всіх $r \geq 0$.

Лема 2.3. *Нехай*

$$Z : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$$

— відображення, визначене за формулою:

$$Z(\alpha)(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \alpha(x_1, \dots, x_n), \qquad \alpha \in C^\infty(V).$$

Тоді Z є ін'єктивним та $C_{W,W}^{r,r}$-неперервним, а обернене до нього Z^{-1} є $C_{W,W}^{r+1,r}$-неперервним.

Лема 2.4 (Лема Адамара)**.** *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така гладка функція, що $f(0) = 0$. Тоді*

$$f(x) = s \underbrace{\int_0^1 f'(tx)dt}_{g(x)} = x\, g(x),$$

де g — теж гладка функція причому $g(0) = f'(0)$. □

Більш загально,

$$f(x+y) = f(x)+y \underbrace{\int_0^1 f'(x+sy)ds}_{g(x,y)} = f(x)+y\cdot g(x,y), \tag{2.1}$$

де g — також гладка функція, причому $g(x, 0) = f'(x)$.

Зокрема, якщо f має обернену функцію f^{-1}, то

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x) + y) &= f(f^{-1}(x)) + y \cdot g(f^{-1}(x), y) = \\ &= x + y \cdot g(f^{-1}(x), y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Доведення теореми 1.6

Ми встановимо більш загальне твердження ніж теорема 1.6. Спочатку сформулюємо декілька означень.

3.1. **Гладкі зсуви уздовж орбіт векторних полів.** Нехай G — гладке векторне поле, визначене на многовиді M і дотичне до ∂M Позначимо через

$$\mathbf{G} : M \times \mathbb{R} \supset \mathcal{U}_{\mathbf{G}} \to M$$

— локальний потік, породжений G, де $\mathcal{U}_{\mathbf{G}}$ — відкритий окіл множини $M \times 0$ в $M \times \mathbb{R}$. Для кожної відкритої множини $V \subset M$ нехай

$$\mathcal{E}(G, V) \ \subset \ C^\infty(V, M)$$

— множина всіх гладких відображень $h : V \to M$, що задовольняють наступним умовам:

(1) $h(\omega \cap V) \subset \omega$ для кожної орбіти ω поля G, зокрема відображення h є нерухомим на множині особливих точок, що містяться в V;

(2) h є локальним дифеоморфізмом в кожній особливій точці поля G.

Нехай $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ — підмножина в $\mathcal{E}(G, V)$, що складається з відображень h, які гомотопні в $\mathcal{E}(G, V)$ тотожному відображенню id_V.

Якщо $V = M$, то множини $\mathcal{E}(G, M)$ та $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, M)$ позначатимемо відповідно через $\mathcal{E}(G)$ та $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Нехай $O \in V$ — особлива точка G. Тоді $h(O) = O$ для кожного $h \in \mathcal{E}(G, V)$. Позначимо через $\mathcal{E}_\infty(G, V, O)$ підмножину в $\mathcal{E}(G, V)$, що складається з відображень h, які є ∞-*близькими* до тотожного відображення в точці O, тобто ∞-джети h та id_V в точці O співпадають.

Теорема 3.2. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O і V — достатньо малий окіл точки O. Тоді для кожного $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ знайдеться окіл $\mathcal{U}_f$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$ відносно C^p_W-топології і ручно-неперервне відображення*

$$\sigma_V \ : \ \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V) \supset \mathcal{U}_f \ \longrightarrow \ C^\infty(V)$$

такі, що

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \sigma_V(h)(z))$$

для кожного $h \in \mathcal{U}_f$.

Крім того, якщо $\deg g \geq 3$, то відображення σ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$.

Доведення базується на наступних двох твердженнях. Перше з них отримане в [5]:

Твердження 3.3. [5] *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O і $U \subset V$ — два достатньо малих околи точки O. Тоді для кожного $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ знайдеться окіл $\mathcal{U}_f$ в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ відносно C^p_W-топології і ручно-неперервне відображення*

$$\Lambda : \mathcal{U}_f \to C^\infty(V)$$

такі, що для кожного $h \in \mathcal{U}_f$

$$\operatorname{supp} \Lambda(h) \subset U,$$

а відображення $\hat{h} : V \to \mathbb{R}$, визначене за формулою

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(h(z), -\Lambda(h)(z)),$$

є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O. Зокрема, $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$.

Крім того, якщо $\deg g \geq 3$, то відображення Λ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Друге твердження буде доведене в §7. Для кожної відкритої множини $V \subset \mathbb{R}^2$ такої, що $O \in V$, позначимо через $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ простір гладких функцій $V \to \mathbb{R}$, що є плоскими в точці O.

Твердження 3.4. *Нехай G — векторне поле на $\mathbb{R}^2$, що має властивість $(*)$ в точці O, і V — достатньо малий відкритий окіл точки O. Тоді існує єдине відображення*

$$\Psi : \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \to \mathrm{Flat}(V, O)$$

таке, що

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(z, \Psi(\hat{h})(z)) \tag{3.1}$$

для кожного $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$. Відображення Ψ є $C^{3r+p,r}_{W,W}$-неперервним для кожного $r \geq 0$.

Тепер можемо довести теорему 3.2. Спочатку відмітимо, що для гладкої функції $\alpha : V \to \mathbb{R}$ та відображення

$$h : V \to \mathbb{R}^2$$

наступні умови еквівалентні:

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \alpha(z)) \qquad \text{та} \qquad z = \mathbf{G}(h(z), -\alpha(z)). \tag{3.2}$$

Нехай $f \in \mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$. Тоді за твердженням 3.3 існує C^{φ}_{W}-окіл $\mathcal{U}_f$ відображення f в $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$ та відображення

$$H : \mathcal{U}_f \to \mathcal{E}_{\infty}(G, V, O), \qquad H(h)(z) = \mathbf{G}(h(z), -\Lambda(h)(z)).$$

Розглянемо відображення $\sigma : \mathcal{U}_f \to C^{\infty}(V)$, визначене за наступною формулою

$$\sigma = \Lambda + \Psi \circ H.$$

Тоді σ задовольняє твердження теореми.

Дійсно, нехай $h \in \mathcal{U}_f$ і $\hat{h} = H(h)$. Тоді

$$\sigma(h) = \Lambda(h) + \Psi \circ H(h) = \Lambda(h) + \Psi(\hat{h}).$$

Тому

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}\big(h(z), -\sigma(h)(z)\big) &= \mathbf{G}\big(h(z), -\Lambda(h)(z) - \Psi(\hat{h})(z)\big) \\
&= \mathbf{G}\Big(\underbrace{\mathbf{G}\big(h(z), -\Lambda(h)(z)\big)}_{\hat{h}}, -\Psi(\hat{h})(z) \Big) \\
&= \mathbf{G}\big(\hat{h}(z), -\Psi(\hat{h})(z)\big) \overset{(3.1)\ \text{та}\ (3.2)}{=\!=\!=\!=\!=} z,
\end{aligned}$$

а отже, згідно (3.2),

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \sigma(h)(z)).$$

Зауважимо, що коли $\deg g \geq 3$, то відображення σ визначене на всьому $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G)$.

Для закінчення теореми 3.2 залишилось довести твердження 3.4. Це буде зроблено в §7.

3.5. **Параметрична версія теореми.** Відмітимо, що коли в твердженнях 3.3 та 3.4 відображення h неперервно залежить від деякого компактного параметру, то Λ, H, Ψ, а тому і σ також неперервно залежать від нього. Для Λ та H це випливає з [5], а для Ψ і σ — це випливатиме з доведення твердження 3.4. Тому має місце наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай G — векторне поле, визначене в деякому відкритому і зв'язному околі V точки $O \in \mathbb{R}^2$ і $\mathbf{G}$ — локальний потік поля G. Припустимо, що O — єдина особлива точка поля G в V, і що G має властивість $(*)$ в $O \in \mathbb{R}^2$. Нехай D — компактний простір і $H : V \times D \to \mathbb{R}^2$ — таке неперервне відображення, що для кожного $t \in D$ відображення*

$$H_t = H(\cdot, t) : V \to \mathbb{R}^2$$

належить до $\mathcal{E}_{\mathrm{id}}(G, V)$. Тоді існує така неперервна функція

$$\sigma : V \times D \to \mathbb{R},$$

що для кожного $t \in D$ функція $\sigma_t = \sigma(\cdot, t) : V \to \mathbb{R}$ є гладкою і

$$H(x, t) = \mathbf{G}(x, \sigma(x, t)).$$

Припустимо, що D — зв'язний простір. Якщо σ_1 — інша функція зсуву для H і $\sigma(x_0, t_0) = \sigma_1(x_0, t_0)$ для деякої точки $(x_0, t_0) \in V \times D$, то σ та σ_1 співпадають скрізь на $V \times D$.

Доведення повторює аргументи теореми 25 з [4]. Деталі ми залишаємо читачеві.

4. Полярні координати

Нехай $\mathbb{H} = \{(\phi, \rho) \mid \rho \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ – верхня замкнена півплощина в $\mathbb{R}^2$ з декартовими координатами, які позначимо через (ϕ, ρ). Нехай також $\partial\mathbb{H} = \{\rho = 0\}$ — границя $\mathbb{H}$ (тобто вісь $O\phi$), а $\overset{\circ}{\mathbb{H}} = \{\rho > 0\}$ — внутрішність $\mathbb{H}$. Візьмемо іншу копію $\mathbb{R}^2$ з координатами (x, y) і розглянемо відображення

$$P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P_k(\phi, \rho) = (\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi).$$

Для $k = 1$ воно визначає так звані *полярні* координати на $\mathbb{R}^2$. Відображення P_1 будемо також позначати через P.

Очевидно, $P_k(\partial\mathbb{H}) = 0 \in \mathbb{R}^2$, а обмеження P_k на $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ є накриваючим відображенням $P_k : \overset{\circ}{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Відповідна група автоморфізмів ізоморфна $\mathbb{Z}$ і діє на $\mathbb{H}$ за наступним правилом

$$n \cdot (\phi, \rho) = (\phi + 2\pi n, \rho).$$

Лема 4.1. *Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p + 1$ і $\phi_0 \in \mathbb{R}$. Тоді існують такі єдині числа ϕ_i, $(i = 1, \dots, l)$,*

$$\phi_0 - \frac{\pi}{2} \ \le\ \phi_1 \ \le\ \dots\ \le \phi_l \ <\ \phi_0 + \frac{\pi}{2}$$

та гладка функція γ, що $\gamma(\phi) \neq 0$ для $\phi \in (\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$ і

$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \gamma(\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} (\phi - \phi_i).$$

Доведення. Відмітимо, що існує єдиний розклад многочлена g на множники наступного виду:

$$g(x, y) = \tau(x, y) \cdot \prod_{i=1}^{l} (b_i x + a_i y), \tag{4.1}$$

де

$$a_i = \cos\phi_i, \qquad b_i = \sin\phi_i,$$

для єдиних $\phi_i \in [\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$, $(i = 1, \dots, l)$ таких, що

$$\phi_i \le \phi_{i+1},$$

а τ — однорідний многочлен степеня $p+1-l$ такий, що

$$\tau(x,y) > 0, \qquad \text{для } (x,y) \neq 0.$$

Тому

$$b_i x + a_i y = \sin\phi_i \cdot \rho\cos\phi + \cos\phi_i \cdot \rho\sin\phi = \rho \cdot \sin(\phi - \phi_i),$$

а отже

$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \tau(\cos\phi, \sin\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} \sin(\phi - \phi_i).$$

Відмітимо, що функція $\frac{\sin(\phi-\phi_i)}{(\phi-\phi_i)}$ є гладкою та додатною на інтервалі $(\phi_i - \pi, \phi_i + \pi)$ і $\tau(\cos\phi, \sin\phi) > 0$ для кожного ϕ. Тому

$$g(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi) = \rho^{p+1} \cdot \gamma(\phi) \cdot \prod_{i=1}^{l} (\phi - \phi_i),$$

для деякої гладкої функції $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma(\phi) \neq 0$ для всіх $\phi \in (\phi_0 - \frac{\pi}{2}, \phi_0 + \frac{\pi}{2})$. □

Приклад ліній рівня однорідного многочлена $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ та відображення $g \circ P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ зображено на Рис. 4.1 для $l = 0$ та на Рис. 4.2 для $l \ge 1$.

4.2. **Підняття векторних полів з $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{H}$.** Нехай G — гладке векторне поле, визначене в околі V початку координат $O \in \mathbb{R}^2$. Покладемо

$$U = P_k^{-1}(V) \subset \mathbb{H}.$$

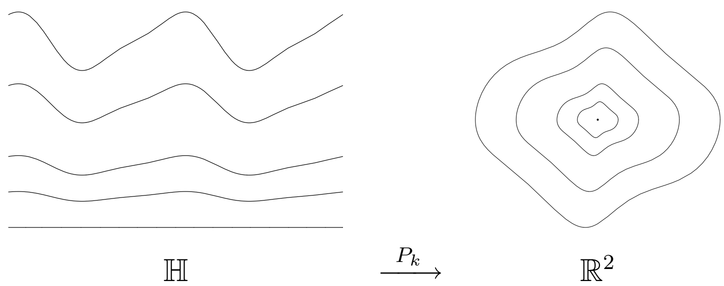

Рис. 4.1. $l = 0$.

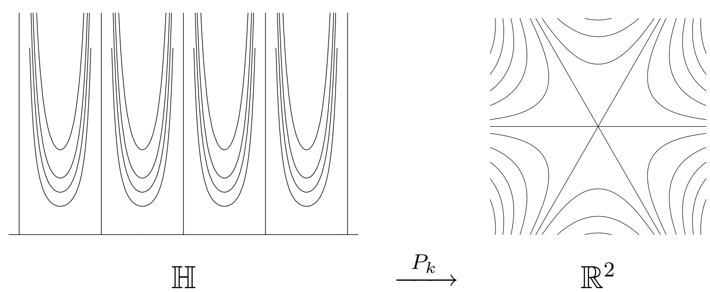

Рис. 4.2. $l \geq 1$.

Якщо $G(O) = 0$, то знайдеться єдине $\mathbb{Z}$-інваріантне векторне поле F на U, що рівне нулю на $\partial\mathbb{H}$, і таке, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{tikzcd} & TU \arrow[r, "TP_k"] & TV & \\ \mathbb{H} \supset & U \arrow[u, "F"] \arrow[r, "P_k"] & V \arrow[u, "G"'] & \subset \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Відмітимо, що в загальному випадку F є гладким на $U \cap \mathring{\mathbb{H}}$ і лише *неперервним* на $\mathbb{H}$.

Нехай $\mathbf{F}_t$ та $\mathbf{G}_t$ — локальні потоки, породжені відповідно F та G. Тоді для кожного $t \in \mathbb{R}$ наступна діаграма є комутативною:

$$
(4.3)\quad
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{\mathbf{F}_t} & \mathbb{H} \\
{\scriptstyle P_k}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_k} \\
V & \xrightarrow{\mathbf{G}_t} & \mathbb{R}^2
\end{array}
\qquad \text{тобто} \qquad P_k \circ \mathbf{F}_t(x) = \mathbf{G}_t \circ P_k(x),
$$

за умови, що обидві частини цієї рівності визначені.

Лема 4.3. *Припустимо, що точки $a, a' \in U$ належать одній орбіті потоку $\mathbf{F}$. Тоді точки $b = P_k(a)$ та $b' = P_k(a')$ також належать одній орбіті потоку $\mathbf{G}$, див. Рис. 4.3. Крім того, час між точками a та a' відносно $\mathbf{F}$ дорівнює часу між b та b' відносно $\mathbf{G}$.*

Доведення. Дійсно, нехай $a' = \mathbf{F}_\tau(a)$. Тоді

$$b' = P_k(a') = P_k \circ \mathbf{F}_\tau(a) = \mathbf{G}_\tau \circ P_k(a) = \mathbf{G}_\tau(b).$$

Лему доведено. $\square$

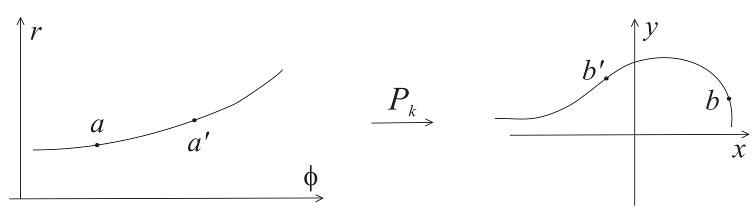

Рис. 4.3

Лема 4.4. *Нехай $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — однорідний многочлен степеня $p + 1 \geq 2$, $H = (-g'_y, g'_x)$ — його гамільтонове* *векторне поле, а* $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *— гладка, ніде не рівна нулю функція. Розглянемо наступне векторне поле*

$$G = \eta H = \eta \cdot (-g'_y, g'_x)$$

і нехай $F = (F_1, F_2)$ *— векторне поле на* $\mathbb{H}$ *індуковане полем* G *за допомогою відображення*

$$P_1 = P : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(\phi, \rho) = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi).$$

Запишемо g *у наступному вигляді:*

$$g(x, y) = y^a R(x, y),$$

де $a \geq 0$*, а многочлен* R *не ділиться на* y*. Тоді*

$$F_1(\phi, \rho) = \frac{(p+1) \cdot g(P(\phi, \rho))}{\rho^2} = \rho^{p-1} \phi^a \gamma_1(\phi) \tag{4.4}$$

для деякої гладкої функції $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *такої, що* $\gamma_1(0) \neq 0$*.*

Більш того, якщо $a \geq 1$*, то*

$$F_2(\phi, \rho) = \rho^p \phi^{a-1} \gamma_2(\phi), \tag{4.5}$$

де $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— така гладка функція, що* $\gamma_2(0) \neq 0$*.*

Наслідок 4.5. *Якщо* g *має властивість* $(*)$*, то* $a = 0$ *або* 1*. Звідки*

$$F_1(\phi, \rho) = \rho^{p-1} \gamma_1(\phi), \quad \text{при} \ \ a = 0,$$
$$F_2(\phi, \rho) = \rho^p \gamma_2(\phi), \quad \text{при} \ \ a = 1.$$

Таким чином, в обох випадках хоча б одна з координатних функцій поля F *не ділиться на* ϕ*.*

Доведення леми 4.4. Зауважимо, що для однорідного многочлена g степеня $p+1$ виконується наступна *тотожність Ейлера*:

$$x g'_x + y g'_y = (p+1) g. \tag{4.6}$$

Крім того, з леми 4.1 випливає, що кожен множник y в g дає множник ϕ в $g \circ P$. Тому

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1}\, \phi^a\, \gamma_1(\phi), \tag{4.7}$$

для деякої гладкої функції $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma_1(0) \neq 0$.

Розглянемо матрицю Якобі відображення P:

$$J(P) = \begin{pmatrix} -\rho \sin\phi & \cos\phi \\ \rho\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix}.$$

Тоді з комутативності діаграми (4.2) випливає, що

$$G \circ P = J(P) \cdot F,$$

тобто

$$\begin{pmatrix} G_1 \circ P \\ G_2 \circ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \sin\phi & \cos\phi \\ \rho\cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho}\sin\phi & \frac{1}{\rho}\cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1 \circ P \\ G_2 \circ P \end{pmatrix},$$

а отже

$$F_1 = \frac{-(G_1 \circ P) \cdot \sin\phi + (G_2 \circ P) \cdot \cos\phi}{\rho}.$$

Позначимо

$$A(x,y) = \frac{-yG_1 + xG_2}{x^2+y^2} = \frac{yg'_y + xg'_x}{x^2+y^2} \cdot \eta \xlongequal{(4.6)} \frac{(p+1)g}{x^2+y^2} \cdot \eta.$$

Тоді

$$F_1 = A \circ P \xlongequal{(4.7)} \rho^{p-1}\, \phi^a\, \gamma_1(\phi).$$

Аналогічно,

$$F_2 = (G_1 \circ P) \cdot \cos\phi + (G_2 \circ P) \cdot \sin\phi.$$

Покладемо

$$B(x,y) = \frac{xG_1 + yG_2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xg'_y + yg'_x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \eta. \tag{4.8}$$

Тоді $F_2 = B \circ P$. Так як чисельник останнього дробу є однорідним многочленом степеня $p+1$, то з леми 4.1 випливає, що

$$F_2 = \rho^p \, \phi^{a_1} \, \gamma_2(\phi),$$

для деякого $a_1 \geq 0$ та гладкої функції $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такої, що $\gamma_2(0) \neq 0$.

Залишається довести, що коли $a \geq 1$, то

$$a_1 = a - 1.$$

Це рівносильно тому, що чисельник

$$N = -xg'_y + yg'_x$$

останнього дробу в формулі (4.8) ділиться на y^{a-1}, але не на y^a.

Відмітимо, що

$$g'_x = y^a R'_x, \qquad g'_y = ay^{a-1}R + y^a R'_y.$$

Тоді

$$N = -xg'_y + yg'_x = -axy^{a-1}R - xy^a R'_y + y^{a+1}R'_x$$

Так як R не ділиться на y, то N ділиться на y^{a-1}, але не на y^a. $\square$

5. Відповідність між гладкими функціями

Нагадаємо, що гладка функція $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ називається *плоскою* на множині $K \subset \mathbb{R}^n$, якщо всі частинні похідні α дорівнюють нулю в кожній точці $x \in K$.

Позначимо через $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ множину гладких функцій $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, які є плоскими в точці O, а через $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$

— множину гладких $\mathbb{Z}$-інваріантних функцій $\hat{\alpha} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, які є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Теорема 5.1. *Відображення*

$$P_k : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P_k(\phi, \rho) = (\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi)$$

індукує біекцію

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}), \qquad \mathbf{f}_k(\alpha) = \alpha \circ P_k,$$

яка для кожного $r \geq 0$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервною, а обернене до неї відображення $\mathbf{f}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним.

Доведення. Для кожного $r = 0, \dots, \infty$ позначимо через $\mathrm{Func}^r(\mathbb{R}^2, O)$ простір C^r-функцій $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таких, що $\alpha(O) = 0$. Нехай також $\mathrm{Func}^r(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ — простір $\mathbb{Z}$-інваріантних C^r-функцій

$$\hat{\alpha} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$$

таких, що $\hat{\alpha}(\partial\mathbb{H}) = 0$.

Тоді для кожної функції $\alpha \in \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O)$ функція

$$\hat{\alpha} = \alpha \circ P_k$$

є $\mathbb{Z}$-інваріантною, неперервною на $\mathbb{H}$ і рівною нулю на $\partial\mathbb{H}$, тобто $\hat{\alpha} \in \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому коректно визначено наступне відображення

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}), \qquad \mathbf{f}_k(\alpha) = \alpha \circ P_k. \tag{5.1}$$

Навпаки, кожна функція $\hat{\alpha} \in \mathrm{Func}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ індукує єдину функцію $\alpha \in \mathrm{Func}^0(\mathbb{R}^2, O)$. Тому $\mathbf{f}_k$ є біекцією.

Так як відображення P_k гладке, то

$$\mathbf{f}_k\big(\,\mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O)\,\big) \;\subset\; \mathrm{Func}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

а відповідне обмеження $\mathbf{f}_k$ на $\mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$

$$\mathbf{f}_k : \mathrm{Func}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Func}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним для кожного $r = 0, \dots, \infty$. Відмітимо, що відображення $\mathbf{f}_k$ не є сюр'єктивним: наприклад, функція ρ є гладкою та $\mathbb{Z}$-інваріантною на $\mathbb{H}$, в той час як її прообраз

$$\mathbf{f}_k^{-1}(\rho) = (x^2 + y^2)^{1/2k}$$

— не є гладкою функцією в точці O.

Припустимо, що функція α є плоскою в точці O. Тоді неважко бачити, що $\hat{\alpha}$ є плоскою на всій прямій $\partial\mathbb{H}$, тобто

$$\mathbf{f}_k(\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)) \subset \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Наступна лема 5.2 стверджує, що насправді

$$\mathbf{f}_k(\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)) = \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

а обернене відображення $\mathbf{f}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним для всіх $r \geq 0$.

Лема 5.2. *Нехай* $\hat{\alpha} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, $\alpha = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})$ *і*

$$D\alpha = \frac{\partial^{a+b}\alpha}{\partial x^a\, \partial y^b} \tag{5.2}$$

— частинна похідна α *порядку* $a + b$.

(i) *Тоді* $D\alpha$ *є сумою скінченного числа функцій виду*

$$\frac{A \cdot B}{(x^2 + y^2)^{s/2k}},$$

де $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *— є гладкою функцією, що не залежить від* α,

$$B = \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{\partial^j \hat{\alpha}}{\partial \phi^{j_1}\, \partial \rho^{j_2}}\right), \qquad j = j_1 + j_2 \ \leq\ a + b,$$

а s *— таке натуральне число, що* $s/2k \leq a + b$. *Загальна кількість таких функцій залежить лише від* a *та* b *і не залежить від* α.

(ii) *функція* $D\alpha$ *є неперервною на площині* $\mathbb{R}^2$*, причому* $D\alpha(O) = 0$*. Звідси випливає, що* α *є гладкою на всій площині* $\mathbb{R}^2$ *і плоскою в точці* $O \in \mathbb{R}^2$*. Це означає, що* $\alpha \in \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$*. Тому* $\mathbf{f}_k$ *є бієкцією між* $\mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$ *та* $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$*.*

(iii) *Для кожного* $r \geq 0$ *та компакту* $K \subset \mathbb{R}^2$ *має місце наступна оцінка:*

$$\|\alpha\|_K^r \leq C \|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}, \tag{5.3}$$

де

$$L \;=\; P_k^{-1}(K) \;\;\cap\;\; [0, 2\pi] \times [0, \infty), \tag{5.4}$$

а $C > 0$ *не залежить від* $\hat{\alpha}$*. Тому обернене відображення* $\mathbf{f}_k^{-1}$ *є* $C_{W,W}^{(2k+1)r,r}$*-неперервним.*

Перед тим, як доводити цю лему, отримаємо декілька формул.

5.3. **Формули для відображення P_k^{-1} та його похідних.** Нехай $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Очевидно, що $x^2 + y^2 = \rho^{2k}$. Для простоти можна вважати, що $x > 0$. Тоді

$$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2k}}, \qquad \phi = \arctan(y/x) + 2\pi n,$$

для деякого $n \in \mathbb{Z}$, а тому

$$\phi'_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \qquad \phi'_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$
$$\rho'_x = \frac{x}{k\,(x^2 + y^2)^{1 - \frac{1}{2k}}}, \qquad \rho'_y = \frac{y}{k\,(x^2 + y^2)^{1 - \frac{1}{2k}}}.$$

Аналогічно, для кожних $a, b \geq 0$ знайдуться такі гладкі функції $\mu_i, \nu_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, a+b)$, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{a+b}\phi}{\partial x^a \partial y^b} &= \sum_{i=1}^{a+b} \frac{\mu_i}{(x^2+y^2)^{a+b}}, \\ \frac{\partial^{a+b}\rho}{\partial x^a \partial y^b} &= \sum_{i=1}^{a+b} \frac{\nu_i}{(x^2+y^2)^{a+b-\frac{1}{2k}}}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ці формули, очевидно, не залежать від часткового вибору для виразу ϕ через x та y.

Доведення леми 5.2. (i) Розглянемо похідну α'_x. Нехай

$$z = (x, y) \neq O.$$

Тоді в достатньо малому околі U_z точки z можна визначити обернене відображення $P_k^{-1} : U_z \to \mathbb{H}$ так, що

$$\alpha = \hat{\alpha} \circ P_k^{-1}.$$

Тому

$$\alpha'_x = (\hat{\alpha}'_\phi \circ P_k^{-1}) \cdot \phi'_x + (\hat{\alpha}'_\rho \circ P_k^{-1}) \cdot \rho'_x.$$

Відмітимо, що кожна частинна похідна функції

$$\hat{\alpha} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

також належить до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому з формули (5.1) випливає, що ця похідна визначає єдину неперервну функцію на U_z. Звідси отримуємо шукане представлення:

$$\alpha'_x = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\phi) \cdot \phi'_x + \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\rho) \cdot \rho'_x = \\ = \frac{-y \cdot \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\phi)}{x^2+y^2} + \frac{x \cdot \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha}'_\rho)}{k(x^2+y^2)^{1-\frac{1}{2k}}}.$$

Доведення для інших похідних функції α аналогічне.

(ii) Покажемо неперервність $D\alpha$. Позначимо

$$D^j\hat{\alpha} = \frac{\partial^j\hat{\alpha}}{\partial\phi^{j_1}\,\partial\rho^{j_2}}.$$

Так як $D^j\hat{\alpha}$ є плоскою на $\partial\mathbb{H}$, то знайдеться така гладка функція $\xi \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, що $D^j\hat{\alpha} = \rho^s\xi$. Тому

$$B = \mathbf{f}_k^{-1}(D^j\hat{\alpha}) = \mathbf{f}_k^{-1}(\rho^s)\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi) = (x^2+y^2)^{s/2k}\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi),$$

а отже функція

$$\frac{AB}{(x^2+y^2)^{s/2k}} = A\,\mathbf{f}_k^{-1}(\xi) \tag{5.6}$$

є неперервною. Тоді неперервною буде і похідна $D\alpha$. Відмітимо, що $\xi(\phi, 0) = 0$. Тому $\mathbf{f}_k^{-1}(\xi_i)(O) = 0$, а отже,

$$D\alpha(O) = 0.$$

(iii) Нехай $\alpha = \mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})$. Потрібно оцінити $\|\alpha\|_K^r$. Помітимо, що підмножина $L \subset \mathbb{H}$, визначена за формулою (5.4), є компактною і $P(L) = K$. Тому

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_k^{-1}(\hat{\alpha})\|_K^0 \;=\; \|\alpha\|_K^0 \;=\; \sup_{x\in K}|\alpha(x)| \;&= \\ = \sup_{(\phi,\rho)\in L}|\hat{\alpha}(\phi,\rho)| \;&=\; \|\hat{\alpha}\|_L^0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

З (ii) та (5.6) випливає, що кожну частинну похідну $D\alpha$ функції α порядку r можна представити у вигляді

$$D\alpha = \sum_i A_i \cdot \mathbf{f}^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right),$$

де кожна A_i є гладкою на всій площині $\mathbb{R}^2$, $D^{j_i}\hat{\alpha}$ є частинною похідною функції $\hat{\alpha}$ порядку $j_i \le r$, а $s_i \le 2kr$.

Неважко бачити, що для кожного i знайдуться константи C_1, C_2, $C_3 > 0$, які не залежать від $\hat{\alpha}$, і такі, що

$$(5.8)\quad \left\| \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right)\right\|_K^0 \overset{(5.7)}{=\!=\!=} \left\|\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{s_i}}\right\|_L^0 \overset{(\text{лема } 2.3)}{\leq}$$

$$\leq\; C_1\,\|D^{j_i}\hat{\alpha}\|_L^{s_i} \overset{(\text{лема } 2.2)}{\leq} C_2\,\|\hat{\alpha}\|_L^{s_i+j_i} \overset{(5.5)}{\leq} C_3\,\|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}.$$

Тому існує таке $C_4 > 0$, що

$$\|D\alpha\|_K^0 \;\leq\; \sum_i \left\| A_i\cdot \mathbf{f}_k^{-1}\left(\frac{D^{j_i}\hat{\alpha}}{\rho^{k_i}}\right)\right\|_K^0 \;\leq\; C_4\,\|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}.$$

Таким чином $\|\alpha\|_K^r \leq C\|\hat{\alpha}\|_L^{(2k+1)r}$ для деякого $C > 0$, що залежить від K та r і не залежить від $\hat{\alpha}$. □

Теорему 5.1 доведено.

6. Відповідність між гладкими відображеннями, що є ∞-близькими до тотожного

Позначимо через $\mathrm{Map}^{\infty}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ множину всіх гладких відображень

$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

що задовольняють наступним умовам:

(i) $\hat{h}$ є $\mathbb{Z}$-еквіваріантним, тобто

$$(6.1)\quad \hat{h}_1(\phi+2\pi, \rho) = \hat{h}_1(\phi, \rho)+2\pi, \qquad \hat{h}_2(\phi+2\pi, \rho) = \hat{h}_2(\phi, \rho).$$

(ii) $\hat{h}$ є нерухомим на $\partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}(\mathring{\mathbb{H}}) \subset \mathring{\mathbb{H}}$;

(iii) h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$, тобто наступні функції

$$\hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi, \qquad \hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho$$

є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Позначимо через $\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$ множину гладких відображень $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таких, що $h^{-1}(O) = O$ і h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в початку координат O.

Лема 6.1. *Нехай $\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ — відображення. Позначимо*

$$\hat{\alpha}(\phi, \rho) = \hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi, \qquad \hat{\beta}(\phi, \rho) = \hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho.$$

Тоді $\hat{h}$ є $\mathbb{Z}$-еквіваріантним тоді і лише тоді, коли функції $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$ є $\mathbb{Z}$-інваріантними.

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{\alpha}(\phi, \rho) &= \hat{h}_1(\phi + 2\pi, \rho) - \phi - 2\pi - (\hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi) \\
&= \hat{h}_1(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{h}_1(\phi, \rho) - 2\pi, \\
\hat{\beta}(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{\beta}(\phi, \rho) &= \hat{h}_2(\phi + 2\pi, \rho) - \rho - (\hat{h}_2(\phi, \rho) - \rho) \\
&= \hat{h}_2(\phi + 2\pi, \rho) - \hat{h}_2(\phi, \rho).
\end{aligned}$$

Тепер наше твердження випливає з цих тотожностей та формули (6.1). □

Теорема 6.2. *Відображення P_k індукує бієкцію*

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}),$$

яка для кожного $r \geq 0$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервною, а обернена до неї, $\mathbf{m}_k^{-1}$, є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервною.

Доведення. Позначимо через $\mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ множину всіх неперервних $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень $\hat{h} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, які є нерухомими на $\partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}(\mathring{\mathbb{H}}) \subset \mathring{\mathbb{H}}$.

Нехай також $\mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O)$ — множина таких неперервних відображень $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, що $h^{-1}(O) = O$.

Тоді кожне $\hat{h} \in \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ індукує таке єдине відображення $h \in \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O)$, що наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathbb{H} \\ {\scriptstyle P_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P_k} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

тобто $h \circ P_k = P_k \circ \hat{h}$. В координатній формі це означає, що

$$\begin{aligned} h_1(\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi) &= \hat{h}_2(\phi,\rho)^k \cdot \cos\hat{h}_1(\phi,\rho) \\ h_2(\rho^k \cos\phi, \rho^k \sin\phi) &= \hat{h}_2(\phi,\rho)^k \cdot \sin\hat{h}_1(\phi,\rho). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для кожної такої пари h та $\hat{h}$ будемо використовувати наступні позначення

$$\hat{\alpha}(\phi,\rho) = \hat{h}_1(\phi,\rho) - \phi, \qquad \hat{\beta}(\phi,\rho) = \hat{h}_2(\phi,\rho) - \rho, \tag{6.3}$$

$$\gamma(x,y) = h_1(x,y) - x, \qquad \delta(x,y) = h_2(x,y) - y. \tag{6.4}$$

Таким чином відповідність $\hat{h} \mapsto h$ є коректно визначеним відображенням

$$\mathbf{m}'_k : \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O).$$

Наша мета довести, що $\mathbf{m}'_k$ індукує бієкцію

$$\mathbf{m}_k^{-1} : \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O).$$

Спочатку покажемо, що образ $\mathbf{m}'_k$ містить $\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$. Дійсно, нехай $h \in \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$. Так як h належить класу C^1 (в дійсності C^∞) та є 1-близьким (в дійсності ∞-близьким) до тотожного відображення $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то дотичне відображення

$$T_O h : T_O\mathbb{R}^2 \to T_O\mathbb{R}^2$$

є тотожним. Тому h індукує єдине відображення $\hat{h}$, яке є нерухомим на $\partial\mathbb{H}$. Більш того, так як $h^{-1}(O) = O$, то $\hat{h}^{-1}(\mathring{\mathbb{H}}) = \mathring{\mathbb{H}}$. Це означає, що $\hat{h} \in \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ і $\mathbf{m}'_k(\hat{h}) = h$.

Відмітимо також, що із єдиності такого відображення $\hat{h}$ випливає, що на $\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$ визначене обернене до $\mathbf{m}'_k$ відображення

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Залишається довести наступну лему.

Лема 6.3. $\mathbf{m}_k(\mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)) = \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. *Причому для кожного* $r \geq 0$ *відображення обмеження*

$$\mathbf{m}_k : \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

є $C^{r,r}_{W,W}$*-неперервним, а обернене до нього*

$$\mathbf{m}_k^{-1} : \mathrm{Map}^\infty_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) \to \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$$

— $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$*-неперервним.*

Доведення. Нехай $h \in \mathrm{Map}^\infty(\mathbb{R}^2, O)$ і $\hat{h} = \mathbf{m}_k(h)$. Досить довести, що $\hat{h}$ є гладким та ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$ в околі точки $(0,0) \in \mathbb{H}$.

Так як $h(O) = O$ і h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то

$$(6.5)\quad h_1(x,y) = x + xa_1 + yb_1, \qquad h_2(x,y) = y + xa_2 + yb_2,$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathrm{Flat}(\mathbb{R}^2, O)$.

Тоді з (6.2) та (6.5) випливає, що

$$(h_1 \circ P_k)^2 + (h_2 \circ P_k)^2 = \hat{h}_2^2 = \rho^{2k} \cdot (1 + \omega(\phi, \rho)),$$

$$2 \cdot (h_1 \circ P_k) \cdot (h_2 \circ P_k) = \hat{h}_2^{2k} \cdot \sin 2\hat{h}_1 = \rho^{2k} \cdot (\sin 2\phi + \xi(\phi, \rho))$$

де $\omega, \xi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — гладкі функції, плоскі на $\partial\mathbb{H}$. Тоді

$$\sin 2\hat{h}_1 = \frac{\sin 2\phi + \xi}{1+\omega} = (\sin 2\phi + \xi)(1 - \omega + \omega^2 - \cdots) = \\ = \sin 2\phi + \psi,$$

де ψ є гладкою в околі точки $(0,0) \in \mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$. Тому з (2.2) випливає, що

$$\hat{h}_1 = \frac{1}{2}\ \arcsin(\sin 2\phi + \psi) \overset{(2.2)}{=\!=\!=} \phi + \psi \cdot \tau(\phi, \rho),$$

де τ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Отже $\hat{h}_1(\phi, \rho) - \phi$ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$.

Залишається довести гладкість $\hat{h}_2$ в кожній точці $(\phi_0, 0)$. Нехай $A = \cos\phi_0$, $B = \sin\phi_0$. Тоді з (6.2) та (6.5) випливає, що

$$A \cdot h_1 \circ P_k + B \cdot h_1 \circ P_k \overset{(6.2)}{=\!=\!=} \hat{h}_2^k \cdot (A\cos\hat{h}_1 + B\sin\hat{h}_1) = \\ = \hat{h}_2^k \cos(\hat{h}_1 - \phi_0).$$

$$A \cdot h_1 \circ P_k + B \cdot h_1 \circ P_k \overset{(6.5)}{=\!=\!=} \rho^k(A\cos\phi + B\sin\phi + c) = \\ = \rho^k(\cos(\phi - \phi_0) + c),$$

де $c \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Прирівнявши останні частини обох рівностей, отримаємо, що

$$\hat{h}_2(\phi, \rho) = \rho \cdot \underbrace{\sqrt[k]{\frac{\cos(\phi - \phi_0) + c}{\cos(\hat{h}_1 - \phi_0)}}}_{\eta} = \rho \cdot \eta(\phi, \rho) \tag{6.6}$$

Так як $\hat{h}_1$ є гладким, а $\hat{h}_1 - \phi$ — плоским на $\partial\mathbb{H}$, то в околі точки $(\phi_0, 0)$ функція η є гладкою, а $\eta - 1$ — плоскою.

Звідси

$$\hat{h}_2 = \rho + \hat{\beta},$$

де $\beta \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Крім того, бачимо, що $\mathbf{m}_k$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним.

Розглянемо тепер відображення $\mathbf{m}_k^{-1}$. Нехай

$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathrm{Map}^{\infty}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$$

і

$$h = \mathbf{m}_k^{-1}(\hat{h}) = (h_1, h_2) \ \in \ \mathrm{Map}^0(\mathbb{R}^2, O).$$

За умовою $\hat{\alpha}$ та $\hat{\beta}$ є плоскими на $\partial\mathbb{H}$ і за лемою 6.1 ці функції $\mathbb{Z}$-інваріантні. Тому $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Покажемо, що γ та δ є гладкими та плоскими в точці $O \in \mathbb{R}^2$. За теоремою 5.1 досить встановити, що $\gamma \circ P_k$ та $\delta \circ P_k$ належать до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$.

З (2.1) випливає, що знайдуться такі гладкі функції

$$\mu, \nu : \mathbb{H} \to \mathbb{R},$$

що

$$\cos\hat{h}_1 = \cos(\phi + \hat{\alpha}) = \cos\phi + \hat{\alpha}\cdot\mu(\phi, \hat{\alpha}),$$
$$\sin\hat{h}_1 = \sin(\phi + \hat{\alpha}) = \sin\phi + \hat{\alpha}\cdot\nu(\phi, \hat{\alpha}).$$

Очевидно, μ та ν є $\mathbb{Z}$-інваріантними. Відмітимо також, що

$$\hat{h}_2^k = (\rho + \hat{\beta})^k = \rho^k + \hat{\beta}_1,$$

для деяких $\hat{\beta}_1 \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$. Тому

(6.7)

$$\begin{aligned} \gamma\circ P_k(\phi,\rho) \ &= (\rho^k + \hat{\beta}_1)(\cos\phi + \hat{\alpha}\cdot\mu(\phi,\hat{\alpha})) - \rho^k\cos\phi = \\ &= \hat{\beta}_1\cdot\cos\phi + (\rho^k + \hat{\beta}_1)\cdot\hat{\alpha}\cdot\mu(\phi,\hat{\alpha}), \\ \delta\circ P_k(\phi,\rho) \ &= \hat{\beta}_1\cdot\sin\phi + (\rho^k + \hat{\beta}_1)\cdot\hat{\alpha}\cdot\nu(\phi,\hat{\alpha}). \end{aligned}$$

Так як $\hat{\alpha}, \hat{\beta} \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$, то $\gamma \circ P_k$, та $\delta \circ P_k$ також належать до $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$.

Залишається відмітити, що $\mathbf{m}_k^{-1}$ співпадає з наступною послідовністю відображень:

$$\hat{h} \xmapsto{(6.3)} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \xmapsto{(6.7)} (\gamma \circ P, \delta \circ P) \xmapsto{\mathbf{f}_k} (\gamma, \delta) \xmapsto{(6.3)} h,$$

в якій для кожного $r \geq 0$ перші дві відповідності є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервними, а третя — є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервною (за теоремою 5.1). Отже, $\mathbf{m}_k^{-1}$ є $C^{(2k+1)r,r}_{W,W}$-неперервним для всіх $r \geq 0$. □

Теорему 6.2 доведено.

7. Доведення твердження 3.4

Нехай G — гладке векторне поле, визначене в околі V початку координат $O \in \mathbb{R}^2$. Припустимо, що G має властивість $(*)$ в точці O. Тоді можна вважати, що $G = \eta H$, де $\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ скрізь відмінна від нуля гладка функція, а $H = (-g'_y, g'_x)$ — гамільтонове векторне поле G деякого однорідного многочлена $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ степеня $p+1 \geq 2$, який не має кратних простих множників.

Позначимо через $\mathbf{G}$ — локальний потік поля G.

Для кожного $h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$ потрібно знайти гладку функцію $\alpha : V \to \mathbb{R}$, яка є плоскою в точці O і така, що

$$h(z) = \mathbf{G}(z, \alpha(z)).$$

Нехай

$$P : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2, \qquad P(\phi, \rho) = (\rho \cos\phi, \rho \sin\phi)$$

— відображення, що визначає полярні координати.

Покладемо $U = P^{-1}(V)$. Введемо позначення. Нехай

• $\mathrm{Flat}(V, O)$ — простір гладких функцій $V \to \mathbb{R}$, які є плоскими в точці O;

• $\mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H})$ — простір гладких $\mathbb{Z}$-інваріантних функцій $U \to \mathbb{R}$, що є плоскими на $\partial\mathbb{H}$;
• $\mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O)$ — простір гладких відображень

$$h : V \to \mathbb{R}^2$$

таких, що $h^{-1}(O) = O$ і h є нескінченно близьким до id_V в точці O;
• $\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H})$ — простір гладких $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень $\hat{h} : U \to \mathbb{H}$ таких, що $\hat{h}^{-1}(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$ і $\hat{h}$ є ∞-близьким до id_U в кожній точці множини $\partial\mathbb{H}$.

З теорем 5.1 та 6.2 випливає, що відображення $P_1 = P$ індукує наступні бієкції $\mathbf{f}_1$ та $\mathbf{m}_1$, які для простоти позначатимемо відповідно через $\mathbf{f}$ та $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{f} : \mathrm{Flat}(V, O) \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H}),$$

$$\mathbf{m} : \mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O) \to \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Нехай F — підняття векторного поля G з V на U за допомогою відображення P. Позначимо через $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})$ підмножину в $\mathcal{E}(F, U)$, що складається з відображень, які є ∞-близькими до $\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ на $\partial\mathbb{H}$. Крім того, нехай $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$ — підмножина в $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})$, що складається з $\mathbb{Z}$-еквіваріантних відображень. Тоді матимемо наступні включення:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O) & \supset & \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \\
\mathbf{m}\big\downarrow & & \\
\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}) & \supset & \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}.
\end{array}$$

Лема 7.1. $\mathbf{m}\big(\, \mathcal{E}_\infty(G, V, O)\, \big) = \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$.

Доведення. Нехай

$$h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O) \qquad \text{і} \qquad \hat{h} = \mathbf{m}(h) \in \mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U, \mathbb{H}, \partial\mathbb{H}).$$

Потрібно показати, що $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$, тобто, що

(i) $\hat{h}$ є дифеоморфізмом в околі кожної особливої точки $z \in \Sigma_F = \partial\mathbb{H}$ поля F;

(ii) $\hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \subset \hat{\omega}$ для кожної орбіти $\hat{\omega}$ поля F.

Перевірка (i). Так як росток h в точці $O \in \mathbb{R}^2$ є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, то за теоремою 6.2 $\hat{h}$ є ∞-близьким до тотожного відображення на $\Sigma_F = \partial\mathbb{H}$. Тому для кожної точки $z \in \partial\mathbb{H}$ дотичне відображення $T_z\hat{h} : T_z\mathbb{H} \to T_z\mathbb{H}$ є тотожним, а тому невиродженим.

Перевірка (ii). Розглянемо довільну орбіту $\hat{\omega}$ векторного поля F і нехай $\omega = P(\hat{\omega})$ — відповідна орбіта поля G. Тоді за означенням $h(\omega \cap V) \subset \omega$. Звідси випливає, що $\hat{h}(\hat{\omega} \cap U)$ міститься в деякій орбіті $\hat{\omega}_1$ поля F, такій, що $P(\hat{\omega}_1) = \omega$.

Потрібно довести, що $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$. Це випливає із структури орбіт поля G.

Дійсно, припустимо, що g є добутком визначених квадратичних форм, тобто $g(z) \neq 0$ для $z \neq 0$. Структура орбіт векторних полів F та G для цього випадку схематично зображена на Рис. 4.2. З неї випливає, що $\hat{\omega} = P^{-1}(\omega)$, а тому $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$.

Припустимо, що g має лінійні множники. Тоді множина $g^{-1}(0)$ є об'єднанням $2l$ променів $T_0, \dots, T_{2l-1}$, що починаються в точці O, причому T_i та $T_{i+l \bmod 2l}$ для $i = 1, \dots, l$ лежать на одній прямій, див. Рис. 4.1. Більш того, множина $P^{-1} \circ g^{-1}(O)$ є об'єднанням $\partial\mathbb{H}$ зі зліченою кількістю вертикальних півпрямих $\hat{T}_j$, $(j \in \mathbb{Z})$. Можна вважати, що $P(\hat{T}_j) = T_{j \bmod 2l}$.

Так як $h(T_i) = T_i$ для всіх $i = 1, \dots, 2l$, а відображення $\hat{h}$ нерухоме на $\partial\mathbb{H}$, то $\hat{h}(\hat{T}_j) = \hat{T}_j$ для всіх $j \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що P індукує бієкцію між орбітами поля G, що лежать у куті між променями T_i та T_{i+1} та орбітами поля

F, що лежать в полосі між $\hat{T}_{i+2ls}$ та $\hat{T}_{i+1+2ls}$, $(s \in \mathbb{Z})$. Тому $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1$.

Таким чином, $\mathbf{m}\big(\mathcal{E}_\infty(G, V, O)\big) \subset \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$.

Навпаки, нехай

$$\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$$

і

$$h = \mathbf{m}^{-1}(\hat{h}) \ \in \ \mathrm{Map}(V, \mathbb{R}^2, O).$$

Покажемо, що $h \in \mathcal{E}_\infty(G, V, O)$. Так як h є ∞-близьким до $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ в точці O, то h є локальним дифеоморфізмом в цій єдиній особливій точці поля G.

Розглянемо довільну орбіту ω поля G і нехай $\hat{\omega}$ — така орбіта поля F, що $\omega = P(\hat{\omega})$. Тоді за означенням

$$\hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \subset \hat{\omega}.$$

Так як $P \circ \hat{h} = h \circ P$, то

$$h(\omega \cap V) \ \subset \ h \circ P(\hat{\omega} \cap U) \ = \ P \circ \hat{h}(\hat{\omega} \cap U) \ \subset \ P(\hat{\omega}) \ = \ \omega.$$

Таким чином $\mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} \subset \mathbf{m}\big(\mathcal{E}_\infty(G, V, O)\big)$. □

Залишається довести наступне твердження:

Твердження 7.2. *Припустимо, що G має властивість $(*)$ в точці O. Тоді існує єдине відображення*

$$\psi : \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U, \partial\mathbb{H})$$

таке, що

$$\hat{h}(x) = \mathbf{F}(x, \psi(\hat{h})(x))$$

для всіх $\hat{h} \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}$. Це відображення є $C^{r+p,r}_{W,W}$-неперервним.

Наслідок 7.3. *Визначимо відображення*

$$\Psi : \mathcal{E}_\infty(G,V,O) \to \mathrm{Flat}(V,O)$$

за допомогою формули: $\Psi = \mathbf{f}^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{m}$*, тобто так, щоб наступна діаграма була комутативною:*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Map}_{\mathbb{Z}}(U,\mathbb{H},\partial\mathbb{H}) & \supset & \mathcal{E}_\infty(F,U,\partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U,\partial\mathbb{H}) \\
\mathbf{m}\Big\uparrow & & \mathbf{m}\Big\uparrow & & \Big\uparrow\mathbf{f} \\
\mathrm{Map}(V,\mathbb{R}^2,O) & \supset & \mathcal{E}_\infty(G,V,O) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Flat}(V,O)
\end{array}$$

Тоді Ψ *задовольняє твердженню 3.4.*

Доведення наслідку. Нехай $h \in \mathcal{E}_\infty(G,V,O)$,

$$\hat{h} = \mathbf{m}(h) \in \mathcal{E}_\infty(F,U,\partial\mathbb{H})_{\mathbb{Z}}, \qquad \hat{\alpha} = \psi(\hat{h}) \in \mathrm{Flat}_{\mathbb{Z}}(U,\partial\mathbb{H}).$$

Тоді

$$\hat{h}(a) = \mathbf{F}(a,\hat{\alpha}(a)), \qquad \forall a \in U.$$

Покладемо

$$\alpha \;=\; \mathbf{f}^{-1}(\hat{\alpha}) \;=\; \mathbf{f}^{-1} \circ \psi \circ \mathbf{m}(h) \;\in\; \mathrm{Flat}(V,O).$$

Таким чином $\hat{\alpha} = \alpha \circ P$. Спочатку потрібно довести, що

$$h(b) = \mathbf{G}(b,\alpha(b)), \qquad \forall b \in V.$$

Нехай $a \in U$ і $b \in V$ такі точки, що $b = P(a)$. Тоді

$$\begin{aligned} h(b) = h \circ P(a) = P \circ \hat{h}(a) = P \circ \mathbf{F}(a,\hat{\alpha}(a)) = \\ = \mathbf{G}(P(a),\hat{\alpha}(a)) = \mathbf{G}(P(a),\alpha \circ P(a)) = \mathbf{G}(b,\alpha(b)). \end{aligned}$$

Залишається перевірити неперервність Ψ.

Відмітимо, що для всіх $r \geq p$ відображення $\mathbf{m}$ є $C^{r,r}_{W,W}$-неперервним, ψ є $C^{r,r-p}_{W,W}$-неперервним, а $\mathbf{f}^{-1}$ — $C^{r-p,[(r-p)/3]}_{W,W}$-неперервним, де $[t]$ позначає цілу частину числа $t \in \mathbb{R}$. Тому Ψ є $C^{r,[(r-p)/3]}_{W,W}$-неперервним. Замінюючи r на $3r+p$ отримаємо, що Ψ є $C^{3r+p,r}_{W,W}$-неперервним. □

Таким чином для закінчення доведення твердження 3.4 та теореми 3.2 залишилось довести твердження 7.2.

Зауваження 7.4. Нехай $A \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, тобто A є плоскою функцією на $\partial\mathbb{H}$. Тоді з леми Адамара випливає, що для кожного $t \in \mathbb{N}$ існує така функція $A_t \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, що $A = \rho^t A_t$.

Доведення твердження 7.2. Нехай

$$\hat{h} = (\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \mathcal{E}_\infty(F, U, \partial\mathbb{H}).$$

Так як всі орбіти F на $\overset{\circ}{\mathbb{H}}$ є незамкнутими, то для кожної точки $z \in \overset{\circ}{\mathbb{H}}$ існує єдине число $\psi(z) \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\hat{h}(z) = \mathbf{G}(z, \psi(\hat{h})(z)).$$

Таким чином ми отримуємо однозначно визначену функцію зсуву $\psi : \overset{\circ}{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}$ для $\hat{h}$. З формули (1.4) випливає, що ця функція є гладкою.

Потрібно показати, що поклавши $\psi(z) = 0$ для всіх $z \in \partial\mathbb{H}$, ми зробимо функцію ψ гладкою на всій півплощині $\mathbb{H}$ і плоскою на $\partial\mathbb{H}$.

Нехай $\phi_0 \in \partial\mathbb{H}$. Тоді з леми 4.1 випливає, що

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1}(\phi - \phi_0)^a \gamma(\phi),$$

де $a \geq 0$ залежить від ϕ_0, а $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така гладка функція, що $\gamma(\phi_0) \neq 0$.

Так як g має властивість $(*)$, то за наслідком 4.5 маємо, що $a = 0$ або 1.

Розглянемо два випадки. Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\phi_0 = 0$.

1) Припустимо, що $a = 0$, тобто

$$g \circ P(\phi, \rho) = \rho^{p+1}\gamma(\phi),$$

в деякому околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Іншими словами, це означає, що g не ділиться на y. Тоді з формули (4.4), див. лему 4.4, випливає, що

$$F_1(\phi,\rho) = \rho^{p-1}\,\gamma_1(\phi).$$

Так як функції $\hat{h}_1 - \phi$ та $\hat{h}_2 - \rho$ є плоскими на $\partial\mathbb{H}$, то вони діляться на ρ, і ми можемо записати

$$\hat{h}_1(\phi,\rho) = \phi + A(\phi,\rho), \qquad \hat{h}_2(\phi,\rho) = \rho + \rho B(\phi,\rho),$$

де $A, B \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

Відмітимо, що векторне поле F визначає наступну автономну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = F_1(\phi,\rho) \\ \dot{\rho} = F_2(\phi,\rho). \end{cases}$$

Тоді $dt = \frac{d\phi}{F}$, а отже час $\psi(\phi,\rho)$ між точками (ϕ,ρ) та $\hat{h}(\phi,\rho)$ можна пірахувати за наступною формулою:

$$\psi(\phi,\rho) = \int\limits_{\phi}^{\hat{h}_1(\phi,\rho)} \frac{d\theta}{\rho^{p-1}\,\gamma(\theta)}.$$

Покажемо, що ψ є гладкою в околі $(0,0) \in \mathbb{H}$. Досить довести, ψ має гладкі частинні похідні першого порядку, які є плоскими на $\partial\mathbb{H}$.

Легко підрахувати, що

$$\psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{(\hat{h}_1)'_\phi}{\hat{h}_2^{p-1}\cdot\gamma(\hat{h}_1)} - \frac{1}{\rho^{p-1}\cdot\gamma}, \qquad \psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{(\hat{h}_1)'_\rho}{\hat{h}_2^{p-1}\gamma(\hat{h}_1)}.$$

Відмітимо, що

$$(\hat{h}_1)'_\phi = 1 + A'_\phi, \qquad (\hat{h}_1)'_\rho = A'_\rho.$$

Крім того,

$$\hat{h}_2^{p-1} = \rho^{p-1}(1+\bar{B}), \qquad \gamma(\hat{h}_1(\phi,\rho)) = \gamma(\phi)(1+C), \tag{7.1}$$

для деяких функцій $\bar{B}, C \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$. Тому

$$(7.2)\quad \psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{1+A'_\phi}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} - \frac{1+C}{\rho^{p-1}\gamma(\hat{h}_1)} = \\ = \frac{\overbrace{A'_\phi - \bar{B} - C - \bar{B}C}^{D}}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} = \frac{D/\rho^{p-1}}{(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)}.$$

Так як $D \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$, то з леми Адамара, див. зауваження 7.4, випливає, що D/ρ^{p-1}. Тому $\psi'_\phi(\phi,\rho) \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

Аналогічно,

$$(7.3)\qquad \psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{A'_\rho}{\rho^{p-1}(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)} = \frac{A'_\rho/\rho^{p-1}}{(1+\bar{B})\gamma(\hat{h}_1)}.$$

Ця функція також є гладкою, тому що $A'_\rho \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$.

2) Припустимо тепер, що $a = 1$, тобто $g = yR$, де

$$R(x,0) \neq 0.$$

Тоді з леми 4.4 випливає, що

$$F_2(\phi,\rho) = \rho^p\,\gamma_2(\phi).$$

Так як $F_1(0,\rho) = 0$, то піввісь $\{\phi = 0, \rho > 0\}$ є орбітою поля F. Тому вона є інваріантною відносно $\hat{h}$, тобто $\hat{h}_1(0,\rho) = 0$. Тоді, за лемою Адамара, маємо, що

$$\hat{h}_1(\phi,\rho) = \phi + \phi A(\phi,\rho), \qquad \hat{h}_2(\phi,\rho) = \rho + \rho B(\phi,\rho)$$

для деяких гладких функцій $A, B \in \mathrm{Flat}(U, \partial\mathbb{H})$. Тому

$$\psi(\phi,\rho) = \int\limits_{\rho}^{\hat{h}_2(\phi,\rho)} \frac{d\rho}{\rho^p\,\gamma(\phi)}.$$

Тоді, як і в попередньому випадку, можна показати, що

$$\psi'_\phi(\phi,\rho) = \frac{B'_\phi/\rho^p}{(1+\hat{B})\gamma(\hat{h}_1)}, \tag{7.4}$$

і

$$\psi'_\rho(\phi,\rho) = \frac{E/\rho^p}{(1+\hat{B})\gamma(\hat{h}_1)}, \tag{7.5}$$

де, як і в (7.1) функції $\hat{B}, C, E$ визначаються за наступними формулами:

$$\hat{h}_2^p = \rho^p(1+\hat{B}), \qquad \gamma(\hat{h}_1(\phi,\rho)) = \gamma(\phi)(1+C),$$

$$E = B'_\rho - \hat{B} - C - \hat{B}C$$

і належать до $\mathrm{Flat}(U,\partial\mathbb{H})$. Отже $\psi \in \mathrm{Flat}(U,\partial\mathbb{H})$.

Залишається довести неперервність відповідності

$$\hat{h} \mapsto \psi.$$

Зауважимо, що вирази для ψ'_ϕ та ψ'_ρ включають в себе ділення на ρ^p та оператори $\partial/\partial\phi$ і $\partial/\partial\rho$. За лемами 2.2 та 2.3 ділення на ρ та диференціювання по ϕ та ρ є $C^{r+1,r}_{W,W}$-неперервними операціями.

З формул (7.2), (7.3), (7.4) та (7.5) випливає, що знайдеться $d>0$ та замкнена куля $K \subset V$, що містить $O \in \mathbb{R}^2$, такі, що абсолютне значення знаменників в цих виразах більше ніж $2d$ в кожній точці множини K. Позначимо

$$L = P^{-1}(K) \ \cap\ [0,2\pi]\times[0,\infty).$$

Тоді з виразів для ψ'_ϕ та ψ'_ρ, а також з лем 2.2 та 2.3 слідує, що для будь-яких $r \geq 0$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta \in (0,d)$, що має місце наступна імплікація:

$$\|\hat{h} - q\|_K^{r+p+1} < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\psi(\hat{h}) - \psi(q)\|_L^{r+1} < \varepsilon.$$

Тому відповідність $\hat{h} \mapsto \psi$ є $C^{r+p,r}_{W,W}$-неперервним відображенням для всіх $r \geq 0$. Деталі залишаємо читачеві.

Я щиро вдячний В. В. Шарко, Є. Полуляху, О. Пришляку, І. Власенко та І. Юрчук за інтерес до роботи та корисні обговорення.

Література

[1] М. Голубицкий, В. Гийемин, *Устойчивые отображения и их особенности.* — Москва, Мир, 1977.

[2] М. Хирш *Дифференциальная топология.* — Москва, Мир, 1979.

[3] S. Maksymenko, *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces*, Ann. Glob. Anal. Geom., 29 no. 3, (2006), 241-285, `http://xxx.lanl.gov/math.GT/0310067`

[4] S. Maksymenko, *Smooth shifts along trajectories of flows*, Topol. Appl., 130 (2003), 183-204, `http://xxx.lanl.gov/math.GT/0106199`

[5] S. Maksymenko, ∞*-jets of difeomorphisms preserving orbits of vector fields*, preprint